高等学校规划教材

岩石爆破动力学基础

杨善元 编

煤炭工业出版社

高等学校规划教材

岩石爆破动力学基础

杨善元编

煤炭工业出版社

（京）新登字 042 号

内 容 简 介

本书是杨善元教授指导爆破专业研究生学习的一个大纲，内容包括五个部分：导论；波动理论概要；弹性理论纲要；爆破作用下岩石的破碎过程与原理；附录：爆破波作用下建筑物的安全极限；断裂力学原理纲要。

本书以阐述有关理论基础为主，可供从事有关爆破学科研究的硕士或博士研究生参考，亦可供有志于提高理论水平的教师与爆破工程技术人员阅读。

高 等 学 校 规 划 教 材
岩 石 爆 破 动 力 学 基 础
杨 善 元 编
责任编辑：莫 国 震
*
煤炭工业出版社 出版
（北京安定门外和平里北街 21 号）
煤炭工业出版社印刷厂 印刷
新华书店北京发行所 发行
*
开本 787×1092mm 1/16　印张 14 1/4
字数 333 千字　印数 1—1，315
1993 年 4 月第 1 版　1993 年 4 月第 1 次印刷
ISBN 7-5020-0747-4/TD · 690
书号 3514 A0203　定价 6.60 元

序　　言

本书是作者从 1978 年指导研究生以来逐渐成形的、关于“岩石爆破动力学基础”这门爆破专业研究生的专业课程的小结，目的在于为研究生的学习提供纲领性的参考资料。

1978 年接受指导研究生任务，当时的困难是很大的。首先是经过十年浩劫造成的损失，我们本身也要重整旗鼓再学习。在当时十几年的坎坷岁月中，不仅与新的知识完全脱节，即便有限的一点老本也荒废殆尽。学生方面的情况是程度高低不齐，基础与外文较差具有一定的普遍性。除了教与学这两方面的困难外，最突出的问题是中外文参考资料十分缺乏。当时曾致力于翻译几本参考书如《固体中的应力瞬变》与《波动理论的数学方法》以缓解燃眉之急。后来才配合中国统配煤矿总公司教育局教编室的总体规划，提出编写出版本书计划。其目的在于引导本专业研究生循着比较正确与有效的途径进行学习。本书的书名与大纲都经过多次的反复修改。

本书的缺点在于仅限于把许多认为必须的理论比较孤立地罗列出来，还未做到把这些理论融合在爆破理论体系中，所以把书名加上“基础”二字，以免失之夸张。

本书之成首先应归功于中国矿业大学北京研究生部爆破专业的研究生们。由于他们在学习过程中不断提出修改或补充，提高了本书的质量，因此他们首先应受到感谢。

自从 1987 年《爆破》第三期发表了拙作“岩石爆破动力学的研究内容与范围”后直至最近，尚有不少有志于从事爆破专业的校外同学提出很多宝贵意见。特别是他们致力于发展爆破工程的事业心十分令人鼓舞。作者仅向他们崇高的事业心表示敬意与谢意。

本书能出版问世，中国统配煤矿总公司教育局教编室的领导与其他同志尽了最大努力，特别是莫国震老师给了我很多宝贵意见和鼓励，仅致谢意。

本书定稿前后均承中国矿大北京研究生部王树仁教授审阅并提出不少重要的意见，仅致谢忱。

本书可能还有不少缺点或错误，欢迎提出指正。

杨善元

1991 年 6 月

目　　录

（三）弹性理论纲要

（一）导　　论

近一个世纪以来，人类为了寻找自然资源以提高生活水平和建设新的生存空间，爆破作为一种技术，为大量的开路造桥，甚至移山填海的巨大工程做出了很大贡献。特别是在最近的 20 年中，爆破技术突飞猛进的提高是十分显著的。它的进步与发展为人类社会的繁荣提供了物质基础与资源的保证。

爆破技术的提高依靠的是相关科学的发展引起的爆破理论水平的提高，即便是经验总结亦要依靠科学原则，不然是徒劳无功的。

同时也应该承认，爆破理论的发展的确比较缓慢并且比较落后。甚至在 50 年代初，有些教科书还认为岩石爆破仅仅是由于爆生气体膨胀的作用，很少有人结合比较成熟的自然科学，特别是物理学和力学来探讨它的理论问题。

实际上，作为岩石爆破主要理论根据的弹性波在固体中的传播理论，远在 1821 年 Navier 就提出来了。他当时首先确立了他的弹性固体的平衡与振动的一般方程。在同年因受到 Fresnel 关于光偏振现象可以利用弹性固体中的横波的理论的意外启示而提出弹性波传播的主题。这两位著名的科学家不仅在各自的研究领域中取得了很大的成就，而且由于这两门学科的互相渗透，使弹性理论与光学都更为紧密地联系起来。最明显的例子是光弹理论与技术已成为形象地记录与量测应力波在相似介质中传播规律的一种有用手段。在这以后的 40 多年间，弹性波的传播理论在数学家 Couchy 与 Poisson 以及物理学家 Stokes 的努力下亦得到广泛的发展。其中应该特别一提的是 Stokes 于 1845 年提出弹性波在粘弹性介质中的传播理论。他的波动方程与传统的波动方程不同之处在于他考虑了粘性产生的内摩擦造成的能量损失。

但是，也可以看到弹性波理论在上述的 40 年或更长一些的年代中基本上是纯理论的研究，并无意为爆破理论的发展服务。直至 50 年代初 Duvall、Atkchisson 与 Forgelson 等人提出反射波理论后，弹性波理论才开始用于岩石爆破理论。从此很自然地把波动理论与爆破理论紧密地结合起来，才开始比较科学地认识到岩石在爆炸冲击载荷作用下岩石的破碎是很复杂的爆炸能的转换与传播过程，其中包含从炸药的爆炸能转变为在介质中传播的应变波能。于是出现了许多爆破理论，引起了近 30 多年来的争论。争论的焦点之一在于把爆破作为一种力学过程来看，是静态、准静态或动态？作者综合各家意见，基本同意动态是主导的，所以用“岩石爆破动力学”来概括岩石爆破的理论基础是比较适合的。

采矿或其它地下工程都必须研究围岩或顶底板的形变、应力状态以及地下施工空间的稳定性。这种研究是以所谓“岩石力学”为基础的。

“岩石力学”实际上是一种静力学，虽然已经比较普及并为众所周知，但尚缺乏一个统一的定义。大体上可以认为它是研究岩石在外载荷作用下发生形变的基本过程以及它的技术意义的一门学科。这个过程可以是长达 100 万年的数量级的地质力学上的造山运动，或者短至以微秒计的爆破过程；研究的范围可以如一座大山那么大或微小至一颗岩石的质点这么小。如地质力学或矿山地质力学即所谓“岩石静力学”属前者，而后者即属“岩石爆破动力学”的范畴。

"岩石爆破动力学"所要研究的主要是岩石在爆炸冲击波作用下能的转换与以波的形式出现的能的传播过程以及过程中所表现的介质的形变或破坏的形式与特性。

岩石静力学与动力学的理论基础都是弹性理论，但前者的对象为静力学，后者则为弹性动力学。说得更明确些就是两种岩石力学的差别在于各自考虑的载荷的形式与性质不同，前者主要限于静载荷，而后者主要为动载荷。当然这两种载荷对介质产生的效应也是迥然不同的。

静载荷在介质中产生的应变是在一定边界条件下、在整个边界范围内分布的，并且边界范围内各个质点的温度都相等，所以它产生的压缩或拉伸是等温过程。

动载荷，特别是爆炸那样的瞬间性强冲击载荷所产生的应变往往是很局部的，离作用点较远处仍然是无载荷区，要等到从作用点传播来的应变脉冲到达后才发生相应的形变或破坏。同时它产生的压缩或拉伸是绝热过程，因为应变产生的热量尚来不及散失就停止了。

动载荷基本上可以通过施载速度或在岩石中引发冲击或应变波的能力来定义。因此，加载时间若以秒计，则尽管理论上是动载荷亦不能在岩石中产生与动载荷完全相同的应力状态。

理解动载荷的局限性与狭窄性的特殊意义就可有利于在处理固体中的应力瞬变脉冲的许多问题时局限于极小范围与极短的瞬间为条件，因为在这种情况下才能把有些介质当作弹性或线弹性来考虑，从而有可能利用传统的弹性波理论来分析，以简化繁复的数学解。

已经证明动载荷的屈服点和极限强度几乎为静载荷的 2 倍，并且由于应变脉冲产生的破裂与静载荷完全不同，前者因作用时间的瞬间性以致产生的裂纹尚来不及蔓延或扩展就停止了，因此出现了较密集的、很不规则的裂纹网络。

从上所述可以看出，岩石爆破的瞬间过程中经历最长、变化最复杂的要算以脉冲形式出现的应变波的传播过程。因此本书除了"导论"作为第一部分外，把"波动理论概要"作为第二部分。其目的在于把物体的振动直至固体中瞬间应力波的基本理论给予简要的介绍，以便与第三部分的弹性波理论和第四部分的应变波的传播理论相衔接。

第三部分是"弹性理论概要"，它是岩石爆破原理的理论基础。

第四部分"爆破作用下岩石的破碎过程与原理"，为本书的核心部分。其中主要包含岩石爆破机理、炮孔中的爆炸过程、爆轰理论与状态方程、应变波理论以及影响爆破效果的岩石性质。

爆轰理论与状态方程即所谓爆炸力学，它的理论体系属于热流体动力学的范畴，它本身即具有较严密与成熟的理论系统，应该作为一门独立的学科来考虑。在本书中为了说明作为爆源的爆轰波的起始状态，介绍了它的基本原理。

第四部分包含了由 Herris 为代表提出的爆破理论。他的理论基础就是所谓"厚壁筒理论"或炮孔升压理论。

Herris 在他的理论中认为，厚壁筒内的装药爆破不存在反射波的剥落现象，而是在筒壁上看到许多径向裂缝。这些裂缝可能是切线应变波产生的，因围绕筒壁周围的任一点都出现两个互相垂直的应变，一为径向应变另一为切向应变。

在处理许多固体中的瞬间性应力脉冲时，都是假设介质是理想的弹性体，因此可以严格地服从虎克定律的弹性波传播理论，不考虑由于介质的内摩擦造成的能量损失。严格地说这种简化处理不论在理论分析或实际应用上都存在着缺陷，因此在这一部分中提出了

“弹性瞬变波在粘弹性介质中的传播”为一章作为对传统的弹性波理论的修正或批判。该章先从传统的弹性波的缺点开始，然后论述了考虑由于介质的内摩擦造成的能量损失的 Stokes 方程的意义与求解。

本书的最后一部分即第五部分附录，它包含 2 章：(1) 爆炸波作用下建筑物的安全极限；(2) 断裂力学原理纲要。

随着工程爆破的发展，爆破引起的附近建筑物的受振或破坏的防护问题已越来越突出。这种问题已经成为爆破工作者无可回避的敏感的环保问题。在国内这类问题的研究虽然比较落后，亦已引起有关方面的注意。其中，中科院力学所在龙门石窟的受振量测研究即为其中较重要的一例，只不过其振源不是来自爆破而是来自附近的火车。这种有规则的周期性振波亦可造成灾难性的破坏。

“断裂力学”与爆破理论的联系在近十几二十年来有越来越紧密的趋势。其中如应力集中或裂缝尖端的有限塑性的理论，对于爆破产生的裂缝的发展与分支机理的分析很有用处。

在我们研究过的波动方程中，都是假定波的传播介质是均质的，即是说波在其中的传播速度 c 是一个常数，因此波动方程是一个较简单的线性方程。但在实际上并不存在这种纯理想介质，因此波速 c 亦不是常数，而是随时间与空间而变化的比较复杂的函数。但是，由于 c 的改变，却在数学处理上造成很大的困难，这引起了不少科学家的兴趣，并提出了大量的数学上的探讨。这里介绍的 WKBJ 法仅仅是其中一个典型的例子，并且在数学处理上还不能排除一些数学上的假设。

在过去 20～30 年间，爆破理论进步的最显著的表现，要算应变波在岩石中传播的研究。这些研究都与爆破有关，但它的成果却并不应用于岩石爆破的实际中。例如岩石爆破的规律仍然与应变波的研究无多大关系。最明显的例子为爆破漏斗的研究是最广泛与最丰富的研究方法之一，总结出的数据和资料也是很大量的，但受到并不很热心的采用。其中定性地引用反射波的剥落理论较多，对于比例规律的计算方法则分歧较大。这种理论与实践的脱节现象是否就是爆破学科这个领域理论发展缓慢的原因，值得我们深思。

由 Navier 开创的传统的弹性波理论发表于 1821 年，但把这个理论与爆破理论仅仅是定性地联系起来（还不是应用）就经过一个多世纪。又经过 30 年才出现了 Stokes 波动方程。由此可见孤立地创造一种理论是一段漫长的艰苦的历程，不能一蹴而成。但在当前信息科学日新月异发展的时代，距离与时间都缩短了，因此科学的进步与发展一定会大幅度加快步伐。我们这种小范围的边缘学科亦不会例外。

本书原来的意图是要求把所有与爆破机理有关的、或为阐述与分析爆破过程中的表现所必须的基本理论紧密地联系与融会贯通起来。现在看来，这是一项很艰巨的工作，需要较长期的探索与积累才有可能一步一步地实现。我们的目的是要建立一门学科，现在只能达到提出在大框架中的必须的最基本的理论或经验。随着这个学科的发展，一定会在不断探索过程中增加内容与提高水平。今后的工作还任重道远又充满希望。

（二）波动理论概要

第一章　波的概念与定义

波动现象在人们的经验中是比较熟悉也是经常接触到的。一粒石子掉到水中，就立刻在受到扰动的水面上的某一点向四周由近及远地传播水波。在空间某一点发出响声，就会使远离发声点的一定距离范围内听到相似的声音，这是声波通过以空气为介质传播出去的。此外如电磁波与光波都是为人们所熟知的，不过这种波与水波或声波不同，它不依赖水或空气为介质来传播而是可以在真空中传播。

波还没有一个足以概括它的全部特性的定义。比较直观并为众所同意的是认为波是外载荷作用下，介质局部的平衡受到破坏所引起的扰动的传播的表现。因此，不论什么波在介质中传播时都会根据扰动能的强弱或大小与速度使介质的局部产生相应的变化或反应，其中最普遍发生的为形变。这种形变可能是弹性、塑性、或弹塑性相结合。

产生弹性形变的波称为弹性波。这是最具有重要而现实意义的一种波，因为自然界的各种物质在极短暂的瞬间内都或多或少表现为弹性。然而就爆破力学这个范畴而论，岩石的形变是粉碎性的或不可恢复的残余形变。即便如此，逐渐衰降的应力波在传播过程中除非遇到边界面都会衰变为弹性波，边界上的应力波立即反射为拉伸波，继续对岩石的破坏起作用。从此可以看出弹性波发挥的能量对岩石爆破起着多么重要的作用！

1.1　波　的　通　性

从物理意义而论，弹性波是行进中的扰动，并且代表介质中从某一点至另一点的能量的转移，于是必须有一个介质中的起始振动或振动源，必须有某一力或力系作用于介质中来扰动它的平衡状态，从而引进了新形式的能量到介质中。若这个介质对引进的能量的反应是非弹性的，则它吸收能量，并且仅仅从扰动区放出阻尼波（damped　waves）。若它是弹性体，则力的作用就如同弹簧的质量系统那样，介质的受扰的起始质点就从静止的位置发生振动。由于介质是弹性体，振动就从一个单元向另一个单元一个一个地传播下去，因而造成在介质中进行的波的运动。所谓弹性体就是当造成该介质的形变的力取消后就完全恢复它的大小与形状的一种物体。这种物体一般都是均质的（与弹性模数无关）（homogeneous），各向同性的（所有方向的弹性性质都相等）（isotropic）。这是一种纯理想的材料，实际上是不存在的，但很多物质在很局部与很短暂的瞬间，这种性质是存在的，因此作为对波动力学问题的近似的分析与处理是可以的。弹性体的质点在波动过程中都要产生相对位移，它的数值都是假定小到它的平方可以忽略不计。

前面谈到的介质中的扰动引进了新形式的能量，这种能量一般以应力组成的力系为表现形式。也可以说这些应力都是引进扰动的反应。这种应力的瞬间与空间的特性由介质的弹性所规定。由扰动引进的能量以波动中的质点运动的动能、势能与位移的形式进行。这些能量与波的振幅的平方成正比。当波传播时就要引进影响单位面积的波阵面的能量密度

的几何效应。为了说明这种效应，下面研究一个无限边界的完全弹性介质。在这种介质中的一个点的扰动将产生一个球面波，它的波阵面的面积随 r^2 而增加，其中 r 为质点至扰动源的距离，于是，流过每单位面积的能量就随 r^{-2} 而降低。若扰动源为一直线，则它的能量将产生柱面波，它的面积随 r 的增加而增加，流过单位面积的能量值随 r^{-1} 而减少。若扰动源距离很远，则可把波阵面当作平面来考虑，因此就不产生如球面波与柱面波那样的几何效应。事实上，不可能有完全弹性体，因此波的传播过程中就要额外损失能量，从而使波的振幅随距离与时间的增加而衰降。衰降规律是一条指数曲线。

讨论波动过程中的弹性介质的部分振动时，必须考虑到它的特性总是受前述的力系在数量与方向的可变性的影响。

波动可能是瞬变的（transient），周期的（periodic）或随机（random）的。瞬间运动是以介质对突然的脉冲式的刺激的反应为其特征的。这种波动的衰降迅速。周期波是重复性的，在固定的时间增量中正好以相同的形式重现。周期波的一种重要形式为简谐波（simple harmonic wave），它是以正弦与余弦函数来说明的。

波的另一个共同特点是它的运动是通过质点振动，即前后或往复振动表现出来的，但波动过程中质点本身始终在原地振动，并未随着波动而前进，无物质的运输，组成介质的质点仅在极有限的轨迹上振动或旋转，不脱离它原来的位置。所以质点速度是与波速完全不相同的两个概念。

波速或称相速度，是描述扰动在介质中传播的速度，与描写质点受激所引起的振动速度不同。

波是以频率 f 与波长 L（其中 $L=c_i/f$）及质点位移的振幅 A_d 来定义的。A_d 可以通过与频率相应的质点位移的速度 v_d 联系起来：

$$v_d=2\pi f A_d \tag{1.1}$$

其中 A_d 为波的通道上脉冲含有能量向各个方向引发的位移。

实际上 v_d 是波的通道上的质点运动更为有用的指标，因为它与波动中的应力 σ 与应变 e 水平发生如下关系：

$$\sigma=\rho c_p v_d \tag{1.2}$$

$$e=\frac{c_p}{v_d} \tag{1.3}$$

式（1.2）与式（1.3）仅仅是忽略了常数系数的近似值。对于剪切波这个近似式是不适宜的。

由于 v_d 与频率无关，所以它都可用微分 dA_d/dt 表示而不是用材料的真实位移来表示。

必须注意的是式（1.2）与式（1.3）只代表体波的应力水平。表面波如瑞利波 R 虽然它的速度只有体波的一半，波的质点速度则几乎为体波的两倍。于是在同一条件下应力水平是不变的：

$$\sigma=\rho c_R v_d \tag{1.4}$$

波的质点位移与频率都不是常数，都是随波源距离的增加而减少。频率与速度的起始数值由波源放出的能量的起始大小来确定。质点位移的频率与速度的衰减速度为波通过的介质的物理与力学性质以及运动距离的复变函数。

1.2 周 期 波

一般而论，在物理学上最基本的波就是周期波，它的运动具有一定的周期性。这就是说，介质的扰动在一定的空间与时间范围内发生重复，图 1.1 为一种周期波，其扰动以速度 u 向 x 方向运动，并在给定的时间内与在每一个波长 λ 内重复一次。重复的时间称为周期，为

$$T=\frac{\lambda}{v}$$

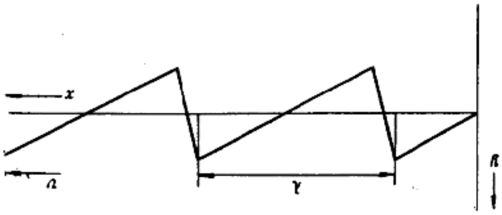

图 1.1 周期波

即通过给定点所需时间，或每通过一个波长 λ 所需的时间，因此，频率为

$$f=\frac{1}{T}=\frac{v}{\lambda} \tag{1.5}$$

以 $v=\lambda/\tau$ 代入 x 正向运动的一般波动方程 $y=f(x-vt)$ 中，得出

$$y=f\left(x-\frac{\lambda t}{\tau}\right)=F\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{\tau}\right) \tag{1.6}$$

其中 F 为与原函数相关的一个函数。

周期波的重要性不仅在于自然界广泛存在，更重要的还在于任何周期波都可利用傅里叶变换分解成一定数量的可叠加的简谐波（SHW）。

1.3 线性与非线性波

从波动理论的意义而论，所谓线性与非线性指的是它所属的波动方程是线性或非线性。例如弹性波的标准偏微分方程

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{1.7}$$

为 2 阶 1 次偏微分方程，它是最重要的波动方程，说它是线性的是因为它代表了所有类型的速度为常数的线性波动。

波动方程是线性的，即方程中只出现 ϕ 以及它的各阶偏导数的一次项。这种线性方程的另一个特性为它的解的可叠加性。即：若 ϕ_1、ϕ_2、ϕ_3 等都是原方程的特解的表达式，则 $a_1\phi_1+a_2\phi_2+a_3\phi_3+\cdots\cdots$ 也是该方程的一个解。其中 a_1、a_2、a_3、……是任意常数。这种叠加法则对于解线性波动问题很有用。还有另一个非线性方程所没有的特性是可以采用分离变量法来解。

线性微分方程虽然必须是一次式，但两者是有区别的，一次微分方程只有因变量（未知函数）及其各阶（order）导数均为一次的微分方程才是线性方程。n 阶线性微分方程的一般形式为

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x) \tag{1.8}$$

波动系统的分析方法，说明了许多波动系统的特性，这是波动理论的分析基础，但亦有许多波动现象无法以线性理论来说明。

我们已研究过许多工程上或力学上的问题，波动的发生原因和效果的关系是线性的，即

是说载荷倍增则介质的反应亦倍增。但在非线性系统中，原因与效果之间的关系是不成比例的。有些问题在小载荷情况下上述关系是成比例的，但载荷达到所谓临界值时，这种比例规律就不存在了。同样，在短暂的瞬间表现为线性但超过一定限度就不是线性。

非线性的波动方程可以用下式为代表：

$$\ddot{x}+f(\dot{x},x,t)=0 \tag{1.9}$$

著名的弦线波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^{-2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1.10}$$

亦是非线性的。这两个方程的解都不具备解的可叠加性。弦线方程只有当 $\partial y/\partial x \doteq 0$ 才符合线性原则。

非线性方程需要比较繁复的数学处理并很难得出确实的解，必须通过某些假设才能得出近似解。

第二章　简谐振动与简谐波

2.1　简谐振动的定义

如图 2.1 所示，若一个质点 P 沿一直线 AB 运动，它的加速度是朝着 AB 线上的一固定点 O，并且与 O 点的距离 x 成正比，于是质点 P 的运动就称为简谐振动（SHM)。

质点 P 理想地认为它的体积为无穷小但有一定的质量。实际上 P 的体积可忽略不计，特别是当体积与它的边界都是不变量——一个刚体，于是，为了方便起见距离 x 就从质点中心或重心量起。

质点 P 的运动可以是通过以积分求出的、以时间 t 来表示的正弦方程。

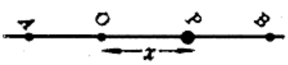

图 2.1　简谐振动

SHM 的定义可用如下方程来表示：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{x}=-\omega_0^2x \tag{2.1}$$

其中 ω 为正常数。它的意义为表示振动体在 2π 秒时间内所作的完全振动的次数，叫做角频率，单位是 1/秒〔s^{-1}〕；负号表示加速度总是倾向于使 x 降低。

式（2.1）可按常系数二阶线性微分方程解出，或者将 $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ 改写为 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，其中 v 为质点 P 的瞬时速度，等于 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，因此

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\\&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{v\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}{v}\end{aligned}$$

$$=\frac{v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{2.2}$$

于是式（2.2）可分解为

$$v\mathrm{d}v=-\omega_0^2 x\mathrm{d}x \tag{2.3}$$

上式两端积分即可得出 v 与 x 的关系式。

2.2 简谐振动的振幅、周期、频率和相位

振幅、周期、频率和相位等都是描述简谐振动的物理量，现在结合 SHM 方程来说明这些量的物理意义。

振幅：在谐振动方程 $x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$ 中，位移的绝对值的最大值为 A，这个 A 值就称为振幅。

周期：物体作一次完全振动所需时间叫做周期，用 T 表示，通常以秒〔s〕为单位。物体在任意时刻 t 的位置和速度应与在时刻 $t+T$ 的位置和速度完全相同。所以

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)=A\cos[\omega_0(t+T)+\varphi]$$

而余弦函数是以 2π 为周期的，即

$$\cos(\omega_0 t+\varphi)=\cos(\omega_0 t+\varphi+2\pi)$$

对比如上两式可得

$$\omega_0 T=2\pi$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0} \tag{2.4}$$

频率和角频率：单位时间内振动点所完成的振动次数叫做频率，以 f 表示。它的单位名称是赫兹〔Hz〕。每秒振动一次，就称它的频率为 1Hz。频率等于周期的倒数，即

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega_0}{2\pi} \tag{2.5}$$

于是

$$\omega_0=2\pi f$$

所以 ω_0 表示物体在 2π 秒时间内所作的完全振动的次数，称为角频率，单位是 1/秒〔s^{-1}〕。

弹簧振子的频率为

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.6}$$

其中弹簧振子的角频率为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

是表征弹簧振子性质的物理量——质量 m 和倔强系数 k 所决定的，所以周期和频率只和振动系统本身的性质有关。这种由振动系统本身的性质所决定的周期和频率叫做固有周期和固有频率。

相位或周相：在谐振方程 $x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$ 式中的 $(\omega_0 t+\varphi)$ 称为振动的相位或周相。它不仅决定振动点的任意时刻 t 的位移，也决定这时振动点的速度。

φ 为当 $t=0$ 时的相位，叫做初相位，简称初相。

振幅 A 和初相 φ 都决定于起始时刻的物体的运动状态，即 $t=0$ 时，振动物体的位移 x 和速度 v_0 分别为

$$x=A\cos\phi$$

与

$$v_0=-\omega_0 A\sin\varphi$$

解以上两式，即求得

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v^2}{\omega_0^2}} \tag{2.7}$$

$$\varphi=\mathrm{arctg}\,\frac{-v_0}{\omega_0 x} \tag{2.8}$$

初位移 x_0 和初速 v_0 叫做起始条件。上述结果说明谐振动的振幅和初相是由起始条件决定的。

2.3 简谐振动的能量

现在以弹簧振子来说明振动系统的能量。

设在某一时刻，物体作 SHM 的速度为 v，则系统的动能为

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0t+\varphi) \tag{2.9}$$

若该时刻物体的位移为 x，k 为弹簧的倔强系数，则系统的势能

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0t+\varphi) \tag{2.10}$$

可看出系统的动能和势能也作周期性变化。由上式可知，当物体的位移量最大时，$\cos(\omega_0t+\varphi)=1$，势能达到最大值，但此时 $\sin(\omega_0t+\varphi)=0$，动能为零；当物体的位移为零时，$\cos(\omega_0t+\varphi)=0$，势能为零，此时 $\sin(\omega_0t+\varphi)=1$，动能达到最大值。

系统总能量等于动能与势能之和，即

$$\begin{aligned}E&=E_k+E_p\\&=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2[(\omega_0t+\varphi)+\cos^2(\omega_0t+\varphi)]\\&=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2=\frac{1}{2}kA^2\end{aligned} \tag{2.11}$$

上式说明，对于给定的弹簧振子，谐振动的总能量都分别与振幅和频率的平方成正比。

由于在谐振动过程中，系统不受外力的作用，而作用力只有弹性力，没有耗散力，所以在振动过程中，动能和势能虽不断地相互转换，而总能量为一恒量。

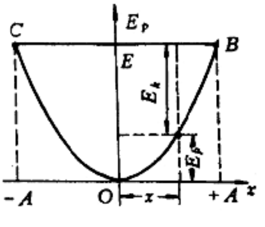

图 2.2 谐振动势能曲线