现代流体力学进展

中国力学学会办公室
中国科学院力学研究所 LNM 开放试验室 编

科学出版社

现代流体力学进展

中国力学学会办公室
中国科学院力学研究所 LNM 开放试验室 编

科学出版社

1991·北京

(京) 新登字 092 号

内　容　简　介

本书根据 1990 年 10 月"非线性流体力学"研讨会上的报告编纂而成，共收集 12 篇综述文章，涉及现代流体力学前沿的各个领域，对于科学研究有一定的指导和参考意义.

现代流体力学进展

中国力学学会办公室
中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室　编

执行编辑　胡淑敏　何　林

责任编辑　李成香

科学出版社　出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国力学学会办公室微机排印小组排版

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*　*　*

1991 年 9 月第　一　版　　开本：787 × 1092　1 / 16

1991 年 12 月第二次印刷　　印张：$7\frac{1}{2}$

印数：801 —1700　　字数：169 000

ISBN 7-03-002739-6 / O · 516

定价：7.00 元

出版说明

虽然力学是一门古老的学科，有人甚至认为它已经没有太大的发展前景了，但实际情况远非如此. 如近年来吸引了大量科学家从事研究的非线性科学，其形成和发展都与力学的参与不可分割. Lighthill 在纪念牛顿诞生 300 周年的文章中指出，经典力学的发展导致了决定论在科学中占统治地位，为此他虽然代表力学界向科学界"道歉"，但实际上打破决定论在科学界占统治地位的学科仍然是力学. 由于现代工程技术发展的要求，对力学不断地提出新的问题，而近代力学的许多新发现，又对工程技术提供了有力的支持. 所以我们完全有理由说，力学是一门既古老又年青的学科.

流体力学是力学的一个重要分支. 上述非线性科学的形成，实际上起源于流体力学的发现. 其他诸如航空、航天、船舶、海洋工程、机械工程、水利工程……等等的发展，也都离不开流体力学所提供的新思想、新方法及新的成果. 正是因为这些原因，在我国有志于从事流体力学研究的同志也越来越多，这是一个十分可喜的现象.

另一方面，不是每一位参加流体力学研究的同志都能很快地了解当前研究的前沿，从而抓住重要的课题. 这在一定程度上反映在我国流体力学的研究中，存在着一些低水平重复的现象.

鉴于以上原因，原中国科学院力学研究所所长，现中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放研究实验室(LNM)主任郑哲敏教授提出举行一次"流体力学前沿问题研讨会"，以明确当前流体力学的发展动向. 这一倡议，得到中国力学学会常务理事会和国家自然科学基金委员会力学处的支持. 于是由中国力学学会流体力学专业委员会主持，邀请了国内在流体力学方面造诣深厚且正在第一线从事研究工作的十几位同志，于 1990 年 10 月在北京召开了第一次研讨会，会上就各自从事的领域做了综述报告，并进行了讨论. 参加会议的同志约 30 人.

本文集是在上述十几个邀请报告的基础上，进一步整理编辑而成的. 它反映了各个领域的现状及作者本人对动向的展望. 我们认为，首先应该肯定的是，这些报告对有志于从事流体力学研究的同志，具有很好的参考价值. 当然，任何人，无论学术水平有多高，都不可能百分之百的正确. 好在既然从事科学研究，就一定要独立思考，所以在参考这些报告的同时，也不要受报告的束缚. 这样，这些报告才能真正起到应有的作用.

流体力学的问题，大多数是非线性的，本文集也可以看成是非线性流体力学问题的文集. 但也有些问题，从本质上说虽然是非线性的，但却有时也可以在线性的数学模型下得到说明. 因此我们还是选择了"现代流体力学进展"作为本文集的标题.

国家自然科学基金委员会对这次学术活动和论文集的出版给予了部分经济资助；周恒、是勋刚二位教授对本次学术交流的组织和审稿做了大量工作，在此深表谢忱。

中国力学学会流体力学专业委员会
中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室

目　　录

流动稳定性与转捩

周　恒

(天津大学力学系)

提要　文中主要讨论有关平行流的稳定性与转捩问题中现在存在的未解决的问题，以及现有理论中存在的不足，而不是阐述已经取得的成就. 所提问题是作者认为进一步研究取得进展的关键问题.

关键词　流动稳定性，转捩，二次失稳，共振

近年来，有关平行流流动稳定性与转捩的综述性文章已有好几篇. 国内的如周恒[1]，国外的如 M.V.Morkovin[2]，Th.Herbert[3]，B.J.Baylay，S.A.Orszag 和 Th.Herbert[4]等. 因此，本文中不再重复在这些文章中多次提到的结果，而把重点放在存在的问题及值得进一步研究的问题上.

一、二次失稳理论中存在的问题

二次失稳理论是近年来公认的比较成功的理论. 理论计算结果与实验结果吻合得相当好. 但是有一个条件，即实验必须是在低湍流度风洞中做，而且必须人工引进周期性扰动. 近年来有一些人用数值模拟的方法研究转捩问题，虽然结果不尽相同，但是有一个比较一致的看法，就是自然转捩一般不是通过二次失稳的途径. 即在有背景随机扰动的情况下，更有可能是通过 K 型失稳的途径，而恰恰是关于 K 型失稳的机制，至今还不十分清楚. 在数值模拟中还发现，若平均速度剖面在流动横向有周期性变化时，更易引发 K 型转捩. 近年来，有不少人认为 Gortler 涡的存在是引起平均流在横向有周期性变化的一个原因. 因此在 Gortler 涡存在的背景上研究流动的不稳定性，是一个值得研究的问题，一种可能的研究方法就是采用二次失稳的概念(Gortler 涡的产生是一次失稳).

二、共振机制

除了二次失稳的机制外，共振激发也是人们常常应用的一个概念. 共振三波就是著名的一个例子. 但是，仔细地考察原来的共振概念就会发现有以下几个问题：(1)共振条件只是对于绝对不稳定性问题，如平面 Poiseuille 流的时间模式问题只是在考虑其时间过程很长的问题中才是必需的. 而对迁移不稳定性(convective instability)问题，如边界层中的转捩问题，共振条件并不需要严格被满足，因为转捩过程在一个不太长的过程中就完成了. 共振条件的作用之一就是保证各个参与共振的波相速度相等，从而保证各波之间的能量传输关系不变. 而对一个较短的过程来说，相速度有一点差别并不会产生实质性影响. (2)一般都直观地认为共振时参与共振的各波波幅都会快速增长，而波幅增长意味着能量也增长. 但实际计算时发现满足共振条件时的能量传输，相对于不完全满足

共振条件时的传输并不表现为有一显著的峰值. 因此究竟什么样的波会被激发, 并不完全取决于共振条件是否被满足, 还与初始扰动的谱分布有关. (3)即使是满足了共振条件, 各个波的演化方程应如何求得, 也还是一个没有很好解决的问题. 过去有人用弱非线性理论来做, 但周恒最近对原来的弱非线性理论提出了一些批评意见[5], 同时也提出了一种改进的办法. 是否能用于这个问题, 或是否有其他更好的方法, 也是值得研究的问题.

三、能量方程中的问题

有一种推导扰动演化方程的方法是能量法, 例如 J.T.C.Liu 就常用这种方法[6]. 但是具体在做能量积分时, 应先知道各扰动波的速度分布. 过去常用的办法就是假设各扰动波都是 Tollmien-Schlichting 波. 但 T-S 波是由一线性齐次特征值问题解出的, 而能量方程中各波间能量传输是通过雷诺应力做功而实现的, 这就要求在原来的方程(即扰动波满足的方程)中包含这些雷诺应力, 因而方程就不能是齐次的. 这就与扰动波是 T-S 波的假设相矛盾. 因此如何正确地由能量方程推导出扰动波的演化方程也是一个值得研究的问题. 附带说一句, 在以往的文献中, 能量方程在用于空间模式问题时, 往往略去了与压力有关的一项. 数值计算的结果表明, 对于自由剪切流, 如射流、混合层等, 这样做引起的误差不是很大. 而对边界层流及平面 Poiseuille 流, 则引起的误差决不是一个可以忽略的量.

有关上一节及这一节中提出的问题, 周恒已分别写了文章讨论, 刊登在有关刊物上[7, 8].

四、失稳后的归宿

共振激发的概念是比二次失稳概念更广泛的概念. 因此, 如果正确地解决了二、三两节中的问题, 就使我们有可能把失稳后的非线性演化的初始阶段(扰动幅值不是无限小, 如线性理论要求的那样, 而是有限的, 但仍然不很大)基本弄清楚. 但是, 这仍然是一个确定的过程. 如何进一步从确定性问题演化为一个混沌或湍流问题, 就是最关键的一步了.

从实验看, 在低湍流度风洞中通过人为引进周期性扰动以研究转捩问题, 在起始阶段, 量得的扰动也是周期性的. 但在转捩过程中, 迟早量得的信号会有质的变化. 例如早期实验中就发现检测所得信号中会出现 Spike, 或一种高频信号[9]. 对这种高频信号的本质有两种不同的解释, 见文献[10]. 不同的解释意味着通向湍流的途径不同. 从一个单频率的扰动波, 最终转变为宽频谱的湍流, 显然意味着自由度的增加. 哪些自由度先被激发, 哪些自由度后被激发, 决定了转捩的途径, 也就决定了理论研究应采取的模型不同.

将原来是无限自由度的连续介质力学问题转化为有限自由度动力系统问题来研究, 本来不是一个新的办法. 但如何转化才能确保本质的东西不被丢掉则是一个还未解决的问题. 过去用得较多的有两种办法, 一种是用 Galerkin 方法, 将由偏微分方程决定的问

题转化为由常微分方程组决定的问题. 但得到的方程, 没有保证能反映问题的本质. 例如著名的 Lorenz 方程, 数目的增加往往会改变问题的性质. 有可能是因为基函数选择得不好, 而如果能有适合于问题性质的基函数, 也许情况就会不一样. 一种可能的途径是选取线性稳定性理论的特征函数族, 因为甚至在充分发展的湍流中, 这种函数都还有可能反映流动的一些重要性质[11].

另一种将无限多自由度系统降为有限多自由度系统的方法是所谓的"中心流型简化"(central manifold reduction), 就是从线性化问题的中性解出发, 研究其非线性演化. 近年来更把此概念推广为"惯性流型简化"(inertial manifold reduction), 即从线性化问题的若干个不稳定模式出发, 研究其非线性演化. 但演化方程多半还是由弱非线性理论方法导出, 因而等于事先就决定了自由度数, 所被激发的只不过是高次谐波, 而且这些高次谐波还是和线性模的幅值成一定的比例关系的. 而从文献[5]的论述中可以看出, 这种演化方程未必能描述实际的运动. 因而在这个问题上, 还大有文章可做.

既然整个转捩过程的最终结果是湍流, 那么不了解最终状态是什么, 自然也不可能说整个转捩的机制是清楚了. 所以转捩问题的最终解决也许要和湍流问题的解决同步进行. 但是从实际情况看, 从很少自由度（2—3 个）, 到较多自由度(但仍是有限的)被激发, 如果被激发的确实是真实的运动, 而不是数学演算的结果, 那么离真正的湍流已经不远了. 对于工程技术问题, 也许已经可以以足够的精度预测转捩点或转捩临界参数了. 从这个角度看, 转捩问题的解决, 不一定要等到和湍流问题同步解决.

关键的问题是要考虑运动的哪些自由度是先被激发, 从而导致表观上无序运动的产生.

五、非平行性对稳定性的影响

许多实际的流动不是严格的平行流, 如边界层流, 自由剪切流等, 其特征尺度都是随流向而变的. 这一变化, 显然对扰动波的演化是有影响的. 例如边界层流线性问题在采用平行流假设时的理论临界雷诺数大于实验所得之值约 20%. 虽经不少人研究, 但结果并不理想. 因为他们所采用的办法都是在平行流理论的基础上摄动修正. 这是一个数学方法, 未必能完全反映物理本质, 有关文献可以在[12]中找到.

对于自由剪切流来说, 用流动稳定性线性理论可以给出扰动波速度分布的形状, 而且可以定性地说明一些扰动演化的重要性质. 但给出的扰动增长率可以比实验值高两个数量级. 即使采用了摄动法加以修正, 也仍与实测值相去甚远.

但是, 如果把层厚也作为一个未知的变量, 与扰动的演化同时考虑, 而不单纯看成是一个摄动问题, 情况就大不一样. 具体做法可参看[6]. 但[6]中的方法又有其不足之处, 如第三节中所述, 而且一些非线性因素也没有考虑. 最近周恒的研究生在这上面做了些改进, 结果比单用[6]中的方法好. 但也还存在一些第三节中的问题, 正在继续加以改进, 也许不久后可以发表一些结果. 这种把层厚的变化也看成是一个未知变量的概念是否可以借用到边界层的问题中来, 似乎还没有人尝试过.

非平行性对扰动演化的影响已引起了国际上的注意. 1993 年将在美国召开专门研

究这一问题的 IUTAM Symposium.

对于非平行流，特别是对边界层流，在考虑非线性影响时，还有一个问题目前还不知道其正确的答案. 暂时不考虑[5, 7]中对原来的弱非线性理论提出的意见，即使是将原来的弱非线性理论用于边界层流，由于非线性作用引起的平均流修正应该如何计算，是一个看起来不成问题的问题. 实际上，按通常的平行流假定的做法，平均流的二阶修正项 u_{20} 满足的将是如下的方程(以时间模式为例)

$$\frac{1}{R}\frac{d^2u_{20}}{dy^2}-2\omega_i u_{20}=v_1\frac{du_1}{dy} \tag{1}$$

其中 u_1，v_1 是基本波(T−S 波)的 x 及 y 向分量，边界条件为

$$y=0 \quad \text{及} \quad y\to\infty \quad \text{时，} u_{20}=0 \tag{2}$$

但按这一方程积分的结果，u_{20} 在 $y\to\infty$ 时是代数式衰减，这显然和实际不符. 目前有人建议不用(1)式而将(1)式左端写成 Blasius 方程那样，这样就相当于将非平行性考虑进来了，积分的结果当 $y\to\infty$ 时衰减得确实很快，至少与实际观察没有概念上的矛盾. 但这样一来，就破坏了原来弱非线性理论的自恰性(self consistency). 而且 Blasius 方程是以解自相似为前提的，若方程右端不为零，就破坏了自相似性. 所以将非平行性和非线性联合加以考虑，还是理论上的一个难题.

六、三维边界层的稳定性问题

三维边界层本身已是一个相当复杂的问题. 其稳定性问题就更难处理. 过去研究得较多的是旋转圆盘边界层的稳定性及无限长二维后掠翼边界层流的稳定性，实际上层流解虽是三维的，但却只依赖于两个坐标. 因此线性问题的解还可以写成行进波的形式. 真正的三维问题，即层流解依赖于三个坐标的，其扰动的演化已不能写成行进波形式，是否能化为一特征值问题求解，就是一个问题. 有关三维边界层的稳定性问题，在 Annual Review of Fluid Mechanics 1989 年的一期上，有一篇 H.L.Reed 和 W.Saric 写的综述性文章. 可惜本文作者还没有看到. 但可以肯定，三维边界层的稳定性问题，对工程技术问题来说是很重要的. 只是这方面的实验资料也非常少，要建立合理的理论不是容易的事.

七、扰动的激发问题

这里所谓的扰动激发问题，不是指的在实验室中如何引进扰动，而是指的边界层或自由剪切层外的扰动如何引发层内扰动的问题. 转捩是在层内完成的，不稳定性是指的层内(也包含层外的一部分，因为层厚是一个含糊的概念)的不稳定性. 但是扰动可以是由层外的扰动传入而引起的. 层外的扰动如何转化为层内的扰动波(如果层外扰动是周期性的话)，是近年来受到注意的另一个理论问题，通常称为 receptivity 问题.

这一问题已在文献[1, 2]中做了说明，这里只是强调一点，即边界层外的背景湍能如何激发边界层内的扰动是一个重要的然而是远未弄清的问题. 而边界层外的波，如声波

等，如何通过与前缘或物面的局部隆起相互作用而引起边界层内的 T-S 波，则在概念上讲，至少是不成问题的，虽然其具体计算并不是一个容易的事.

八、稳定性理论在充分发展的湍流中的应用

充分发展湍流中存在拟序结构(coherent structure)，已是大家公认的事实，在自由剪切流中尤为明显. 人们发现通过对拟序结构的控制来影响湍流，是一种有效的途径. 拟序结构产生的原因或机制，自然成了人们感兴趣的问题.

自由剪切流的起始发展阶段，其中产生的拟序结构实际上相当有规则，也称大涡结构，在文[6]中已经做了比较充分的说明. 在说明其产生的机制中，如前所述，稳定性理论起着很好的作用. 到了更下游之处，流动已经成为湍流了，仍能检测到相应的拟序结构，但已不如起始段那样规则. 究竟这是上游产生的结构的遗迹，还是在下游重新产生的则不清楚. 也可能两者都起作用.

对于边界层，拟序结构不如自由剪切层那样规则，对其产生的机制，也远不如自由剪切层那样清楚. 最近发表的一篇文章[13]表明，上游连接一弯曲段的平板边界层，远在其平均速度剖面已相当于平板湍流边界层速度剖面的下游，仍能检测到弯曲段形成的 Gortler 涡的遗迹. 至于平板边界层底层的猝发现象及外区的较弱的大涡，则似乎有其自己生成的机制. 过去对底层的涡结构的形成，有很多解释，如涡丝的拉伸及倾斜等等，但是真正从动力学观点来计算的，似乎除了数值模拟外，只有从稳定性理论出发来做的[14, 15]. 但它们都有重要的缺点，即用湍流平均速度剖面作为基本流，且均用了准层流模型. 实际上，如果湍能的主要来源是底层的猝发，则在猝发前的剖面应该是一种准层流剖面. 也许用重整化后的层流剖面来作为底层的速度剖面更为合理. 无论如何，用稳定性理论来研究湍流边界层中的拟序结构，似乎是一个可能的途径. 对于外区的较弱的大涡结构，其存在是由实验证实了的，例如文献[16]. 至于其产生的原因，也有可能是某种失稳机制. 但这时显然必须考虑湍流中小涡产生的雷诺应力，而不能用简单的准层流模型. 文[17]中做了一点尝试，其中最大的问题是涡粘系数应根据什么来确定.

用动力系统理论来研究湍流，是目前国际上的另一个热门课题. 美国的 Lumley 及 Sirowich 等选择了一组基函数，使得能以不太多的项，就能包含湍流的大部分能量. 但是他们所用的基函数要依赖于数值模拟的结果，按本质来讲，似乎只是数据的一种整理方式. 如果真要得到有意义的结果，基函数不应依赖于数值模拟的结果. 如第四节中所述，稳定性理论给出的特征函数族，也许可以成为一组独立的基函数. 在[11]中，Hartke 等人在将直接相互作用近似法(direct interaction approximation)及不稳定增长率谱解法(growth instability spectrum solution)用于求槽道湍流的一些整体湍流性质时，就应用了重整化后的层流速度剖面的 O-S 方程解来求湍能生成项，取得了一定的成功. 总之，稳定性理论在充分发展湍流的研究中，也可以起到一定的作用.

九、当前我国在此领域存在的问题

流动稳定性与转捩的研究，基本上属于基础研究，直接能在工程技术上应用的结果

还不多. 但这并不等于不可能被应用. 因此应该寻找能和工程技术应用的结合点. 减阻技术就是一个可能的领域.

在我国开展这方面的研究, 目前主要不足之处是没有自己系统的实验研究, 以及没有自己的数值模拟研究. 因此理论研究既缺乏第一手资料, 也缺乏验证所需的可靠数据. 这既妨碍了新思想、新模型的提出, 也无法证实已提出的理论模型和方法, 是否反映了问题的本质. 因此希望国内有人能尽快开展系统的实验研究和从事数值模拟的研究.

本文重点是介绍平行流的稳定性及转捩问题中存在的问题, 其它形式的流动一概没有涉及. 特再提请读者注意这一局限性. 但牵涉到的某些理论或方法, 则不仅限于平行流.

参考文献

[1] 周恒, 流动稳定性问题, 力学与实践, **10**(1988), 1–6.

[2] Morkovin, M.V., Recent insights into instability and transition to turbulence in open–flow system, NASA Contractor Report 181693, ICASE Report 88–44 (1988).

[3] Herbert, Th., Secondary instability of boundary layers, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 20(1988), 487–526.

[4] Bayly, B.J., Orszag, S.A. & Herbert, Th., Instability mechanism in shear–flow transition, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 20(1988), 359–391.

[5] 周恒, 流动稳定性弱非线性理论中幅值方程的一个必要修正, 科学通报, **35**(1990), 1228–1230.

[6] Liu, J.T.C., Contribution to the understanding of large scale coherent structures in developing free turbulent shear flows, *Adv. in Appl. Mech.*, **26**(1988), 184–309.

[7] 周恒, 流动稳定性弱非线性理论的重新考虑, 应用数学和力学, **12**, 3(1991).

[8] 周恒, 流动稳定性理论中空间模式不稳定波能量方程中的一个问题, 力学学报, **23**, 1(1991), 116–118.

[9] Klebanoff, P.S., Tidstrom, D.K. & Sargent, L.M., The three dimensional nature of boundary layer instability, *J.F.M.*, **12**(1962), 1–34.

[10] Kachanov, Yu. S., On the resonant nature of the breakdown of a laminar boundary layer, *J.F.M.*, **184**(1987), 43–74.

[11] Canuto, V.M., Hartke, G.J., Battaglia, A., Chasnov, J. & Albrecht, G.F., Theoretical study of turbulent channel flow bulk properties, pressure fluctuations and propagation of electromagnetic waves, *J.F.M.*, **211**(1990), 1, 35.

[12] 于秀阳, 周恒, 平板边界层流的非平行性对流动稳定性的影响, 力学学报, **18**(1986), 297–305.

[13] Alving, A.E., Smits, A.J. & Watmuff, J.H., Turbulent boundary layer relaxation from convex curvature, *J.F.M.*, **211**(1990), 529–556.

[14] Jang, P.S., Benney, D.J. & Gran, R.L., On the origin of streamwise vortices in a turbulent boundary layer, *J.F.M.*, **169**(1986), 109–123.

[15] 周恒, 平板湍流边界层底层的不稳定波, 力学学报, **20**(1988), 481–488.

[16] Antonia, R.A., Bisset, D.K. & Browne, L.W.B., Effect of Renolds number on the topology of the organized motion in a turbulent boundary layer, *J.F.M.*, **213**(1990), 267–286.

[17] Wu, X. & Zhou, H., Linear instability of turbulent boundary layer as a mechanism for the generation of large scale coherent structures, *Chinese Science Bulletin*, 34(1989), 1685–1688.

HYDRODYNAMIC STABILITY AND TRANSITION

Zhou Heng

(Dept. of Mech., Tianjin University)

Abstract The main purpose of this paper was not to give a review on the achievements obtained so far on the theory of hydrodynamic stability and transition. Rather, stresses were put on the problems remain unsolved and the weaknesses of the existing theories, which the present writer thought might be key issues for its further developments.

Key words hydrodynamic stability, transition, secondary instability, resonance

分叉、分形、混沌和湍流之间的关系

黄 永 念

(北京大学力学系)

提要 本文综述了近年来用分叉和混沌的观点来研究流体湍流的发生与发展的现象所取得的某些进展. 重点介绍以下三方面的研究成果:

1. 用分叉、分形和混沌的概念来解释流体在流动时发生转捩现象的各种可能的机制.

2. 用奇怪吸引子和分形的概念来解释湍流运动的不规则性和无序性. 揭示湍流运动是流体流动时内在随机性的表现.

3. 用拉格朗日观点来研究流体质点运动时轨迹的特性, 探讨在物理空间内的混沌运动与湍流的密切关系.

关键词 分叉, 奇怪吸引子, 分形, 拉格朗日湍流

一、引 言

众所周知, 在流体力学中一百多年来对湍流运动规律的研究一直没有取得根本性的突破. 它至今仍是物理学领域内最为困难的一个基础理论问题. 但由于它具有广泛而重要的应用价值, 从物理学的观点来看, 它又是自然界所有非线性现象的一个典型代表, 世界各国的科学家都很重视对它的研究工作. 特别是近二十年来, 作为一门新兴学科的

非线性科学的领域内已经取得了几项突破性的进展. 如孤立子和拟序结构的发现, 确定性系统中奇怪吸引子和分形物体的发现等. 这些进展极大地推动了湍流研究工作的开展. 科学家们逐渐认识到对分叉、分形和混沌现象的研究最终将有助于了解湍流运动的本质及其产生的根源[1]. 1983 年瑞典诺贝尔奖金学术委员会和美国科学、工程和公共政策委员会都对湍流和混沌现象的研究之间的关系作过深入细致的探讨并广泛征求过意见, 给出了比较乐观的估计[2]. 近年来在世界各地陆续成立起来的非线性研究中心和湍流研究中心, 都把分叉、混沌和湍流的研究列为主要研究的课题之一.

当前, 对混沌和湍流的概念存在着很多不同的理解和解释. 为清楚起见, 我们采用大多数人倾向的看法. 混沌是一种低自由度系统的混乱的运动状态. 它可以包括时间混沌、空间混沌和时-空混沌几种不同的情况. 湍流则是特定对于流体(一种高自由度系统)的一种流动状态. 它不仅对时间的演变是无序的, 而且在空间位置的分布上也是不规则的. 湍流与时-空混沌关系最为密切, 混沌可以认为是湍流的前兆.

在我们开始讨论问题时, 首先要对所讨论的系统进行分析. 根据系统本身的特性可将系统分为两大类: 耗散系统和保守系统. 这是根据系统在相空间内的相体积在时间演变过程中是否收缩的特征来区分的. 耗散系统的相体积收缩到零. 这种系统存在有吸引子, 相空间内所有运动轨道最终都要被吸引到这种吸引子上. 保守系统的相体积始终保持不变. 这种系统不存在吸引子, 任何运动轨道不被吸引. 这种系统只存在椭圆和双曲两类奇点. 显然这两类系统的运动特性有本质的区别.

其次对所讨论的问题也可以分成两大类. 一类是分析一个非线性动力系统的物理量如何随时间的长期演变而发生变化的规律. 另一类是分析这些物理量的变化又是如何随该动力系统的控制参数的变化而发生质的变化的规律. 前一类问题主要涉及奇怪吸引子和分形理论, 与充分发展的湍流运动有关, 后一类问题主要涉及分叉与突变理论, 与流动的转捩问题有关. 下面, 我们首先讨论分叉问题, 然后再讨论分形与混沌问题.

二、分叉与转捩现象之间的关系

多少年来, 流体动力学的稳定性问题所取得的主要进展大都是局部的由线性稳定性理论得到的. 显然, 要了解整个转捩过程的变化规律, 人们更关心的是非线性稳定性问题. 分叉理论就是为了解决非线性问题发展起来的. 人们通过分析认识到在非线性动力系统中, 运动状态可以通过系统的控制参数的变化产生各种分叉现象而发生质的变化. 这些分叉现象是系统内部固有的一种特性. 可以认为系统的原有状态在控制参数达到某个临界值时发生失稳而造成的. 在流体力学中层流和湍流显然是性质完全不同的两种流动状态. 湍流是层流通过失稳后形成的. 因此, 从本质上讲湍流就是流动通过各种分叉现象产生的.

要具体定量地研究这类问题, 首先要选定一个坐标空间. 通常选用未知的物理量作为坐标变量, 由此构成相空间. 如果选定系统的控制参数作为坐标变量, 则构成参数空间. 如果要考虑系统的运动状态随控制参数变化的关系, 则选定物理量和控制参数共同组成坐标变量构成状态空间.

目前所发现的最常见的分叉现象有以下几种. 这里绝大部分情况把分叉点选在控制参数 $\mu=0$ 处.

(1) 叉形分叉或对称鞍结点分叉

典型的微分方程和差分方程分别为

$$\frac{dx}{dt}=\mu x-x^3 \quad \text{和} \quad x_{n+1}=(\mu+1)x_n-x_n^3$$

当 $\mu<0$ 时, 原点是吸引子. 当 $\mu>0$ 时, 原点失稳变为排斥子, 同时产生一对吸引子 $x=\pm\sqrt{\mu}$.

(2) 切分叉或鞍结点分叉

典型的微分方程和差分方程分别为

$$\frac{dx}{dt}=\mu-x^2 \quad \text{和} \quad x_{n+1}=\mu+x_n-x_n^2$$

当 $\mu<0$ 时, 系统不存在任何吸引子. 当 $\mu>0$ 时, 存在一个吸引子 $x=\sqrt{\mu}$ 和一个排斥子 $x=-\sqrt{\mu}$.

(3) 跨临界分叉

典型的微分方程和差分方程分别为

$$\frac{dx}{dt}=\mu x-x^2 \quad \text{和} \quad x_{n+1}=(\mu+1)x_n-x_n^2$$

当 $\mu<0$ 时, 原点是吸引子, $x=\mu$ 是排斥子. 当 $\mu>0$ 时, 原点失稳变为排斥子, 而 $x=\mu$ 则转变为吸引子. 这是一种交换稳定性的情况.

(4) 滞后分叉

典型的微分方程和差分方程分别为

$$\frac{dx}{dt}=\mu+\nu x-x^3 \quad \text{和} \quad x_{n+1}=\mu+(\nu+1)x_n-x_n^3$$

其中 ν 称为"开折"参数. 当 $\nu\leqslant 0$ 时, 系统不会出现任何分叉现象. 它只有一个吸引子. 当 $\nu>0$ 时, 系统出现正反两个鞍结点分叉. 此时在 $\mu=0$ 附近, 系统有两个吸引子和一个排斥子.

(5) Hopf 分叉

典型的微分方程和差分方程分别为

$$\frac{dz}{dt}=cz-z|z|^2 \qquad (z,\ c\text{均为复数})$$

和
$$\begin{cases} x_{n+1}=y_n \\ y_{n+1}=ay_n(1-x_n) \end{cases}$$

前一个系统在 $Re c<0$ 时原点是吸引子, 在 $Re c>0$ 时原点失稳变为排斥子, 而半径为 $\sqrt{\mu}$ 的圆是吸引子. 后一个系统在 $a=2$ 处发生 Hopf 分叉. 这种分叉至少在二维情况中才能发生.

(6) 周期倍分叉

典型的微分方程和差分方程有 Rössler 方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = -y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 0.2y \\ \dfrac{dz}{dt} = 0.2 + z(x - \mu)\end{cases}$$

和一维 Logistic 映射 $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$. 前一个系统在 $\mu = 2.6$ 至 4.2 时发生周期倍分叉，后一个系统在 $\lambda = 3$ 至 3.57 时发生周期倍分叉. 这种分叉在连续系统中至少要在三维情况中才能发生.

(7) 同宿或异宿分叉

要发生这种分叉现象的系统必须存在有双曲不动点 **P**. 它必定具有至少一个稳定流形 $W^s(\mathbf{P})$ 和一个不稳定流形 $W^u(\mathbf{P})$. 它们分别定义为:

对离散系统 $\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n)$,

$$W^s(\mathbf{P}) = \left\{ 所有\mathbf{x}_0 \in R^N,\ 使得\mathbf{x}_n \to \mathbf{P},\ 当 n \to \infty \right\}$$

$$W^u(\mathbf{P}) = \left\{ 所有\mathbf{x}_0 \in R^N,\ 使得\mathbf{x}_n \to \mathbf{P},\ 当 n \to \infty \right\}$$

对连续系统 $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x})$, 解 $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}_0, t)$ 称为流,

$$W^s(\mathbf{P}) = \left\{ 所有\mathbf{x}_0 \in R^N,\ 使得\Phi_n \to \mathbf{P},\ 当 t \to \infty \right\}$$

$$W^u(\mathbf{P}) = \left\{ 所有\mathbf{x}_0 \in R^N,\ 使得\Phi_n \to \mathbf{P},\ 当 t \to -\infty \right\}$$

如果 **P** 点的稳定流形与它本身的不稳定流形相交，则出现同宿分叉. 它们的交点称为同宿点. 它是出现局部混沌的一个标志. 如果 **P** 点的稳定流形 $W^s(\mathbf{P})$ 和另一双曲不动点 **Q** 的不稳定流形 $W^u(\mathbf{Q})$ 相交，则出现异宿分叉. 它们的交点称为异宿点. 它是出现大范围混沌的一个标志. 典型的例子有二维 Hénon 映射:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + by_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

当 $b = 0.3$ 时，同宿分叉出现在 $a \approx 1.15$ 处，异宿分叉出现在 $a \approx 1.427$ 处.

前面已经提到，在耗散系统中可以存在各种吸引子. 上面列举的各种分叉现象就是从一种吸引子变为另一种吸引子的现象. 最常见的吸引子有: 固定点(定态解), 极限圆(周期解), 极限环(准周期解)和奇怪吸引子(混沌解). 在流体力学中，与固定点对应的是定常层流状态，与极限圆和极限环对应的是各种类型的波或涡. 奇怪吸引子则对应不定常的湍流状态.

根据以上的分叉现象的分析，产生混沌状态的途径主要有以下几种:

(1) 周期倍分叉途径，亦称 Feigenbaum 途径

这条途径是一种规则的运动状态通过周期不断加倍的倍分叉方式逐步过渡到混沌运

动状态. 值得注意的是这种周期倍分叉现象与流体运动中出现的频率减半或涡旋卷并现象密切相关.

(2) Hopf 分叉途径，亦称 Ruelle-Takens 途径

这条途径是一种规则的运动状态最多经过三次 Hopf 分叉就能转变为混沌运动状态. 具体地说，一个定态运动(固定点)经过周期运动(极限圆)和准周期运动(极限环)的中间过程后转变为混沌运动. 这种 Hopf 分叉现象与流体的慢过渡转捩现象关系最为密切.

(3) 间歇(阵发)混沌途径，亦称 Pomeau-Manneville 途径

这条途径是从一种规则的运动状态通过时而规则时而混乱的间歇状态转变为混沌运动状态. 它可以包括三种不同的类型.

第一类间歇性与逆切分叉现象有关.

第二类间歇性与 Hopf 分叉现象有关.

第三类间歇性则与亚临界滞后分叉现象有关.

应该指出，除了以上这些通往混沌的途径以外，人们正在寻找其它可能的途径. 目前已发现一些新的分叉现象和通往混沌的新途径. 例如，在 Lorenz 方程中还发现一种通过产生一对不稳定极限圆而形成奇怪吸引子的分叉现象. 又如前面我们讨论的分叉现象都是对常微分方程组或差分方程组的解来分析的. 实际问题中有很多非线性系统是由偏微分方程(组)决定的. 偏微分方程(组)的解会发生什么样的分叉现象目前还很不清楚，也没有明确的分类. 诸如均匀解、行波解、相似性解或低维解等不同类型的解是怎样互相转化的就是当前值得重点研究的一个课题. 例如，有人已发现作为行波解的一种特殊形式的孤立子可以通过局部坍塌而产生混沌. 事实上人们已经发现孤立波解正是同宿环刚形成时的临界状态. 又如圆管流动的转捩过程中我们发现了一种角向失稳机制，从平滑的直线平行流动转变为螺旋流或螺旋波的流动. 此外，还发现流动中存在有一种涡管的局部断裂和重联过程. 这些现象都还有待于进一步的深入研究.

三、混沌、分形与湍流之间的关系

长期以来，湍流的瞬时流场结构一直是人们特别关注的一个问题. 大尺度相干(拟序)结构的研究和近年来日益重视的具有普适意义的小尺度耗散结构的研究就是很好的说明. 事实上，在混沌理论中占有重要地位的奇怪吸引子和分形等新概念就是在研究湍流的特性中提出的. 前面已提到，耗散系统的一个基本特征是相空间内的相体积要随时间的演变缩小到零. 相空间内所有运动轨道最终被吸引到一个维数比较低的点集上. 这种吸引点集被称为吸引子. 系统中的运动轨道处于一种不规则的非周期的混沌运动状态就是由于某种具有奇特结构的奇怪吸引子作用的结果. 简单地说，奇怪吸引子就是在相空间(对连续的动力系统至少是三维，对离散动力系统至少是二维)的一个有界区域内，由无穷多个不稳定点集组成的一个集合体. 严格地讲，它实际上是由系统中存在的无穷多个双曲不动点(包括周期轨道)的所有不稳定流形的闭包组成. 即由所有不稳定流形的总和及它们的邻域组成. 这里要求不稳定流形能构成一个闭环. 这个点集吸引所有在它附近而不属于它的运动轨道. 并且作为一个整体，由其中任何一点出发的运动轨道，只

要时间充分大，总能无限接近这个奇怪吸引子的所有其它点. 奇怪吸引子有以下几个重要特征:

1. 对初始条件有非常敏感的依赖性. 在初始时刻从这个奇怪吸引子上任何两个非常接近的点出发的两条运动轨道，最终必然会以指数的形式相互分离. 定量地讲，如果用下式定义的 Lyapunov 特征指数来描述

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\frac{l_i(t)}{l_i(0)} \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

这里 $l_i(0)$ 和 $l_i(t)$ 分别是初始时刻和时刻 t 经过初始相邻近的二点的运动轨道沿第 i 个特征方向之间的距离. n 是相空间维数，则奇怪吸引子的 Lyapunov 特征指数至少有一个要大于零. 而且由于它是吸引子，它也必然有小于零的 Lyapunov 特征指数.

2. 它的功率谱是一个宽谱. 此时系统中已被激发出无穷多个特征频率.

3. 系统中存在有马蹄. 这是一个数学概念. 直观地说，系统在运动过程中存在有拉伸和折叠现象. 因为马蹄的存在意味着双曲不动点的存在，也意味着不稳定流形的存在.

4. 它具有非常奇特的拓扑结构和几何形式. 它是具有无穷多层次自相似结构的维数是非整数的一个集合体. 一般说来，它在某些维数方向上是连续的，而在另外的维数方向上则是具有类似康托集那样的结构. 这也可以用上面给出的不稳定流形的闭包概念来解释. 因为各种不同周期的不稳定周期轨道的不稳定流形具有自相似性. 沿着不稳定流形的方向是连续且具有指数发散性. 垂直不稳定流形的方向上存在类似康托集那样的结构.

为了描述奇怪吸引子的这种奇特的结构，Mandelbrot 引进了分形（即其维数是非整数的对象）的概念. 分形物体没有特征长度，但却具有自相似性. 分形物体维数的计算有很多不同的方法. 最简单的是相似性维数 D_0 的计算. 考虑 n 维相空间内的一个奇怪吸引子，$\{x_i\}_{i=1}^{N}$ 是它的一组点集.（N 非常大，但有限.)用边长为 b 的 n 维小单元体(例如 n 维小立方体)全部复盖住这个点集，所需最少的数目为 N. 则

$$D_0 = \lim_{b\to 0}\frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{b}\right)}$$

在实际问题中，通常是计算相关维数 D_2. 因为我们在具体实验中，往往只测得一个物理量随时间变化的一组数据 $\{x_i\}_{i=1}^{N}$. 具体的办法是利用时间延滞的方法. 首先引进一个可以完整刻划奇怪吸引子的嵌入空间. 它的坐标是由一组时间延迟序列 x_i, $x_{i+1}, \cdots x_{i+d-1}$ (连续的 d 个实验数据)组成. 然后从数据集中选取 N 个不同时刻开始的值作为 d 维嵌入空间的 N 个点，

$$\vec{x}_1:\ x(t_1), x(t_1+\tau), \cdots x(t_1+d\tau-\tau)$$

$$\vec{x}_2:\ x(t_2), x(t_2+\tau), \cdots x(t_2+d\tau-\tau)$$

……

$$\vec{x}_N:\ x(t_N), x(t_N+\tau), \cdots x(t_N+d\tau-\tau)$$