307

T315
B37

哈尔滨工业大学研究成果专著出版基金资助出版

机械工程中的几何反算与激光服装裁剪机器人

鲍青山　编著

A1011293

哈尔滨工业大学出版社
哈尔滨

内容提要

本书包括微分几何及计算几何基础知识、求工具形态和求相对运动两类机械工程反算问题及其对应几何模型、典型工程反算问题应用实例和服装裁剪机器人四部分内容。

本书可供机械、服装设计制造及其自动化方面的研究生和研究人员、工程技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

机械工程中的几何反算与激光服装裁剪机器人/鲍青山编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2000.11

ISBN 7-5603-1597-6

Ⅰ.机... Ⅱ.鲍... Ⅲ.① 几何-应用-机械工程 ②反算法-应用-工程机械 ③服装量裁-机器人技术 Ⅳ.TB115

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 56525 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　　真 0451—6414749
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 850×1168　1/32　印张 8　字数 203 千字
版　　次 2000 年 11 月第 1 版　2000 年 11 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 7-5603-1597-6/TH·90
印　　数 1～1 000
定　　价 12.00 元

序

一般工程问题往往是先进行设计，然后再提出实施方案，机械工程问题也不例外，总是先给出理想产品形态，后再寻求实现理想形态的工具形态和工具与产品的相对运动(设备)，从几何上看，将工具廓面相对产品的运动产生的曲面族包络当为理想产品的廓面，因而机械工程的基本问题之一表现为包络的反算问题，即已知包络——产品的理想廓面，而要求出形成此廓面的最佳工具形态与相对运动，因此机械工程中的几何反算是国际上公认的“瓶颈技术”。

作者是一位博士，他在这一“瓶颈技术”方面不但做过不少深入研究，并汇集了诸多他人成果，撰写出这本著作。而迄今为止尚未见到工程反算方面的专门著作，因而本书的出版必将为同类研究提供有价值的参考。另外值得一提的是，书中介绍了多项有较大经济价值的工程实例，充分说明了这种研究具有很好的社会效益和经济效益。

本书中收入了作者在激光服装裁剪机器人方面的工作，也可以说这是几何反算的一个重要工程实例，同时还表明仅有工程反算这一“瓶颈技术”还不够，还需更多技术的综合才会有更大创新。作者的这种安排确有独到之处，既强调了工程反算的重要，又指出了其他技术的重要。

特写几句，致以新贺！

吴　林

前　言

在作者多年的科学研究中，经常遇到工程几何的反算问题。工程反算是国际上公认的“瓶颈技术”，而迄今未见这方面的专门著作，在现有文献中，至多列为一节，很难反映这种研究的全貌，故写本这方面的小书的思想就自然生成。经努力现终于成书，在问世之际，特将本书各章安排及其意义简介如次。

为了使读者能方便读通本书所涉内容，首先简介了本书涉及到的工程几何常识，主要是微分几何常识和一点计算几何常识。

由于机械工程中的几何反算问题主要表现为求工具和求相对运动两大类反问题，因此本书第二、第三章分别介绍了求解这两类反问题的思想及其对应的几何模型，同时还介绍了相关应用时应当注意的问题，以使读者有些工程几何反算问题与相应几何模型对应关系方面的积累。

事实上一个工程几何反算问题，并不一定属于上述两类中的一类，有时要用到两类，甚至反复使用，为此在第四章中精选了几个工程实例，借以表述如何运用几何反算技术，化工程难题为几何模型，以便借助计算机实施制造方案的最佳选择。显然，这种安排将对提高读者化工程反算问题为几何模型的能力起到诱导启发作用。

本书的第五～八章是一个较大的专题，也是用到上述两类反问题求解技术的一个工程实例，但本书选择这一典型实例的目的固然包含几何反算的重要工程价值论证，同时还想借此表明，工程反算很重要，但只有多项技术，尤其高技术的综合才可有更高价值的创新成果。

在成书过程中，得到唐余勇、潘沛霖、汪云涛三位老师的帮助，特别是博士生导师吴林教授在百忙之中亲自为本书作序，在此仅向他们表示衷心的感谢！鉴于作者的知识和水平所限，加上科研任务繁重，时间匆匆，疏漏恐是难免，尤盼读者批评指正。

作　者

1999 年 10 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第一章 几 何 基 础

本章着重介绍工程中常用的而又属于基础性质的几何知识。本章属简介性质，其目的是想让未学过微分几何、计算几何的读者能读懂本书全部内容和相关文献；对已有这方面基础的读者，也可为其提供引用时的方便。

1.1 矢量简述

本书出现的数均为实数，常用具体的数和小写字母表示。对既有长度、又有方向的矢量则用粗体小写字母或两大写字母上加带箭头的横线表示。长度为零的矢量称为零矢，用粗体的“**0**”表示。长度为 1 的单位矢量称之为幺矢。

本书除偶尔用到极坐标系外，绝大多数采用右手直角坐标系，如 $\sigma=[O;x,y,z]$。矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 在坐标系 σ 下的下述表达式为

$$\boldsymbol{r}_i=\{x_i,y_i,z_i\}=x_i\boldsymbol{i}+y_i\boldsymbol{j}+z_i\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

式中 x_i,y_i,z_i 依次代表矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 对各坐标轴的射影，或称之为矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 在各坐标轴上的分量，而 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 依次为坐标系 σ 的坐标轴 x,y,z 上的正向幺矢。

矢量的长度，又称为它的模。如式(1.1)所示矢量的模用 $|\boldsymbol{r}_i|$ 表示，并且有

$$|\boldsymbol{r}_i|=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}$$

1.1.1 基本运算

对于式(1.1)矢量，我们有下列基本运算。

(1) 加、减运算

$$\boldsymbol{r}_1 \pm \boldsymbol{r}_2 = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}$$

当然也可用三角形法则或平行四边形法则,但用得较少。

(2) 数乘运算

$$\lambda \boldsymbol{r}_i = \{\lambda x_i, \lambda y_i, \lambda z_i\}$$

(3)点乘运算(又称数量积运算)

$$\boldsymbol{r}_1 . \boldsymbol{r}_2 = |\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2| \cos < \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 >$$

式中$< \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 >$表示$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$两矢量正向之间较小的夹角,即满足

$$0 \leqslant < \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 > \leqslant \pi$$

不难推得对应的坐标表达式为

$$\boldsymbol{r}_1 . \boldsymbol{r}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

(4)叉乘运算(又称矢量积运算)

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = |\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2| \sin < \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 > \boldsymbol{e}$$

式中$\boldsymbol{e}$为垂直于$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$两矢量的幺矢,并且$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{e})$构成右手系。若用分量表示,则有

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

(5)混合积运算

混合积是指两矢量先叉乘,后点乘第三个矢量的一种运算,一般记成$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$,其意义为

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) . \boldsymbol{r}_3$$

若用分量表示,就有

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

(6)二重矢积运算

二重矢积实际上是连续叉乘的运算,可以推出相应计算公式为

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{r}_1.\boldsymbol{r}_3)-\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{r}_2.\ \boldsymbol{r}_3)$$

与上式对应的分量表达形式则较为复杂，为

$$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{r}_3=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

1.1.2 重要结论

对于矢量代数，下述结论是经常用到的。

(1) 若 $\boldsymbol{r}_i\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{r}_i$的方向幺矢为$\boldsymbol{r}_i/|\boldsymbol{r}_i|$。

(2)$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2\Leftrightarrow x_1=x_2, y_1=y_2, z_1=z_2$，三式同时成立等价于两矢量 $\boldsymbol{r}_1$和 $\boldsymbol{r}_2$ 长度和方向均相同。

(3) $\boldsymbol{r}_i.\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2=|\boldsymbol{r}_i|^2 \qquad \boldsymbol{i}.\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1$

(4)$\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}.\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}.\boldsymbol{i}=0 \qquad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$

(5)$\boldsymbol{r}_1\perp\boldsymbol{r}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{r}_1.\ \boldsymbol{r}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

(6)$\boldsymbol{r}_1/\!/\boldsymbol{r}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\lambda\boldsymbol{r}_1+\mu\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{0}$，$\lambda, \mu$ 为不同时为 0 的实数。

(7) $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ 三矢量共面$\Leftrightarrow(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)=0\Leftrightarrow\lambda\boldsymbol{r}_1+\mu\boldsymbol{r}_2+\nu\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}$，$\lambda, \mu, \nu$ 为不同时为 0 的实数。

1.1.3 注意事项

本段主要指出矢量运算中容易发生谬误的地方，因此尤望读者注意。

对于矢量的加减运算、数乘运算可以像初等数学中的数运算那样进行，并满足相应运算法则，只是需要注意矢量与数量的区别，而这是很容易做到的。

至于数量积，即点乘运算，只要注意对于$(\boldsymbol{r}_1.\boldsymbol{r}_2).\boldsymbol{r}_3$，由于前

两个矢量 $\boldsymbol{r}_1$和 $\boldsymbol{r}_2$的点乘积所得到的数再和矢量 $\boldsymbol{r}_3$点乘是没有意义的,也就可以知道点乘运算不会遇到结合律的问题,其他也可按初等数学中的数那样运算。

最值得注意的是含有叉乘的运算,它和初等数学中的不大相同,显然交换律就不成立

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = -\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_1$$

尤其不要用错下列结果:

(1) $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) . \boldsymbol{r}_3 = -(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_1) . \boldsymbol{r}_3$

(2) $(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{r}_1 . \boldsymbol{r}_3) - \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{r}_2 . \boldsymbol{r}_3)$

$\boldsymbol{r}_1 \times (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3) = \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{r}_1 . \boldsymbol{r}_3) - \boldsymbol{r}_3(\boldsymbol{r}_1 . \boldsymbol{r}_2)$

上述后两式右端中前一项完全相同,而后一项由于 $\boldsymbol{r}_1$与 $\boldsymbol{r}_3$ 两矢量的方向一般并不相同,故一般也就不相等。

由此可见:

1) 混合积只满足结合律,不满足交换律。当然这个结合律仍是先叉乘,后点乘意义下的结合律;

2) 二重矢积既不满足交换律,又不满足结合律;

3) 乘法对加法的分配律是成立的,且有

$$(\boldsymbol{r}_1 \pm \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3 \pm \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3$$

$$\boldsymbol{r}_1 \times (\boldsymbol{r}_2 \pm \boldsymbol{r}_3) = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 \pm \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3$$

对点乘则还可以交换

$$(\boldsymbol{r}_1 \pm \boldsymbol{r}_2) . \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 . \boldsymbol{r}_3 \pm \boldsymbol{r}_2 . \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_3 . (\boldsymbol{r}_1 \pm \boldsymbol{r}_2)$$

1.1.4 矢函数

给定矢函数(又称变矢)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad t \in [t_1, t_2]$$

即对$[t_1, t_2]$中每一个 t 值,均有确定的一个矢量 $\boldsymbol{r}$ 与之对应。

若用分量表示就有

$$\boldsymbol{r}_{(}t) = \{x(t), y(t), z(t)\} = \boldsymbol{i}x(t) + \boldsymbol{j}y(t) + \boldsymbol{k}z(t)$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

显然,它的分量表达式

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

就是该矢函数所确定的曲线的参数方程,而每一分量表达式都是数学分析中所讨论的函数。因而可以与数学分析相类似地引入矢函数的极限、连续、导数、微分、不定积分和定积分等概念,在此仅将有关的常用结论、值得注意的问题以及经常用到的几种特殊矢函数依次简介如下。

1.1.5 几个结论

对应于前段所介绍的概念,均有相应的分量表示形式和与数学分析中相似的结论,如

(1)若

$$\boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} \qquad \boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$$

那么就有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 \Leftrightarrow \lim_{t\to t_0}x(t) = x_0, \lim_{t\to t_0}y(t) = y_0, \lim_{t\to t_0}z(t) = z_0$$

同时成立。

(2)$\boldsymbol{r}'(t) = \{x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\}$

(3)$\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t$

(4)若 $\boldsymbol{R}'(t) = \boldsymbol{r}(t)$, 则

$$\int \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{R}_0$$

式中 $\boldsymbol{R}_0$ 为任意常矢量。

(5) $\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{i}\int_a^b x(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{j}\int_a^b y(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{k}\int_a^b z(t)\mathrm{d}t$

1.1.6 注意事项

一般的数学分析内容也可以引入到矢量分析,而且大同小异。本段旨在强调矢量分析的特殊点,即不能照搬的两个问题。

(1) 台劳展开的余项问题

考察

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t+\Delta t) = \boldsymbol{i}x(t+\Delta t)+\boldsymbol{j}y(t+\Delta t)+\boldsymbol{k}z(t+\Delta t) = \\
&\boldsymbol{i}(x(t)+x'(t)\Delta t+(\frac{1}{2!})x''(t)\Delta t^2+\cdots+ \\
&\frac{1}{(n-1)!}x^{(n-1)}(t)\Delta t^{n-1}+\frac{1}{n!}x^{(n)}(\xi_1)\Delta t^n)+ \\
&\boldsymbol{j}(y(t)+y'(t)\Delta t+\frac{1}{2!}y''(t)\Delta t^2+\cdots+ \\
&\frac{1}{(n-1)!}y^{(n-1)}(t)\Delta t^{n-1}+\frac{1}{n!}y^{(n)}(\xi_2)\Delta t^n)+ \\
&\boldsymbol{k}(z(t)+z'(t)\Delta t+\frac{1}{2!}z''(t)\Delta t^2+\cdots+ \\
&\frac{1}{(n-1)!}z^{(n-1)}(t)\Delta t^{n-1}+\frac{1}{n!}z^{(n)}(\xi_3)\Delta t^n) = \\
&\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{r}'(t)\Delta t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}''(t)\Delta t^2+\cdots+ \\
&\frac{1}{(n-1)!}\boldsymbol{r}^{(n-1)}(t)\Delta t^{n-1}+\frac{1}{n!}\{x^{(n)}(\xi_1), \\
&y^{(n)}(\xi_2),\ z^{(n)}(\xi_3)\}\Delta t^n
\end{aligned}$$

虽然

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\in(t,t+\Delta t),$$

但一般并不相等,故下式不一定成立

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{r}'(t)\Delta t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}''(t)\Delta t^2+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(\xi)\Delta t^n \qquad \xi\in(t,t+\Delta t)$$

不过仍可写成

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{r}'(t)\Delta t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{r}''(t)\Delta t^2+\frac{1}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t)\Delta t^n+\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)^n$$

且 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{0}$,这种形式就与数学分析中的十分相似。

(2) 罗尔定理及其相关问题

罗尔定理对矢函数的各个分量来说,只要满足定理条件,那么自然成立,这是因为矢函数的分量表达式与数学分析中的函数毫无区别。但是如把罗尔定理用在矢函数整体上,却会造成谬误,请看下列例子

$$\boldsymbol{r} = \{\cos t, \sin t, 0\}$$

在 $t \in [0, 2\pi]$上显然形式上能满足罗尔定理的各个条件,即在$[0, 2\pi]$上连续、在$(0, 2\pi)$内可微,且 $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}(2\pi) = \{1, 0, 0\}$,但

$$|\boldsymbol{r}'| = |\{-\sin t, \cos t, 0\}| = 1 \neq 0$$

即根本不存在 $\xi \in (0, 2\pi)$,使得 $\boldsymbol{r}'(\xi) = \boldsymbol{0}$。请注意各分量表达式在$[0, 2\pi]$上运用罗尔定理所得的 ξ 值的情况:对于 $x'(\xi_1) = 0$,有 $\xi_1 = \pi/2, 3\pi/2$;对 $y'(\xi_2) = 0$,有 $\xi_2 = 0, \pi$;对 $z'(\xi_3) = 0$,有 ξ_3为$(0, 2\pi)$中任意值。综合可见,没有一个 ξ 值能使 $x'(\xi) = y'(\xi) = z'(\xi) = 0$ 同时成立,自然也就找不到 $\xi \in (0, 2\pi)$,使 $\boldsymbol{r}'(\xi) = \boldsymbol{0}$。

这样,与罗尔定理相关的理论在运用时都要注意到"只许用在分量上"这一原则。

1.1.7 特殊矢函数

本段介绍三种常用的特殊矢函数和有关结论。

(1) 定长变矢

对具有固定长度的变矢 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$

自然有 $\boldsymbol{r}^2 = |\boldsymbol{r}|^2 = c^2$

求导便得 $2\boldsymbol{r} . \boldsymbol{r}' = 0$,

于是有 $\boldsymbol{r} . \boldsymbol{r}' = 0$

因上述每步可逆,因此我们有结论为

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 为定长变矢$\Leftrightarrow \boldsymbol{r} . \boldsymbol{r}' = 0$

(2)定向变矢

对于具有固定方向的变矢,显然可用 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{e}$ 表示,且 $\boldsymbol{e}$ 为常幺矢。对上式求导并右叉乘上式便有

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}' = \lambda(t)\boldsymbol{e} \times \lambda'(t)\boldsymbol{e} = \lambda\lambda'\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} \qquad (1.2)$$

任何变矢均可表为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{e}(t) \qquad (1.3)$$

式中 $\boldsymbol{e}(t)$为幺变矢。若式(1.3)中 $\boldsymbol{r}(t) \neq \boldsymbol{0}$,则 $\lambda(t) \neq 0$,由形如式(1.3)的变矢满足式(1.2),我们有

$$\boldsymbol{0} = \lambda\boldsymbol{e} \times (\lambda'\boldsymbol{e} + \lambda\boldsymbol{e}') = \lambda\lambda'\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e} + \lambda^2\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}' = \lambda^2\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}'$$

于是可得

$$\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}' = \boldsymbol{0} \qquad (1.4)$$

而 $|\boldsymbol{e}(t)| = 1$,即 $\boldsymbol{e}(t)$ 为定长,故有

$$\boldsymbol{e} . \boldsymbol{e}' = 0 \qquad (1.5)$$

一个矢量若不为零则不可能既平行又同时垂直于另一非零矢量,因为 $|\boldsymbol{e}(t)| = 1 \neq 0$,故必有 $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{0}$。从而 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}(t)$ 为常幺矢,即满足式(1.2)的变矢方程式(1.3)在不为 0 时为定向变矢。综合上述分析我们有结论为

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \neq \boldsymbol{0}$ 为定向变矢$\Leftrightarrow \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{0}$

(3)平行于固定平面的变矢

若取固定平面的法矢为 $\boldsymbol{n}$,则此变矢 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 满足下式

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{r} = 0$$

求导、再求导依次有

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}' = 0 \qquad \boldsymbol{n}\boldsymbol{r}'' = 0$$

由上述三式易见,$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$,$\boldsymbol{r}''$均垂直于法矢 $\boldsymbol{n}$,故共面,于是

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'') = 0 \qquad (1.6)$$

显然,若变矢 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 定向,自然可视为平行固定平面,为了分析方便,下设

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}' \neq \boldsymbol{0}$$

若能证明 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}'$ 定向,那么由于$(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}') . \boldsymbol{r} = 0$,便可得 $\boldsymbol{r}$ 平行于固定平面。而由式 (1.6)有

$$\boldsymbol{r}'' = \lambda\boldsymbol{r} + \mu\boldsymbol{r}'$$

于是

$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')'=\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{r}\times(\lambda\boldsymbol{r}+\mu\boldsymbol{r}')=\mu\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'$$

即有

$$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')'=\boldsymbol{0}$$

这表明 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'$ 为定向变矢,综合之后有结论:

变矢 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'\neq\boldsymbol{0})$ 平行于固定平面$\Leftrightarrow(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'')=0$

1.2 直线和平面 曲线上的基本三棱形

1.2.1 平面、直线方程

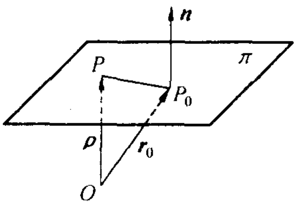

图 1-1

若已知平面 π 的法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 和平面 π 上一点 P_0 的矢径 $\boldsymbol{r}_0$,则参阅图 1-1,我们看到,对平面 π 上任一点 P,连$\overrightarrow{P_0P}$,则有 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{P_0P}$, 即有

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0)=0 \qquad (1.7)$$

式中 $\boldsymbol{\rho}$ 为 P 点的矢径。如果在给定直角坐标系 $\sigma=[O;x,y,z]$ 下有

$$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\} \qquad \boldsymbol{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$$

又设(x,y,z)为平面 π 上任一点 P 在坐标系 σ 下的坐标,则平面 π 的方程式(1.7)化为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (1.8)$$

工程中,与平面相关的不少问题可归结为求法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 的分量。

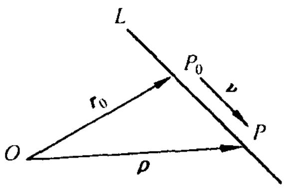

图 1-2

图 1-2 中,若已知直线 L 上一点 P_0 的矢径为 $\boldsymbol{r}_0$,且直线 L 与常矢 $\boldsymbol{v}$ 平行,那么对直线 L 上的任一点 P 就有$\overrightarrow{P_0P}\,/\!/\,\boldsymbol{v}$,从而有

$$\overrightarrow{P_0P}=\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}_0=\lambda\boldsymbol{v}$$

式中 $\boldsymbol{\rho}$ 为 P 点的矢径,则直线 L 的方程为

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}_0 + \lambda \boldsymbol{v} \tag{1.9}$$

若用坐标分量表示上式中各矢量,则若记

$$\boldsymbol{\rho} = \{x, y, z\} \qquad \boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\} \qquad \boldsymbol{v} = \{p, q, r\}$$

再利用式(1.9)的坐标表达式即可得到直线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \\ z = z_0 + \lambda r \end{cases} \tag{1.10}$$

实际工程中,与直线相关的问题有许多可归结为求直线的方向矢量。

1.1.2 基本三棱形

若矢函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad t \in [t_1, t_2] \tag{1.11}$$

为变矢径,则其终点轨迹一般为一条曲线 Γ,而 $\boldsymbol{r}'(t)$ 为其上参数为 t 处的切线方向矢量。这些从数学分析中参数方程的有关论证便可尽知。

我们常称过曲线 Γ 上 P 点(参数为 t),且与 P 点切向矢量 $\boldsymbol{r}'(t)$垂直的直线为曲线 Γ 在 P 点的一条法线。显然有无数条这种法线,并且它们构成一个垂直于 P 点切线矢量$\boldsymbol{r}'(t)$的平面,通常称其为曲线 Γ 在 P 点的法面。易见法面的法线就是曲线 Γ 在 P 点的切线。

我们常称过曲线 Γ 上 P 点的切线的平面为曲线 Γ 在 P 点的一个切面。显然这样的切面有无穷多个,下面我们首先介绍与曲线 Γ 上 P 点近旁结构最密切的一个切面——密切面。若曲线 Γ 在 P 点近旁不含直线段,则 P 点切线和曲线 Γ 上 P 点的近旁点 P_1 一般确定一个平面,如果当 $P_1 \to P$ 时,若此平面极限位置存在,则称此极限位置平面为曲线 Γ 在 P 点的密切面。若设 P_1点参数为

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com