

● 高等学校教学用书 ●

结构力学

王荫长 刘 铮 周文群 李青宁 编

GAODENG
XUEXIAO
JIAOXUE
YONGSHU

冶金工业出版社

高等学校教学用书

结 构 力 学

西安建筑科技大学 王荫长 刘 铮 编
周文群 李青宁

北 京
冶 金 工 业 出 版 社
1998

内 容 简 介

本教材是根据原国家教育委员会 1995 年颁发的高等学校《结构力学课程教学基本要求》编写的。内容包括总论、组成分析、静定结构的内力和位移计算、力法、位移法、力矩分配法、影响线、动力计算、稳定计算、极限荷载、结构计算程序等。

本书力求少而精,加强了现代计算方法,重视学生能力的培养。

本教材可供建筑工程、交通土建工程和水利工程等专业的本科生使用,也适于专科生和有关工程技术人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学/王荫长等编. —北京:冶金工业出版社,1998

高等学校教学用书

ISBN 7-5024-2193-9

I. 结… II. 王… III 结构力学-高等学校-教材 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 13597 号

出版人 卿启云(北京沙滩嵩祝院北巷 39 号,邮编 100009)

顺义兴华印刷厂印刷;冶金工业出版社发行;各地新华书店经销

1998 年 1 月第 1 版,1998 年 8 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16;32.25 印张;768 千字 505 页;1-3300 册

39.40 元

(本社图书如有印装质量问题,本社发行部负责退换)

前 言

本书是根据原国家教育委员会 1995 年颁发的《高等工业学校结构力学课程教学基本要求》编写的。本书主要内容包括总论(含组成分析)、静定结构内力、静定结构位移、力法、位移法、力矩分配法、影响线、动力计算、结构的稳定计算、极限荷载、部分结构计算程序等。

本书注重结构现代计算方法,加强了电子计算机的教学实践,用 FORTRAN 语言研制了三铰拱和三铰刚架计算、铰接排架计算、变截面无铰拱计算、连续梁内力包络图、结构的固有振动频率、周期和振型计算等计算机源程序。

本书力求少而精,重视学生能力培养。为便于自学,每章都附有一定的例题、习题和思考题。其中用 * 号及小字排印的部分可供选用。

本书内容未包括结构矩阵分析,有关内容请参看本书的配套教材《结构矩阵分析与程序设计》(温瑞鑑主编)。

本书可供建筑工程、交通土建工程和水利工程等专业的本科生使用,也可供专科生及有关工程技术人员使用。

参加本书编写工作的有,西安建筑科技大学刘铮(第 1 章、第 8 章),王荫长(第 2 章、第 9 章、第 10 章),周文群(第 3 章、第 4 章、第 5 章),李青宁(第 4 章第 4.9 节、第 6 章、第 7 章、第 11 章)。

由于编者的水平所限,书中不妥之处,欢迎读者批评指正。

编 者

1998 年 1 月

目 录

1 结构力学总论	(1)
1.1 结构力学的研究对象和任务	(1)
1.2 结构的计算简图	(2)
1.3 平面杆件体系的几何组成分析	(5)
1.4 平面杆件体系的几何组成与静力特性的关系	(16)
1.5 平面杆件结构的分类	(17)
习题	(19)
2 静定结构的内力计算	(21)
2.1 单跨静定梁	(21)
2.2 多跨静定梁	(35)
2.3 三铰拱	(40)
2.4 静定平面刚架	(50)
2.5 静定平面桁架	(62)
2.6 静定组合结构	(84)
2.7 静定结构的一般特性	(86)
习题	(89)
3 静定结构的位移计算	(97)
3.1 结构位移的概念	(97)
3.2 变形体虚功原理	(98)
3.3 计算结构位移的虚力原理	(103)
3.4 图乘法	(111)
3.5 由支座位移引起静定结构的位移计算	(123)
3.6 由温度改变引起静定结构的位移计算	(124)
3.7 线弹性变形体系的互等定理	(127)
习题	(131)
4 力法	(137)
4.1 超静定结构概述	(137)
4.2 力法的基本原理	(139)
4.3 荷载作用下的超静定结构计算	(148)
4.4 对称性的利用	(165)
4.5 超静定结构在温度改变时的内力计算	(170)
4.6 超静定结构在支座位移时的内力计算	(173)
4.7 超静定结构位移计算	(177)
4.8 力法计算结果的校核	(179)
4.9 超静定拱结构的计算	(183)
4.10 超静定结构的一般特性	(202)

习题.....	(205)
5 位移法	(212)
5.1 位移法的基本概念	(212)
5.2 等截面直杆的形常数和载常数	(214)
5.3 位移法的基本未知量和基本结构	(218)
5.4 位移法的典型方程	(221)
5.5 用典型方程法计算超静定结构	(224)
5.6 用平衡方程法计算超静定结构	(232)
5.7 对称性的利用	(239)
* 5.8 用位移法计算有侧移单柱刚架	(243)
习题.....	(249)
6 力矩分配法	(254)
6.1 力矩分配法基本概念	(254)
6.2 用力矩分配法计算连续梁	(258)
6.3 用力矩分配法计算无侧移刚架	(269)
6.4 无剪力分配法	(277)
习题.....	(281)
7 影响线	(287)
7.1 移动荷载及影响线概念	(287)
7.2 用静力法作单跨静定梁的影响线	(289)
7.3 用机动法作静定梁的影响线	(293)
7.4 间接荷载下主梁的影响线和梁式桁架的影响线	(297)
7.5 用影响线求支座反力和内力	(301)
7.6 荷载最不利位置的确定	(303)
7.7 简支梁的绝对最大弯矩	(309)
7.8 简支梁的内力包络图	(311)
7.9 连续梁的影响线	(313)
习题.....	(318)
8 结构的动力计算	(323)
8.1 一般概念	(323)
8.2 结构动力计算简图和动力自由度	(324)
8.3 单自由度体系的自由振动	(326)
8.4 单自由度体系的受迫振动	(332)
8.5 两个自由度体系的自由振动	(340)
8.6 一般多自由度体系的自由振动	(349)
8.7 多自由度体系在简谐荷载作用下的受迫振动	(358)
8.8 多自由度体系在一般动力荷载作用下的受迫振动——主振型叠加法	(360)
8.9 计算频率的近似法	(366)
习题.....	(371)

9 结构的稳定计算	(375)
9.1 结构弹性平衡形式的稳定性	(375)
9.2 确定临界荷载的静力法	(378)
9.3 确定临界荷载的能量法	(387)
习题	(396)
10 结构的极限荷载	(399)
10.1 结构的塑性分析和极限荷载法概念	(399)
10.2 比例加载时的极限荷载一般定理	(407)
10.3 连续梁的极限荷载	(411)
10.4 平面刚架的极限荷载	(418)
习题	(426)
11 部分结构计算程序	(429)
11.1 三铰拱、三铰刚架反力和内力计算程序	(429)
11.2 阶形悬臂梁、简支梁指定位移计算程序(图乘法)	(442)
11.3 不等高铰接排架结构内力计算程序(力法)	(455)
11.4 变截面无铰拱反力和内力计算程序(力法)	(467)
11.5 简支梁内力包络图计算程序(利用影响线)	(482)
11.6 连续梁内力包络图计算程序(力矩分配法)	(492)
11.7 多层多跨结构自振频率、周期和振型计算程序(迭代法)	(498)

1 结构力学总论

1.1 结构力学的研究对象和任务

1.1.1 结构力学的研究对象

房屋建筑、桥梁、水利工程中的承重构造分别称为建筑结构、桥梁结构、水工结构,统称为工程结构,简称结构。

按结构构件的几何特征,结构可分为三类:

(1)杆件结构:由细长杆件组成的结构称为杆件结构,也叫杆系结构。这类结构在工程中应用极广,如房屋的骨架、桥梁、水坝闸门、各种支架多采用杆件结构。

(2)薄壁结构:这类结构的构件是由厚度远比长度和宽度小得多的薄板或薄壳构成,也称为板壳结构。如房屋的楼板和壳体屋盖、水工结构中的拱坝等都属薄壁结构。

(3)实体结构:由长、宽、厚三个方向尺寸、大小相当的块体组成的结构叫实体结构。如机器基础、桥墩、重力坝等结构都是实体结构。

结构力学就是研究这些结构的力学问题的,但通常所言结构力学多指杆件结构力学。

1.1.2 结构力学课程的任务

总体上说,结构力学是研究杆件结构的组成规律,以及结构在外因作用下的强度、刚度和稳定性的计算原理和计算方法。具体包括以下几个方面:

(1)研究结构的组成规律。目的在于保证结构组成合理,能够承担荷载并保持平衡,以及可根据组成规律选择适当的计算方法。

(2)研究结构内力和变形的计算原理和计算方法。因为结构的强度和刚度等问题都要通过计算内力和变形去解决,这是本课程研究的主要内容。

(3)研究结构整体稳定性的计算原理和计算方法,及结构在动力作用下的特性和反应。

(4)了解各类结构的受力性能和特点,以便选取合理的结构类型,供结构设计计算时作参考。

结构力学与理论力学、材料力学、弹性力学、塑性力学等有着密切的关系。理论力学着重研究物体机械运动的基本规律,是结构力学的基础。其余三门力学与结构力学的总任务基本相同,主要是研究对象有所分工:材料力学以单个杆件为主要对象,弹性塑性力学则以板、壳和实体结构为主要对象,并且用更为严密的理论研究材料力学及结构力学的问题。

科学是不断发展的,结构力学学科也在发展,电子计算机的出现,对结构力学的发展产生了巨大的影响。在使用电子计算机之前,传统的结构力学方法可称为“手算”方法。为适应“电算”的需要,在结构计算中发展了结构矩阵分析、有限单元法等,在结构力学学科领域中形成了一个新的分支——计算结构力学。“电算”不仅大大提高了结构计算的效率,而且过去不易解决的大型复杂结构计算问题也迎刃而解,这也促进了结构设计的发展。在本书中将介绍有关结构“电算”的理论和方法,以及有关电算程序。但是传统的结构力学理论是“电算”方法的基础,而且一些“手算”方法在当前工程中还是有用的。因此,本书的基本内容将着重介绍当前有用的传统的结构力学理论与方法。

1.1.3 结构力学在专业培养中的作用

结构力学是土建、道桥、水利类专业的一门主要技术基础课程。在修完数学、理论力学、材料力学的基础上,通过本课的学习,可进一步掌握杆件结构的计算原理和方法,了解各类结构的力学性能,为学习有关工程结构课程、结构设计和科学研究,以及毕业后从事结构工程的设计、施工和管理打好力学理论基础。

在本课程的学习过程中,尤其要注意逐步培养分析能力、计算能力、自学能力和表达能力,以及综合运用所学力学知识分析和解决工程实际问题的能力。

结构力学是一门实践性比较强的课程,学习本课程要理论和应用并重。不深刻掌握理论,则不会灵活运用所学方法去计算结构;计算练习少也不能深入理解理论。因此,学习本课程,既要认真钻研理论,更要及时多作习题。认真自学教材、尽可能多读参考书,分阶段进行学习小结,也是深入掌握所学理论和方法所必须的。多作手算和电算练习,不仅可深入理解和巩固理论和基本概念,也是培养计算能力和表达能力所必须的。

1.2 结构的计算简图

1.2.1 计算简图的概念

实际结构的构造很复杂,计算结构时完全准确地按照结构的实际情况计算是不可能的,也是不必要的。因此,在进行结构的力学分析时,往往采用简化的图形代替实际结构,这种计算模型叫做结构的计算简图。

选取结构计算简图的原则是,首先要按实际构造分析它的力学性能,分清主次,然后考虑下述两个原则:

- (1)计算简单——略去次要因素;
- (2)反映实际——能反映主要力学性能。

选取计算简图时,还应考虑下列一些因素:

- (1)结构的重要性——重要结构的计算简图应比较精确些,次要的或临时建筑结构则可粗略些;
- (2)不同阶段的设计要求——初步设计的计算简图可简略些,施工图阶段设计则须较为精确;
- (3)计算问题的性质——静力分析比较简单,可取较精确的计算简图,动力分析有时十分复杂,则只能取进一步简化的计算简图。

- (4)计算手段——“电算”和“手算”比较,“电算”时可取更为精确的计算简图。

例如,图 1-1(a)所示的钢筋混凝土屋架,各杆件浇注在一起,上面承受檩条传来的屋面重量,两端支承在墙上。此屋架较精确的计算简图如图 1-1(b)所示,各杆件截面有弯矩、剪力和轴力。此计算简图相当符合实际屋架的受力性能,但计算比较麻烦。经分析研究,对这种屋架的强度起决定性作用的是轴力,如果取图 1-1(c)所示计算简图求轴力,也基本符合实际屋架的轴力,可满足设计要求,但计算变得十分简单。

计算简图的选择是分析结构的第一步工作,它不仅和计算简繁有关,尤其重要的是影响结构的安全与经济,是十分重要的。按照某种计算简图设计的结构,在施工时应尽量满足计算简图的要求,以保证结构的安全可靠。

选取结构的计算简图,不仅要有力学知识,还需要有丰富的实践经验和工程结构知识。

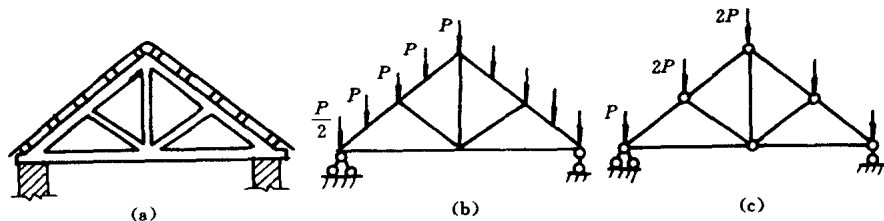


图 1-1

通过本课程学习,要掌握选取计算简图的原则,熟悉常用的典型的结构计算简图。

1.2.2 平面杆件结构计算简图的简化

1.2.2.1 杆件的计算简图

以杆件的轴线(截面形心的连线)代表杆件,取杆件两端结点间的距离或弧长为杆件长度。这样,就有直杆和曲杆两类杆件。

1.2.2.2 结点的计算简图及分类

两根或两根以上杆件相互联结处称为结点。根据结点处各杆间的约束情况,有三类结点:

(1)刚结点。图 1-2(a)为一钢筋混凝土结构的结点,上下柱与梁在结点处浇注成整体,其计算简图如图 1-2(b)所示,为刚结点。刚结点的几何特点是变形前后结点处各杆端横截面之间不能互相转动,即其夹角保持不变;其力学特点是各杆间可相互传递力和力矩。

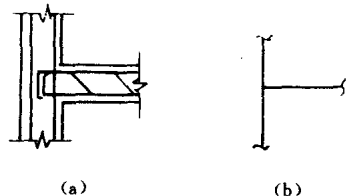


图 1-2

(2)铰结点。图 1-3 为平面桁架结点的计算简图,各杆件在结点处用柱铰联结,为铰结点。几何特征是各杆间夹角在变形前后可任意改变;力学特点是各杆端可互相传递力,但不能传递力矩。

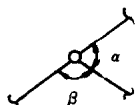


图 1-3

结。

1.2.2.3 支座的计算简图

将结构与基础或其它支承部分联结的装置叫支座。

在结构力学中,按支座的可能运动状态,用支座链杆来表

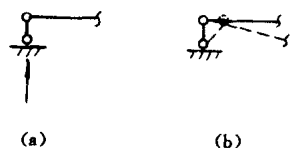


图 1-5

示支座。支座链杆是一个刚性短杆,两端各用圆柱形铰与结点及基础联结。在结构分析中,常用的支座计算简图有以下几类:

(1)活动铰支座。允许结构在支点处可沿支承平面移动,并可绕支点转动的支座,叫做活动铰支座或可动铰支座。

如图 1-5(a)所示,活动铰支座用垂直于支承面的一根支座链杆表示。支座链杆的上端可绕下端铰转动,见图 1-5(b)。由于变形很小,可认为上端是沿支承面方向平行移动。

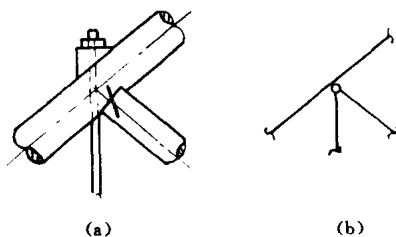


图 1-4

活动铰支座的支座反力 R ，垂直于支承平面，并通过支点铰中心。

(2) 不动铰支座。结构可绕支点转动但不能移动的支座，称为不动铰支座或固定铰支座。

图 1-6(a)、1-6(b) 为不动铰支座用，交于一点的两个支座链杆表示。不动铰支座的反力有两个独立的分反力，如图 1-6(a)，通常用通过支点铰的水平反力 H 和竖向反力 V 表示。

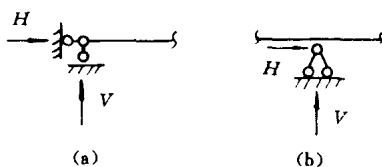


图 1-6

(3) 固定支座。限制结构在支点处既不能移动，也不能转动的支座叫做固定支座。

固定支座一般用

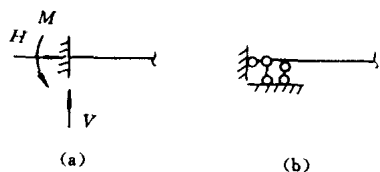


图 1-7

图 1-7(a) 所示简图表示。固定支座的反力可有水平反力 H 、竖向反力 V ，和一个限制转动的反力偶 M 。

固定支座在平面内有三个方向的约束作用，如果用支座链杆表示，见图 1-7(b)，除限制移动的两个支座链杆外，再加一个不通过前两个支座链杆交点的链杆，则支点也不能转动。

(4) 定向支座。这类支座允许结构在支点处沿支承面方向移动，沿支承面垂直方向不能移动，也不能转动。

如图 1-8，定向支座用两根互相平行并垂直于支承面方向的支座链杆表示。相应的支座反力可简化为一个垂直于支承面方向的反力，和一个反力偶。

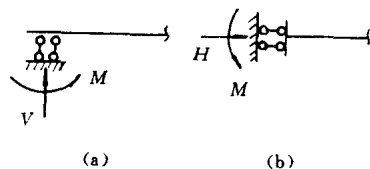


图 1-8

除上述四类支座外，在分析结构时，有时还用到各种弹性支座。

1.2.2.4 材料性质的简化

任何建筑材料都是可变形的，在分析结构时必须建立材料受力变形性质的模型。

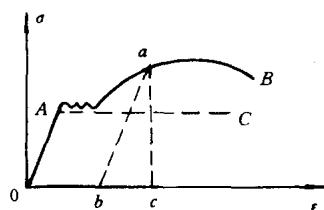


图 1-9

材料变形的基本性质有弹性变形和塑性变形。图 1-9 是钢的应力应变曲线，0—A 是线性弹性阶段，过 A 点之后的变形将包含弹性和塑性两种性质。由于结构一般都是在小变形弹性变形范围内工作，所以本课在分析结构时，一般都假设结构材料是理想线性弹性体。

1.2.2.5 荷载的简化及荷载分类

作用于结构的主动外力叫荷载，例如，结构的自重、加于结构的设备重量、对结构的水压力、风力等。除外力作用外，结构周围温度的改变、支座移动、材料收缩等因素，也可引起结构的内力和变形，这些因素也可称为广义荷载。

在分析结构确定计算简图的同时，也要明确作用于结构的荷载的位置、大小、方向和性质，以及变化规律。实际荷载常是很复杂的，因此，也要加以简化。

(1) 按荷载分布位置。实际荷载都分布在一定的面积上，在计算时常简化为两种情况：

集中荷载——分布面积很小的荷载，取其合力，为集中荷载，作用于结构上的一点。单位用 N 或 kN 表示。

分布荷载——在结构上连续分布的荷载。如果荷载的集度相同,则为均布荷载。沿长度的分布荷载集度单位为 N/m 或 kN/m ;按面积分布的荷载集度单位用 N/m^2 或 kN/m^2 。

有时荷载可简化为集中力偶或分布力偶。

(2)按荷载在结构上作用时间的久暂。

恒载——永久作用于结构上的荷载,其作用位置和大小永久不变,如结构的自重和固定设备的重量。

活载——位置不固定的荷载,但须明确荷载的作用位置和范围。如吊车梁上的吊车荷载,是可以沿吊车梁移动的集中活荷载;楼板上的人群重量,是可以存在或移去的活荷载。

(3)按荷载的性质。荷载的静力或动力性质不同,结构计算方法有根本的区别。

静力荷载——很缓慢加到结构上的荷载,不使结构产生振动,或引起的振动很小,运动速度改变很慢,加速度可以忽略。

动力荷载——荷载的大小、方向或位置随时间迅速变化,使结构产生不可忽视的振动和加速度。对动力荷载,在计算结构之前还要搞清它的变化规律。

1.3 平面杆件体系的几何组成分析

1.3.1 体系几何组成分析的意义

杆件结构的组成是,各杆件之间用铰或刚性联结,与基础则用支座相联结而成。为能承担荷载,对结构的一个基本要求是,不考虑材料的变形,结构应能保持它的几何形状和位置不会改变。

1.3.1.1 两种体系

图 1-10(a)所示为一简易支架,木柱与横梁用扒钉联结,柱下端埋入土层较浅,其计算简图如图 1-10(b)。显然,此体系是很容易倒塌的,不能保持原来的几何形状。如果在此体系中加入一根斜撑,如图 1-10(c),则可保持体系原有的几何形状。由此可知,杆件体系的几何组成,由是否能保持原有的几何形状和位置看,分为两类体系:

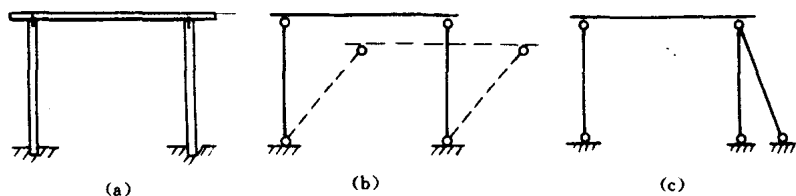


图 1-10

(1)几何不变体系——在不考虑材料的变形时,体系原有的形状和位置不能改变;

(2)几何可变体系——在不考虑材料的变形时,体系原有的形状和位置可以改变。

1.3.1.2 体系几何组成分析的目的

只有几何不变体系才能作为结构使用,而且结构的受力性能和计算方法,都与其几何组成规律有关。因此,对体系进行几何组成分析的目的是:

(1)判断杆件体系是否几何不变,以确定能否作为结构使用;

(2)分析几何不变体系的组成规律,以选择合适的计算方法、了解结构的受力性能。

1.3.1.3 体系几何组成分析的方法

要保证体系几何不变,须从两方面进行研究:一是一定数量的杆件需要有多少个约束(联系)联结;二是杆件和约束怎样布置。图 1-11(a)所示的一根梁杆件用两个竖向支座链杆和一个水平支座链杆支承,则可保证体系几何不变;如果按图 1-11(b)的布置,即三个支座链杆都是竖向的,链杆约束数目虽然还是 3 个,但梁在水平方向的位置是可动的,即体系是几何可变的。

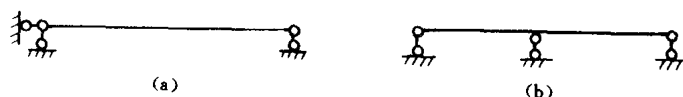


图 1-11

体系几何组成分析是研究体系可否发生运动,因此,可用机械运动的分析方法进行研究,故又称机动分析。

1.3.2 体系几何组成分析的几个概念

1.3.2.1 平面上的动点和刚片

动点——在平面内运动的点。例如平面体系中的铰结点,可看作动点。

刚片——在平面内运动的刚性薄片。在平面体系中,由于不考虑材料的变形,一个杆件或一个几何不变部分都可看为一个刚片。

1.3.2.2 体系运动的自由度

由动点或刚片组成的体系运动时,表示其可自由运动的程度的量叫做体系的自由度。自由度的数目等于体系运动时独立位移的数目,即等于确定此体系位置所需的独立几何坐标数目。

不受约束的动点和刚片的自由度为:

(1)一个动点在平面内有两个自由度。如图 1-12 中的动点 A ,用 x_A 和 y_A 两个坐标即可确定其位置,故自由度数为 2。

(2)一个刚片在平面内有三个自由度。图 1-13 中的刚片 I 的位置,用 x_A 、 y_A 和 φ 三个坐标即可确定,故其自由度数为 3。

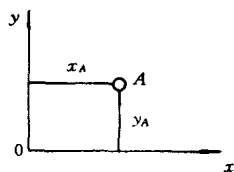


图 1-12

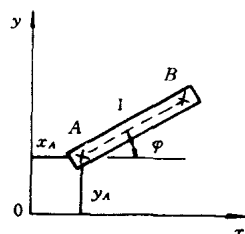


图 1-13

由若干个动点或刚片组成的体系,可能有 n 个自由度。凡自由度数大于零的体系,一定是几何可变体系。工程结构都是几何不变体系,其自由度应为零。

1.3.2.3 约束

限制体系运动的装置称为约束(或联系)。在体系中加入约束将减少体系的自由度,减少一个自由度的装置叫做 1 个约束。

平面杆件体系中常用的约束有下列几种:

(1)链杆和支座链杆。一个刚性杆在两端用铰把两个动点或刚片联结起来的装置叫做链杆。支座链杆是一端与地另一端与结构联结的链杆。

图 1-14 中的两个刚片 I 和 II 不受约束时,共有 6 个自由度。当在 A 点加上一个竖向支座链杆,和 B、C 两点间加一个链杆 BC 后,确定此体系的位置只需如图所示的 4 个坐标,即加上 2 个链杆约束后,减少了 2 个自由度,成为 4 个自由度体系。

所以,在体系中每加入一根链杆或支座链杆将减少一个自由度,即一个链杆或支座链杆是 1 个约束。

(2)单铰和复铰。单铰,仅联结两个刚片的铰叫做单铰。

图 1-14

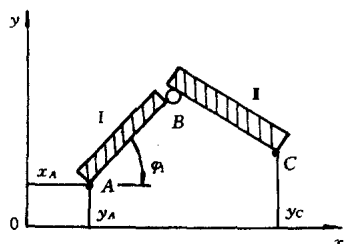
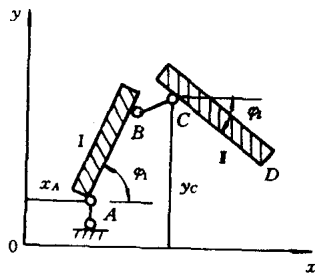


图 1-15

图 1-15 中 B 点的铰联结 I 和 II 两个刚片,是单铰。在加单铰 B 前两个刚片共有 6 个自由度。加单铰 B 之后,确定此体系的位置只需如图所示的 4 个坐标,为 4 个自由度体系,减少了 2 个自由度。

所以,一个单铰是 2 个约束。

复铰,联结两个以上刚片的铰称为复铰。

图 1-16 中刚片 I、II 和 III 不受约束时共有 9 个自由度。在 B 点用一个铰将三个刚片联结之后,成为 5 个自由度体系,即加入一个铰 B 减少了 4 个自由度,相当二个单铰的作用。

故知,联结 n 个刚片的复铰相当 $(n-1)$ 个单铰,是 $2(n-1)$ 个约束。

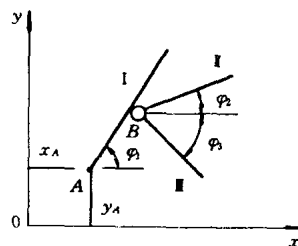


图 1-16

(3)单铰与链杆的约束关系。一个单铰相当两根链杆。

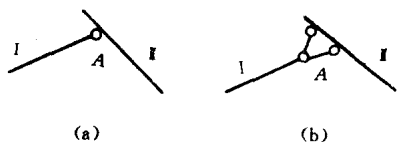


图 1-17

图 1-17(a)中刚片 I 和 II 用单铰 A 联结;图 1-17(b)是用交于 A 点的两根链杆,将刚片 I 和 II 联结在一起。这两种约束情况都是在刚片 I 和 II 间加入了两个约束,而且同样使两刚片可绕 A 点相对转动。所以,一个单铰和两个链杆的约束数目和作用是一样的。

在体系中,有时会遇到两个刚片 I 和 II 用不交于一点而是延长线交于一点的两根链杆相联结,如图 1-18(a)。在这种情况下,如两刚片发生运动,将是围绕两链杆延长线交点 A 作相对转动,交点 A 如同一个铰,称为虚铰。

虚铰不同于实铰,如图 1-18(b),当刚片 I 不动,刚片 II 绕 A 点发生转动后,虚铰位置移到了 A' 处,即虚铰位置不是固定不变的,随体系的运动,虚铰位置也将连续移动。

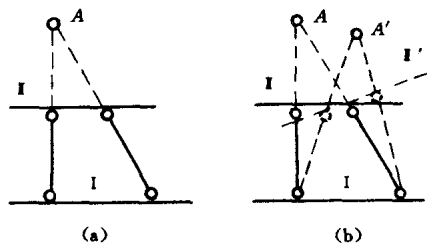


图 1-18

当两根链杆平行时,虚铰位置相当在沿链杆方向的无限远处。

1.3.2.4 必要约束和多余约束

为保证体系几何不变需要一定数量的约束,而且布置要合适。

图 1-19 中,刚片 I 用三个竖向支座链杆和一个水平支座链杆与基础联结,这个体系是几何不变的。但是,仅从保证体系几何不变的要求来看,保持刚片 I 不动,只需要一个水平的和两个竖向的支座链杆就够了,那么第三个竖向支座链杆就属多余的了。由此可知,从保持体系几何不变的需要来讲,约束可分为两类:

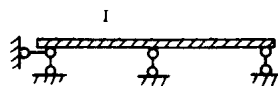


图 1-19

(1) 必要约束——保持体系几何不变必须有的约束;

(2) 多余约束——保持体系几何不变可以去掉的约束。在体系中增加多余约束并不减少体系的自由度,但是从改善体系的受力性质等方面来看常常是需要的。

1.3.2.5 瞬变体系

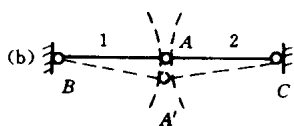
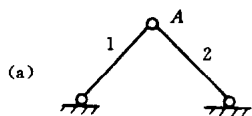


图 1-20

图 1-20(a)中,为固定动点 A,可用图示的不在一条直线上的 1 和 2 两根链杆约束,这是必要约束,则点 A 不能有任何方向的移动。

如果按图 1-20(b)所示,链杆 1 和 2 在一条直线上,两链杆在 A 点虽然有铰联结,但两链杆如分别绕 B、C 点转动时,固定点 A 有相同的运动方向,所以将发生如图虚线所示的微小位移。当点 A 移到 A' 处后,两链杆不在一条直线上,则不能继续向下移动。对动点 A 来讲,两链杆约束均为水平方向,阻止点 A 的水平位移,有一个链杆是必要约束,另一个是多余约束,但这两个约束不能限制点 A 的竖向微小位移。

在瞬时可发生微小几何变形、其后不能继续移动的体系,称为瞬变体系。瞬变体系也不能作为结构使用。

1.3.3 平面杆件体系自由度的计算

杆件体系是若干个杆件(刚片)在杆件之间和杆件与基础间用约束互相联结而成。体系是否几何不变,一方面要看约束数目是否够,这是必要条件;另一方面还要求杆件与约束布置合理。下面从刚片与约束的数量方面来研究平面杆件体系的几何不变性,这可从体系的自由度来分析。

1.3.3.1 刚片体系的计算自由度

设体系中有 m 个刚片,刚片与刚片间有 h 个单铰约束,刚片与基础间有 r 个支座链杆约束。 m 个刚片不受任何约束时,相对于基础有 $3m$ 个自由度;当加入单铰及支座链杆约束后将减少 $(2h+r)$ 个自由度,则体系的自由度为

$$W = 3m - 2h - r \quad (1-1)$$

实际上,在体系中加入一个约束,并不一定能减少一个自由度,因为还与约束和刚片的布置有关。因此将 W 称为计算自由度。由 W 可以判定要体系几何不变的约束数目是否够,以及有无多余约束,或是缺少多少约束。

当使用式(1-1)时,规定:刚片的定义是体系中凡本身几何不变且没有多余约束的部分,可看为一个刚片;有复铰要化为单铰数计算。还有,体系中两个刚片之间如有两根链杆连接,可以看为一个单铰,此时就不能再把链杆作为刚片。

例 1-1 计算图 1-21 体系的自由度。

解 此例刚片数 $m=5$ 。结点 b, d 为复铰, 各相当 2 个单铰, 结点 a, c 为单铰(该处的铰与支座链杆共用, 除去支座链杆, 尚联结两个刚片, 所以是单铰), 故 $h=6$, 支座链杆 $r=3$, 自由度数为

$$W=3 \times 5 - 2 \times 6 - 3 = 0$$

计算自由度得零, 约束数目够, 体系几何不变。

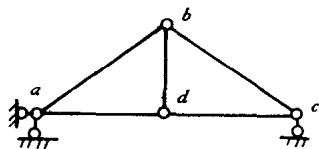


图 1-21

例 1-2 计算图 1-22 体系的自由度。

解 此例与图 1-21 的区别是结点 d 改为组合结点, adc 可看为一个刚片, 刚片数 $m=4$ 。单铰数 $h=5$, 支座链杆数 $r=3$ 。所以

$$W=3 \times 4 - 2 \times 5 - 3 = -1$$

计算自由度为负值, 表示体系有多余约束。

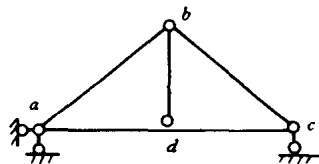


图 1-22

例 1-3 计算图 1-23 体系的自由度。

解 此例 $acdb$ 部分可看为 1 个刚片, 共有 $m=4$ 个刚片。 c 与 d 是组合结点, 各为 1 个单铰, 加上单铰 $e, f, h=4$, 支座链杆 $r=4$, 故

$$W=3 \times 4 - 2 \times 4 - 4 = 0$$

1.3.3.2 铰结链杆体系自由度的计算

对于结点完全为铰结点的链杆体系, 如图 1-21, 如果以动点的运动分析其自由度, 计算公式将比较简单。

设以 j 表示铰结链杆体系的结点数。如结点(动点)不受任何约束, 每个结点有 2 个自由度, 共有 $2j$ 个自由度。每两个结点间加入一根链杆约束, 将减少 1 个自由度, 有 b 根链杆将减少 b 个自由度, 有 r 根支座链杆减少 r 个自由度。所以

$$W=2j-b-r \quad (1-2)$$

例 1-4 用式(1-2)计算图 1-21 体系的自由度。

解 此例 $j=4, b=5, r=3$, 故

$$W=2 \times 4 - 5 - 3 = 0$$

可见对这种体系用式(1-2)计算自由度, 比用式(1-1)简便。

1.3.3.3 平面杆件体系的可变量

在分析体系的几何组成时, 有时只须计算体系本身内部的自由度, 称为体系的可变量。此时, 不考虑支座链杆, 即设 $r=0$ 。设可变量为 V , 体系本身相对于基础的自由度等于 3, 则总的自由度 $W=V+3$ 。由此得到可变量计算公式:

一般体系

$$V=3m-2h-3 \quad (1-3)$$

铰结链杆体系

$$V=2j-b-3 \quad (1-4)$$

1.3.3.4 计算结果分析

体系自由度或可变量计算结果, 有下列三种情况:

(1) W (或 V) > 0 , 说明约束数不够, 体系必然是几何可变的。

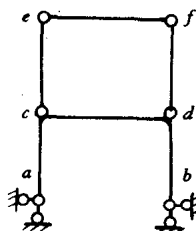


图 1-23

(2) W (或 V) = 0, 说明体系具有保证几何不变所必需的最少约束数目。如果杆件与约束布置合适, 体系可以几何不变; 如果布置不当, 体系还可能是几何可变的。

例如图 1-23 体系, $W=0$, 但 $V=3 \times 4 - 2 \times 4 - 3=1$, 体系 $cefd$ 部分少一个约束, 而与基础的联系只需要三个支座链杆就可不动, 一个水平支座链杆是多余约束, 就体系整体说是几何可变。如果去掉一个水平支座链杆, 在上部 c 与 f 两结点间加一根链杆, W 仍为零, 体系成为几何不变。

(3) W (或 V) < 0, 说明体系有多余约束; 如果布置合适, 体系几何不变, 布置不合适, 体系可能是几何可变的。

综上所述: $W > 0$, 体系必是几何可变; $W \leq 0$, 体系可能是几何不变, 或是几何可变, 还需要进一步分析其几何组成才能确定。

1.3.4 平面几何不变体系组成的基本规则

下面讨论没有多余约束的几何不变体系组成的几个基本规则, 按照这些规则可以分析一般体系是几何不变或可变, 以及有无多余约束。

1.3.4.1. 三刚片规则

图 1-24 所示三个刚片 I、II、III, 每两个刚片间用一个单铰联结, 形成一个铰结三角形, 其可变量 $V=3m-2h-3=3 \times 3 - 2 \times 3 - 3=0$ 。

从几何组成上看, 假设刚片 I 不动 (如看为基础), 及刚片 II 与 III 间没有铰联结, 则刚片 II、III 可以分别绕铰 a 、 c 转动, 两刚片的 b 点各自分别可在以 ba 和 bc 为半径的圆弧上运动, 但刚片 II、III 有铰 b 联结, b 点不能同时沿两个方向不同的圆弧上运动, 于是三个刚片间不能有任何相对运动。因此, 这样的铰结三角形体系本身是几何不变的。

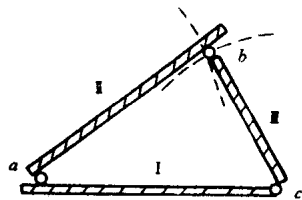


图 1-24

三刚片规则 三个刚片用不在一直线上的三个单铰两两相联, 组成的体系几何不变, 且没有多余约束。

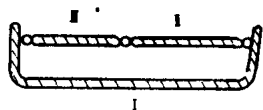


图 1-25

规则中的“两两相联”, 是指三个刚片中每两个刚片间均有一个单铰联结。要求三个铰不能在一条直线上, 否则体系是瞬变的, 如图 1-25。

体系中的单铰可以用两根链杆代替, 如图 1-26。三个刚片用六根链杆联结, 每两个刚片间的两根链杆组成的铰或虚铰不在一条直线上, 体系也是没有多余约束的几何不变体系。

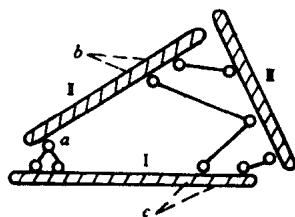


图 1-26

例 1-5 分析图 1-27(a) 体系的几何组成。

解 此体系 AC 和 CB 两杆用铰 C 联结, D 处两支座链杆的交点看作一个铰, 所以 ED 和 FD 两链杆也可看为支座链杆, 则 $A-C-B$ 部分有四根支座链杆与地基相联。

如将 AC 、 CB 视为刚片 I、II, 地基视为刚片 III, 则形成图 1-27(b) 所示三刚片体系。联结刚片 I 与 II 的铰为 (1, 2), 联结刚片 II 与 III、III 与 I 的铰分别为 (2, 3) 和 (3, 1), 此三铰不共直线, 按上述规则, 可知此体系为无多余约束的几何不变体系。

1.3.4.2 两刚片规则