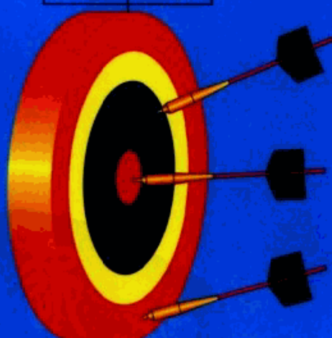
初中数学

新题型题典



新题汇萃
名师点拨

学考兼济
制胜无敌

广西教育出版社

前言

考试有规律可循吗?

有人才选拔就必有考试。在大力加强素质教育的今天,选拔考试还是不可或缺的。怎样在全面提高学生素质的同时,提高学生的应试能力,在中考竞争中能够从容自如地面对?华东师大二附中的部分青年教师带着这样的思考进行了一番积极的探索。他们发现,中考的范围、题型似乎年年都在变,但是万变不离其宗。这个“宗”就是各学科的基本素养,包括各科的基础知识、基本题型以及应对的措施。经过多年的教学实践,华东师大二附中的老师们成功地摸索出一些指导学生复习迎考的基本规律,其中很重要的一点就是,不必进行题海战,而要精选、精练、精讲,牵一发而动全身,举一而反三,真正做到“中考尽在掌握中”。

不同地区考试有相近的规律吗?

华东师大二附中的老师们进一步研究了近几年各省市或地区的中考试卷,再一次验证了他们的发现。的确,尽管中考命题“各自为政”,试题的内容与形式不完全一样,但是命题的指导思想和基本原则,试题的特点、结构和规律都是基本一致的。所以,不同地区的中考有着基本相同的规律。

学生失分的盲点在哪里？

新题型打破传统的思维定势，重在考查学生综合解决问题的能力，对学生要求颇高，故新题型是学生失分的重“灾区”。

基于以上理念，我们组织华东师大二附中的部分中青年优秀教师编写了这套丛书。丛书抓住学生容易丢分的新题型为研究对象，集近年各省市或地区中考新题之精华和作者最新的教研成果于一体。题型新，类型全。

丛书分两部分：第一部分为“破解典型新题”；第二部分为“新题大本营”，并附有参考答案与提示。

本套丛书特点鲜明：权威性——精选近年各省市或地区的中考试题；典型性——精选各地试题中的典型新题加以解剖；指导性——“破解典型新题”与“新题大本营”均有答案、点拨；可操作性——学生可以先独立思考，尝试解答，再看指导，最后做一定分量的相关练习。另外，丛书根据中考总复习的需要，分专题或题型安排各部分的内容，线索清楚，高效实用。

本丛书既可作为中考夺高分的指导书，又可作为其他年级训练思维能力、拓展知识视野的课外读物，可谓学考兼济。

愿认真学习本丛书的中学生能顺利地迈入理想的高中，祝福你们！

限于时间紧迫等因素，书中不当之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

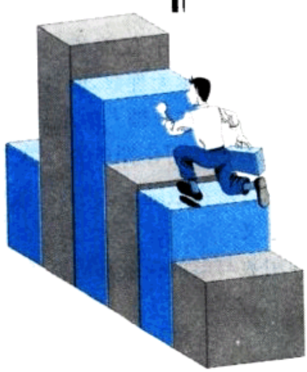
目录

第一部分　破解典型新题

第二部分　新题大本营

第一部分

破解典型新题



一、数与式

【例 1】某位老师在讲“实数”这节时，画了图 1-1，即以数轴的单位长线段为边作一个正方形，再以 O 为圆心，正方形对角线为半径画弧与数轴正半轴交于 A 点，作这样的图是用来说明：____________

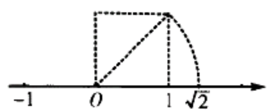


图 1-1

解：以下任一语句均可：

(1)数轴上的点不仅能表示有理数，也能表示无理数，或每个无理数都可以用数轴上的点表示，或实数和数轴上的点是一一对应的.

(2)可以运用几何作图的办法在数轴上表示某些无理数，或用作图方法在数轴上表示$\sqrt{2}$，或$\sqrt{2}$的作图方法，或无理数的几何意义.

(3)利用数与形的联系来研究和解决问题.

本题通过数形结合这一重要的数学思想方法，考查对无理数的存在性，以及数轴上的点与实数间一一对应关系的认识. 结合课本中的重要内容编选带有开放性的填空题，是一种有意义的探索和尝试.

【例 2】观察下列各式及其验证过程：

$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}$.

验证：$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2^3}{3}}=\sqrt{\frac{(2^3-2)+2}{2^2-1}}=\sqrt{\frac{2(2^2-1)+2}{2^2-1}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}$.

$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$.

验证：$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3^3}{8}}=\sqrt{\frac{3^3-3+3}{3^2-1}}=\sqrt{\frac{3(3^2-1)+3}{3^2-1}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$.

(1)按照上述两个等式及其验证过程的基本思路，猜想 $4\sqrt{\frac{4}{15}}$ 的变形结果并进行验证；

(2)针对上述各式反映的规律，写出用 n(n 为任意自然数，且 $n\geqslant 2$)表示的等式，并给出证明.

解：(1)$4\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{4+\frac{4}{15}}$.

验证：$4\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{\frac{4^3}{15}}=\sqrt{\frac{4^3-4+4}{4^2-1}}=\sqrt{\frac{4(4^2-1)+4}{4^2-1}}=\sqrt{4+\frac{4}{15}}$.

(2)猜想：$n\cdot\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$($n\geqslant 2$).

证明略.

本题创设了一种情境，需要对题目进行观察、分析、归纳，进而发现规律得出猜想，最后对猜想做出严格的证明. 这是一道借助数与式的有关知识，考查运用数学思想方法解决问题能力的好题.

【例 3】如果$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}\neq0$，那么$\frac{x+y+z}{x+y-z}$的值是(　　).

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

解：设$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k(k\neq0)$，则有

$x=2k,y=3k,z=4k.$

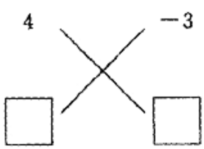
$\therefore\frac{x+y+z}{x+y-z}=\frac{2k+3k+4k}{2k+3k-4k}=\frac{9k}{k}=9$. 故选(C).

在涉及比例的题目中，"设 k 法"往往取到事半功倍的效果.

【例 4】如果 $4x-3$ 是多项式 $4x^2+5x+a$ 的一个因式，则 a 等于(　　).

A. -6　　B. 6　　C. -9　　D. 9

解：



因为二次项系数是 4，所以左下空格应填 1，又 $1\cdot(-3)+4\cdot\boxed{}=5$，故右下空格应填 2.

$\therefore a=(-3)\times2=-6$. 应选(A).

本题也可用待定系数法,但采用上述方法,笔者认为更简捷、更灵活.

【例 5】已知:

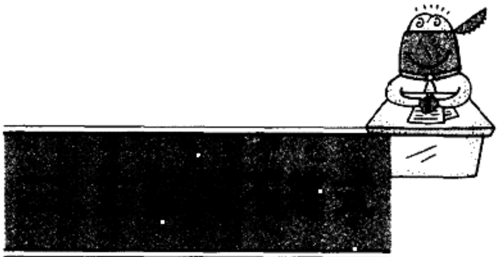
$$2+4=6=2\times3,$$
$$2+4+6=12=3\times4,$$
$$2+4+6+8=20=4\times5,$$
$$2+4+6+8+10=30=5\times6,$$
$$\cdots$$

根据前面各式的规律,可猜测:

$2+4+6+8+\cdots+2n=$______.(其中 n 为正整数)

解:原式$=n\cdot(n+1)$.

要求概括规律,并用代数式表示.



【例 1】为了参加北京市申办 2008 年奥运会的活动.

(1)某班学生争取到制作 240 面彩旗的任务，有 10 名学生因故没能参加制作，因此这班的其余学生人均要比原计划多做 4 面彩旗才能完成任务，问这个班有多少名学生？

(2)如果两边长分别为 1、a(其中 $a>1$)的一块矩形绸布，要将它剪裁出三面矩形彩旗(面料没有剩余)，使每面彩旗的长和宽之比与原绸布的长和宽之比相同，画出两种不同裁剪方法的示意图，并写出相应 a 的值(不写计算过程).

解：(1)设这个班有 x 名学生，则人均做 $\dfrac{240}{x}$ 面彩旗，实际人均要完成 $\dfrac{240}{x-10}$ 面彩旗，由题意，得

$$\frac{240}{x}+4=\frac{240}{x-10}.$$

解得 $x_1=30$，$x_2=-20$(舍).

因此这个班有 30 名学生.

(2)如图:2-1

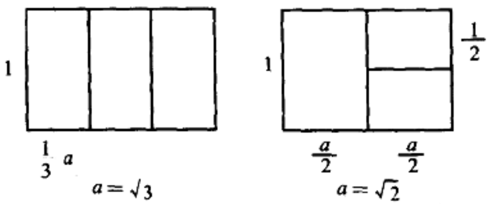


图 2-1

本题注重考查用数学眼光观察,认识世界,用数学方法处理周围问题的能力.第(1)问容易通过列方程来解决.第(2)问是有关相似多边形的问题,要通过尝试、分析、计算、讨论才能解决.

【例 2】我省某地生产的一种绿色蔬菜,在市场上若直接销售,每吨利润为 1000 元;若经粗加工后销售,每吨利润可达 4500 元;若经精加工后销售,每吨利润涨至 7500 元.

当地一家农工商公司收获这种蔬菜 140 吨,该公司加工厂的生产能力是:如果对蔬菜进行粗加工,每天可加工 16 吨.如果进行精加工,每天可加工 6 吨,但两种加工方式不能同时进行,受季节等条件限制,公司必须用 15 天的时间将这批蔬菜全部销售或加工完毕.为此,公司制订了三种可行方案:

方案一:将蔬菜全部进行粗加工.

方案二:尽可能多地对蔬菜进行精加工,没有来得及进行加工的蔬菜,在市场上直接出售.

方案三:将一部分蔬菜进行精加工,其余蔬菜进行粗加工,并恰好用 15 天完成.

你认为选择哪种方案获利最多?为什么?

解：分别用 W_1、W_2 和 W_3 表示三种方案的利润.

方案一：$W_1=140\times4500=630000$(元).

方案二：15 天可精加工 $15\times6=90$ 吨，剩余 50 吨直接出售.

$W_2=90\times7500+50\times1000=725000$(元).

方案三：设 15 天内粗加工蔬菜 x 吨，则精加工蔬菜 $(140-x)$ 吨，依题意有

$$\frac{x}{16}+\frac{140-x}{6}=15.$$

解得 $x=80$.

$\therefore W_3=80\times4500+(140-80)\times7500=810000$(元).

因此，$W_1<W_2<W_3$. 第三种方案获利最多.

要选择获利最多的方案，必须计算出三种方案下的利润. 三种方案中，前两种方案下的利润较容易求得，对第三种方案，需要利用方程的思想求得精加工与粗加工的数量，再求利润. 此类题体现了数学价值，也考查了运用数学知识和方法解决实际问题的能力，值得引起相当的重视.

【例 3】甲、乙、丙、丁四名打字员承担一项打字任务，若由这四人中的某一人单独完成全部打字任务，则甲需要 24 小时，乙需要 20 小时，丙需要 16 小时，丁需要 12 小时.

(1) 如果甲、乙、丙、丁四人同时打字，那么需要多少时间完成？

(2) 如果按甲、乙、丙、丁，甲、乙、丙、丁，…的次序轮流打字，每一轮中每人各打 1 小时，那么需要多少时间完成？

(3) 能否把(2)题所说的甲、乙、丙、丁的次序作适当调整，其余都不变，使完成这项打字任务的时间至少提前半小时？（答题要求：如认为不能，需说明理由；如认为能，需至少说出一种轮流的次序，并求出相应提前多少时间完成打字任务）

解：(1)设需要 x 小时完成，由题意，得

$$\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{20}+\frac{1}{16}+\frac{1}{12}\right)x=1.$$

解得 $x=\frac{80}{19}$.

(2)由于 $\frac{19}{80}\times 4<1<\frac{19}{80}\times 5$，故经 4 轮后，剩下的打字任务为 $1-\frac{19}{80}\times 4=\frac{1}{20}$. 此时甲打 1 小时，还剩下 $\frac{1}{20}-\frac{1}{24}=\frac{1}{120}$. 再由乙做，需 $\frac{1}{120}\div\frac{1}{20}=\frac{1}{6}$.

所以，共需要 $4\times 4+1+\frac{1}{6}=17\frac{1}{6}$(小时).

(3)经 4 轮后，剩下 $\frac{1}{20}$，再由速度最快的丁做，需 $\frac{1}{20}\div\frac{1}{12}=\frac{3}{5}$(小时).

这样，完成打字任务的时间为

$$4\times 4+\frac{3}{5}=16\frac{3}{5}\text{(小时)}.$$

比(2)提前 $17\frac{1}{6}-16\frac{3}{5}=\frac{17}{30}$(小时).

故可以按丁、乙、丙、甲的次序轮流，能提前 $\frac{17}{30}$ 小时完成打字任务，提前时间超过半小时.

本题中的(2)小题，一改从前的同时打字，而是轮流打字. 求出全部时间，关键是确定轮数.

【例 4】 一批货物准备运往某地，有甲、乙、丙三辆卡车可雇用，已知甲、乙、丙三辆车每次运货量不变，且甲、乙两车单独运这批货物分别用 $2a$ 次，a 次能运完；若甲、丙两车合运相同次数运完这批货

物时，甲车共运了 180 吨；若乙、丙两车合运相同次数运完这批货物时，乙车共运了 270 吨，问：

(1)乙车每次所运货物量是甲车每次所运货物量的几倍；

(2)现甲、乙、丙合运相同次数把这批货物运完时，货主应付车主运费各多少元(按每运 1 吨付运费 20 元计算).

解：(1)乙车每次所运货运量是甲车每次所运货物量的 2 倍.

(2)设甲车每次所运货物量为 x 吨，则乙车每次运 $2x$ 吨，用 T 表示这批货物的吨数由题意，得

$$\frac{T-180}{\frac{180}{x}}=\frac{T-270}{\frac{270}{2x}}.$$

解得 $T=540$(吨).

易知乙、丙每次所运货物量相同，甲、乙、丙合运 540 吨，其中甲运了 108 吨，乙、丙各运了 216 吨.

因此，货主应付甲：$108\times20=2160$(元).

分别付乙、丙：$216\times20=4320$(元).

要确定甲、乙、丙合运时应付车主的运费.关键是看各自所运的货物量，而各自所运的货物量又取决于甲、乙、丙每次所运的货物量.由已知条件可知甲、乙每次所运的货物量之间的关系，因此关键在于如何确定丙与甲、乙每次所运货物量的关系.

【例 5】已知关于 x 的方程 $kx^2+(2k-1)x+k-2=0$.

(1)若方程有实根，求 k 的取值范围；

(2)若此方程两实根为 x_1,x_2，且 $x_1^2+x_2^2=3$.求 k 的值.

解：(1)依题意，得

$$(2k-1)^2-4k(k-2)\geqslant0.$$

解得 $k\geqslant-\frac{1}{4}$.

所以 k 的取值范围是 $k \geqslant -\frac{1}{4}$.

(2)依题意,得

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3.$$

即 $\left(-\frac{2k-1}{k}\right)^2-2\cdot\left(\frac{k-2}{k}\right)=3$.

化简得

$k^2=1$,故 $k=\pm 1$.

上面解答有无错误?若有,指出错误之处,并直接写出正确答案.

解:上面两题解答均有错误,正确解答是:

(1)分 $k=0$ 和 $k\neq 0$ 两种情况.

当 $k=0$ 时,方程为 $-x-2=0$. 方程有实数解 $x=-2$;

当 $k\neq 0$ 时,方程为一元二次方程,此时需满足

$$\Delta=(2k-1)^2-4k(k-2)\geqslant 0.$$

解得 $k\geqslant -\frac{1}{4}$,k 的取值范围为 $k\geqslant -\frac{1}{4}$ 且 $k\neq 0$.

综上所述,k 的取值范围是 $k\geqslant -\frac{1}{4}$.

(2)解题过程略,解得 $k=\pm 1$ 后,考虑方程有实根的条件

$k\geqslant -\frac{1}{4}$. 故 $k=-1$ 舍去,k 应取 1.

本题要求学生不仅掌握方程的概念、一元二次方程根的判别式及韦达定理,同时考查学生仔细审题的能力. 当二次项系数含有字母时,需考虑字母的取值情况. 本题以阅读型试题的形式编拟,又以学生作业错解为素材,设计新颖.

【例 6】阅读下列材料:

$\because \frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right),\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right),$

$\frac{1}{5\times7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right),\cdots,\frac{1}{17\times19}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right),$

$$\begin{aligned}\therefore &\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{17\times19}\\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\\ &\quad\frac{1}{2}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{19}\right)=\frac{9}{19}.\end{aligned}$$

解答问题：

(1)在和式$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots$中，第五项为________，第 n 项为________，上述求和的想法是：通过逆用________法则，将和式中各分数转化为两个实数之差，使得除首、末两项外的中间各项可以________，从而达到求和的目的.

(2)解方程：

$$\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}+\frac{1}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+4)}+\cdots+\frac{1}{(\sqrt{x}+8)(\sqrt{x}+10)}=\frac{5}{24}.$$

解：(1)$\frac{1}{9\times11}$，$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，分数减法，互相抵消.

(2)原式方程化为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{1}{\sqrt{x}+4}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x}+8}-\frac{1}{\sqrt{x}+10}\right)=\frac{5}{24}.$$

即$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+10}\right)=\frac{5}{24}$.

整理,得

$$(\sqrt{x})^2+10\sqrt{x}=24.$$

$$(\sqrt{x}+12)(\sqrt{x}-2)=0.$$

$\therefore\sqrt{x}=2,\sqrt{x}=-12$(舍).

故 $x=4$.

经检验,$x=4$ 是原方程的解.

本题通过阅读材料理解拆项法,然后运用此法去解无理方程.

【例 7】"严肃"中学初三(1)班计划用勤工俭学收入的 66 元钱,同时购买单价分别为 3 元、2 元、1 元的甲、乙、丙三种纪念品,奖励参加校"艺术节"活动的同学.已知购买乙种纪念品的件数比购买甲种纪念品的件数多 2 件,而购买甲种纪念品的件数不少于 10 件,且购甲种纪念品的费用不超过总费用的一半.若购买的甲、乙、丙三种纪念品恰好用了 66 元钱,问可有几种购买方案,每种方案中购买的甲、乙、丙三种纪念品各多少件?

解:设购买甲种纪念品 x 件,购买丙种纪念品 y 件,则 $10\leqslant x\leqslant 11$,购买乙种纪念品为$(x+2)$件,由题意,得

$$3x+2(x+2)+y=66.$$

$$y=62-5x.$$

当 $x=10$ 时,$y=12$;

当 $x=11$ 时,$y=7$.

因此,可有两种购买方案:

第一种方案:购买纪念品甲种 10 件、乙种 12 件、丙种 12 件;

第二种方案:购买纪念品甲种 11 件、乙种 13 件、丙种 7 件.