数学题组教学法的理论与实践

（修订版） 解答和讲解

王文清 编著

石油大学出版社

数学题组教学法的理论与实践

解答与讲解

（修订本）

王文清　编著

石油大学出版社

数学题组教学法的理论与实践
解答与讲解
（修订本）
编著　王文清
*
石油大学出版社出版
（山东省东营市）
新华书店经销
石油大学印刷厂印刷
*
开本 787×1092　1/16　22.25 印张　721 千字
1997 年 3 月第 1 版　1997 年 3 月第 1 次印刷
印数 1—1000
ISBN 7-5636-0980-6/O・50
定价：25.00 元

目　录

题组训练解答

解题指导

题组训练解答

第一章　预备知识

§1.1　集合的概念

（一）再现型题组的解答与讲解

1.（1）$\{x|x=4n-3,n\in\mathbf{N}\}$.

（2）$\{(x,y)|x<0,y<0\}$.

讲解　（1）、（2）两题均是考查学生用描述法表示集合.所谓**描述法**，就是把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法.

（3）$\{-3,3\}$

讲解　此题主要是让学生再现用列举法表示集合.所谓**列举法**，就是把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法.

（4）$\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$.

讲解　此题主要让学生再现子集的概念及用列举法表示集合.所谓**子集**，对于两个集合 A、B，如果集合 A 的任何一元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集.记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）.当 A 不是 B 的子集时，记作 $A\nsubseteq B$（或 $B\nsupseteq A$）.

（5）$\varnothing$

讲解　该题主要让学生再现空集的意义及记法.空集：我们把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作 $\varnothing$，并规定空集是任何集合的子集（如（4））.

2. $\in,\subset,\supset,=,=$.

讲解　该题主要让学生再现并注意区分元素对集合的隶属关系与集合之间的包含（相等）关系.正确地使用符号 $\in,\notin,\subseteq,\nsubseteq,=$ 等等.①如果 a 是集合 A 的元素，就是 a 属于 A，记作 $a\in A$，如果 a 不是集合 A 的元素，就是 a 不属于 A，记作 $a\notin A$（或 $a\bar{\in}A$）.②如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**.记作 $A\subset B$（或 $B\supset A$）.当 A 不是 B 的真子集时，记作 $A\not\subset B$（或 $B\not\supset A$）.③如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么集合 A 与集合 B 叫做**相等**.记作 $A=B$.

3. D.

4. D

讲解　第 4 题在于让学生再现空集是任何非空集合的真子集的概念，并注意 $\varnothing$ 与集合 $\{0\}$ 的区别.

归纳、总结：集合的表示方法有两种（列举法、描述法）；搞清子集（真子集）、空集、集合相等等概念；搞清符号 $\in,\notin,\subseteq,\nsubseteq,\subset,\not\subset,=,\neq$ 的含义.

（二）巩固型题组的解答

5. **解**　$\varnothing\subset M\subseteq\{27,\frac{1}{27}\}$.

$\therefore M=\{27\}$ 或 $M=\{\frac{1}{27}\}$ 或 $M=\{27,\frac{1}{27}\}$.

6. **解**　$A=\{x|x=(a+1)^2+3,a\in\mathbf{R}\}=\{x|x\geqslant 3\}$，同理 $B=\{y|y\geqslant -1\}$，$\therefore A\subset B$.

7. **解**　$\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$.

（三）提高型题组的解答

8. **解**　$M=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$，

$N=\{x|(x-1)(x-a)\geqslant 0\}$.

若 $a>1$，则 $N=(-\infty,1]\cup[a,+\infty)$

$\because M\subseteq N$，$\because a\leqslant 2$.

若 $a=1$，则 $N=(-\infty,+\infty)$，显然 $M\subseteq N$.

若 $a<1$，则 $N=(-\infty,a]\cup[1,+\infty)$，

$\because M\subseteq N$，$\therefore a\geqslant -2$.

综上，$a\in[-2,2]$.

9. **解**　假设 $\begin{cases}a+d=aq & ①\\ a+2d=aq^2 & ②\end{cases}$

则由②－①得 $d=aq(q-1)$ 代入①，整理得 $q^2-2q+1=0$ 即 $q=1$.使 $a=aq=aq^2$，与元素的互异性相矛盾.假设不能成立.因此只能有

$$\begin{cases}a+d=aq^2 & ③\\ a+2d=aq & ④\end{cases}$$

由④－③，得 $d=aq(1-q)$ 代入③整理得

$2q^2-q-1=0$，解得 $q_1=-\frac{1}{2}$，$q_2=1$（舍去）.

$\therefore q=-\frac{1}{2}$.

讲解　通过本题明确集合相等的意义，进一步理解集合元素具有的互异性和无序性.

10. **解**　关于 x 的不等式 $4x+p<0$ 的解集 $A=\{x|x<-\frac{p}{4}\}$，不等式 $x^2-x-2>0$ 的解集 $B=\{x|x<-1$ 或 $x>2\}$，由已知 $A\subseteq B$，如图 1-1，则

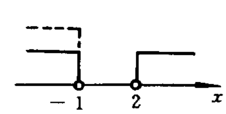


图 1-1

$-\frac{p}{4}\leqslant -1$,解得 $p\geqslant 4$.

讲解 本题体现了集合语言.集合思想的重要作用.用集合语言表示题中所给的两个不等式解集间的关系,准确、简明,再结合数轴问题得解.

11. **解** 由题设可得 $B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$,
$\therefore A\in B$.

课堂小结:1. 本节课复习的重点是集合的有关概念,要正确理解.2. 注意集合表示关系的两类符号 $\in$、$\notin$ 与 $\subset$、$\not\subseteq$ 的区别.

12. D B B C

13. **解** $\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}$ 共 7 个.

14. **解** $A=\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant -1\}$,$B=\{x|x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant -1\}$,$\therefore A\subset B$.

15. **解** 由 $x\subset\{1,2,3,4\}$ 知 x 是 $\{1,2,3,4\}$ 的最多含有三个元素的子集;又由 $\{1,2\}\subseteq x$ 知 1,2 必是 x 的元素.因此可得 $x=\{1,2\}$,或 $x=\{1,2,3\}$ 或 $x=\{1,2,4\}$.

16. **解** $\because A=B$,$\therefore 0\in A$ 且只能 $\lg(xy)=0$,$xy=1$,$\therefore x$ 与 y 同号且互为倒数,B 中有一元素为 1.

当 $x=y=1$ 时,$|x|=y$,根据集合中元素的互异性,不可能.

当 $x=y=-1$ 时,$A=\{-1,1,0\}$,

$B=\{0,1,-1\}$,

所以 $x=-1,y=-1$.

17. **解** (1) 设 $x\in A$,则 $x=f(x)\Rightarrow f(x)=f[f(x)]$.

$\therefore x=f[f(x)]$,$\therefore x\in B$,则 $A\subseteq B$.

(2) $\because A=\{-1,3\}$,

又 $A=\{x|x^2+(p-1)x+q=0\}$,

$\therefore\begin{cases}-(p-1)=2\\ q=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=-1\\ q=-3\end{cases}$

$\therefore f(x)=x^2-x-3$.

由 $x=f[f(x)]$ 得 $(x^2-2x-3)(x^2-3)=0$,

$\therefore\{-\sqrt{3},-1,\sqrt{3},3\}$.

18. **解** 首先求解集 A,由已知不等式得,

$-\frac{1}{2}(a-1)^2\leqslant x-\frac{1}{2}(a+1)^2\leqslant\frac{1}{2}(a-1)^2$

$\therefore 2a\leqslant x\leqslant a^2+1$,于是 $A=[2a,a^2+1]$

再求解集 B,已知不等式整理为

$(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$.

1°. 若 $3a+1\geqslant 2$,即 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时,$B=[2,3a+1]$;

2°. 若 $3a+1<2$,即 $a<\frac{1}{2}$ 时,$B=[3a+1,2]$;

当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时,$\because A\subseteq B$,$\therefore\begin{cases}2\leqslant 2a\\ a^2+1\leqslant 3a+1\end{cases}$

$\therefore 1\leqslant a\leqslant 3$;

当 $a<\frac{1}{3}$ 时,$\because A\subseteq B$,$\therefore\begin{cases}3a+1\leqslant 2a\\ a^2+1\leqslant 2\end{cases}$,$\therefore a=-1$

于是使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围是 $[1,3]\cup\{-1\}$.

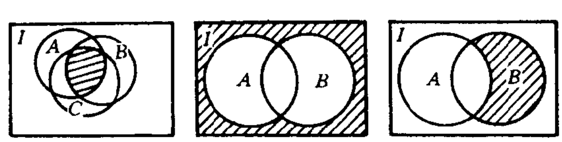
§1.2 集合的运算

(一)再现型题组的解答与讲解

1. **解** $A\cap B=\{3\}$,$A\cup B=\{1,3,4,5,6\}$,
$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2,7,8\}$,(或 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{2,7,8\}$),
$\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,2,4,5,6,7,8\}$.(或 $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=\{1,2,4,5,6,7,8\}$).

讲解 通过本例这一简单问题的解答,使学生回忆、再现交集、并集、补集、全集的概念.①由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素(即由集合 A、B 的所有公共元素)所组成的集合,叫做 A,B 的**交集**,记作 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.②由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合(即由 A、B 的所有元素组成的集合),叫做 A、B 的**并集**.记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.③已知全集 I,集合 $A\subseteq I$,由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合(即由 I 中去掉 A 的所有元素所剩下的全部元素所组成的集合),叫做集合 A 在集合 I 中的**补集**,记作 $\overline{A}$,即 $\overline{A}=\{x|x\in I$ 且 $x\notin A\}$.④记住 $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$,$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$,这样已知 A、B 求 $\overline{A}\cup\overline{B}$,$\overline{A}\cap\overline{B}$ 的问题,可分别转化为求 $\overline{A\cap B}$,$\overline{A\cup B}$ 的问题,这样解省时省力且不易出错.

2. 如图 1-2,



(a) (b) (c)

图 1-2

讲解 通过本题让学生回忆,再现用文氏图表示集合的方法.并进一步加深对交集、并集、补集、全集等概念的理解.

3. (1)A; (2)$\varnothing$; (3)=; (4)$\subseteq$; (5)=; (6)A; (7)=; (8)$\supseteq$; (9)I; (10)$\varnothing$; (11)A; (12)$\subseteq$.

讲解 通过这组问题的解答,使学生再现交集、并集、补集及之间的关系.

归纳、总结 要求学生正确理解集合交、并、补的意义及关系，并能熟练地进行集合的交、并、补等运算，会借助于文氏图表示集合关系.

（二）巩固型题组的解答

4. **解** $\because A\subseteq B, A\subseteq C$

$\therefore A\subseteq (B\cap C)=\{0,2,4\}$.

$\therefore a=\varnothing,\{0\},\{2\},\{4\},\{0,2\},\{0,4\},\{2,4\},\{0,2,4\}$.

5. **解** 先化简集合，$I=\{x|x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 2\}$，$A=\{x|x<1$ 或 $x>3\}$，$B=\{x|x\leqslant 1$ 或 $x>2\}$.

再借助于数轴. 得 $\overline{A}=\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}\cup\{1\}$. $\overline{B}=\{2\}$，$A\cap B=\{x|x<1$ 或 $x>3\}=A$，$A\cup B=\{x|x\leqslant 1$ 或 $x>2\}=B$，$A\cap\overline{B}=\varnothing$，$\overline{A}\cup B=\{x|x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 2\}=I$.

6. **解** 用文氏图表示集合 I,M,L 的关系；表示集合 M,L 的两个相交圈将表示全集 I 的矩形分成 4 个部分，它们分别表示：$M\cap\overline{L}$，$M\cap L$，$\overline{M}\cap L$，$\overline{M}\cap\overline{L}$，（如图 1-3），根据题设条件，在各部分填上相应元素，得 $M=\{2,3,4,7\}$，$L=\{1,4,6,7\}$.

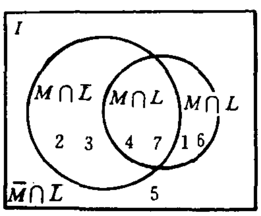


图 1-3

讲解 在进行集合运算时，应首先化简给定的集合（如题 5）；为了使集合的交、并、补等关系得到直观、形象的显示而利于运算，要十分重视数形结合、以形助数的解题思想方法的运用. 数集之间的运算常借助于数轴进行；一般集合借助于文氏图表示集合关系，往往可以使问题获得简明的解法. 如题 6. 利用文氏图将可以直接得到结果.

7. (1) **分析 1** 分别令 $K=\cdots,-1,0,1,2,3,\cdots$，得

$$M=\{\cdots,-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\cdots\},$$

$$N=\{\cdots,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4},\cdots\},$$

不难看出，$M\subset N$，因此选 C.

分析 2 实质上，$M=\{x|x=\frac{2k+1}{4}\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=\frac{k+2}{4}\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，易知 $M\subset N$，因此选 C.

分析 3 事实上，M 中的元素是由首项为 $\frac{\pi}{4}$，公差分别为 $\frac{\pi}{2}$ 与 $-\frac{\pi}{2}$ 的两串等差数列所组成，而 N 中的元素是由首项为 $\frac{\pi}{4}$，公差分别为 $\frac{\pi}{4}$ 与 $-\frac{\pi}{4}$ 的两串等差数列所组成. 由此也能得出 $M\subset N$.

(2) **分析 1** 显然 $B\subset A$，$\therefore \overline{B}\supset\overline{A}$.

$\therefore I=A\cup\overline{A}=A\cup\overline{B}$，因此选 C.

分析 2 显然 $B\subset A$，画文氏图（如图 1-4）. 易知，$A\cup\overline{B}=I$. 故选 C.

图 1-4

8. **解** $\because A\cup\overline{A}=I$，

$\therefore\{2,3,a^2+2a-3\}=\{2,5,|a+1|\}$，$\therefore |a+1|=3$，且 $a^2+2a-3=5$，解得 $a=-4$ 或 $a=2$，$\therefore M=\{\log_2|2|,\log_2|-4|\}=\{1,2\}$.

故 M 的子集有：$\{1\},\{2\},\{1,2\},\varnothing$.

（三）提高型题组的解答

9. **解** 将已知条件简化为 $B=\{2,3\}$，$C=\{-4,2\}$，$\because A\cap C=\varnothing$，$\therefore 2\notin A$，$-4\notin A$，又 $\because A\cap B\supset\varnothing$，即 $A\cap B$ 非空，$\therefore 3\in A$，即 3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的一个根，于是由 $9-3a+a^2-19=0$，得 $a=-2$ 或 $a=5$.

当 $a=5$ 时，$A=\{2,3\}=B$，这与 $2\notin A$ 矛盾，当 $a=-2$ 时，$A=\{3,-5\}$，即为所求.

10. **解** $A=\{x|-2<x<-1$ 或 $x>1\}$，

$\because A\cup B=\{x|x>-2\}$，$A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$.

$\therefore B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，即 $x=-1$，$x=3$ 为方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个根，由韦达定理得 $a=-2$，$b=-3$.

11. **解** $A=\{x|-2<x<3\}$，

$B=\{x|a<x<9+a\}$.

(1) 若 $A\subset B$，则 $a\leqslant -2$ 且 $3\leqslant 9+a$，得 $-6\leqslant a\leqslant -2$.

(2) 若 $A\cap B\neq\varnothing$，则 $a<3$ 且 $9+a>-2$，得 $-11<a<3$.

(3) $A\cap B=\varnothing$，则 $a\geqslant 3$ 或 $9+a\leqslant -2$，得 $a\geqslant 3$ 或 $a\leqslant -11$.

(4) 若 $\overline{A}\cup B=\overline{A}$，则 $B\subseteq\overline{A}$，$\therefore A\cap B=\varnothing$，得 $a\geqslant 3$ 或 $a\leqslant -11$.

12. **解** $A=\varnothing,\{a\},\{a\},\{b\}$，

$B=\{a,b\},\{a,b\},\{b\},\{a,b\}$，

$A=\{b\},\{a,b\},\{a,b\},\{a,b\},\{a,b\}$，

$B=\{a\},\{a,b\},\{a\},\{b\},\varnothing$，

共 9 组解.

13. **解** 易知 $B=\{1,2\}$，$\because A\cup B=B\Longleftrightarrow A\subseteq B$. 于是有以下四种情况：

(1) $A=\varnothing$，则 $\Delta=p^2-4q<0$，即 $p^2<4q$；(最易遗漏这一情况)；

(2) $A=\{1\}$，则 $1+1=-p$，$1\cdot 1=q$，$\therefore p=-2$，$q=1$；

(3) $A=\{2\}$，则 $2+2=-p$，$2\cdot 2=q$，$\therefore p=-4$，$q=4$；

(4) $A=\{1,2\}$，则 $1+2=-p$，$1\cdot 2=q$，$\therefore p=-3$，$q=2$.

讲解 ① 注意两个等价关系：$A\cup B=B\Longleftrightarrow A\subseteq B$；$A\cap B=B\Longleftrightarrow A\supseteq B$. ② 时刻不忘 $\varnothing\subseteq A$.

课堂小结：1. 本节课复习的重点是集合的交、并、补运算，要熟练掌握.

2. 文氏图的作用(数形结合).

3. 注意：$A\cup B=B\Longleftrightarrow A\subseteq B$；$A\cap B=B\Longleftrightarrow A\supseteq B$，$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$；$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$等结论的应用.

(四) 反馈型题组的解答

14. B A B D C

15. (1) $\{1\}$，$\{x\mid x\geqslant 1\}$，$\varnothing$，$\mathbf{R}$；(2) $\{3,4\}$，$\{1,3\}$；(3) 1，0，$\{-1,0,1\}$；(4) $\{0,1,4\}$，$\varnothing$.

16. **分析**：全集 I 是坐标平面内点的集合，A 表示直线 $x-y+1=0$ 上除去点(2,3)的所有点的集合，集合 $\overline{B}$ 表示直线 $y=x+1$ 上所有点的集合，所以 $\overline{A}\cap\overline{B}=\{(2,3)\}$.

17. **解** $A=\{x\mid x\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid x\geqslant 3\}$，

$\therefore\overline{A\cup B}=\{x\mid 0<x<3\}$.

18. **解** 由 $A\cup B=A$ 知 $B\subseteq A$. 有两种可能：

① $a^2-a+1=3$，即 $a=2$ 或 $a=-1$.

② $a^2-a+1=a$，即 $a=1$. 与集合元素互异性矛盾，应舍去，

$\therefore a=2$ 或 $a=-1$.

19. **解** $\because P\cup\overline{P}=I$，

$\therefore\begin{cases}3-a^2=-1\\a^2-a+2=4.\end{cases}$ 解得 $a=2$.

20. **解** 化简集合得，$A=\{x\mid x<-1$ 或 $x>2\}$，$B=\{x\mid x<-\frac{p}{4}\}$. 由 $B\subseteq A$，得 $-\frac{p}{4}\leqslant -1$，即 $p\geqslant 4$.

21. **解** 易证 $B=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$，

又 $\because A\cap B=A\Longleftrightarrow A\subseteq B$.

(1) 当 $\Delta=4^2-4p>0$，即 $p<4$ 时，

$A(-2-\sqrt{4-p},-2+\sqrt{4-p})$.

若要 $A\subseteq B$，当且仅当 $-2-\sqrt{4-p}\geqslant 2$ 或 $-2+\sqrt{4-p}\leqslant -1$，显然前式不能成立，故只能 $-2+\sqrt{4-p}\leqslant -1\Longleftrightarrow 3\leqslant p\leqslant 4$，又 $\because p<4$，故 $3\leqslant p<4$.

(2) 当 $\Delta=4^2-4p\leqslant 0$，即 $p\geqslant 4$ 时，$A=\varnothing$，因此也适合 $A\subseteq B$.

综合(1)、(2)得 $p\geqslant 3$.

22. **解** $\because -3\in B$，而 $a^2+1>0$. $\therefore$ 有两种可能：①$a-3=-3$ ②$2a-1=-3$.

由①得 $a=0$，这时 $a+1=1$，$a^2+1=1$，即 $1\in(A\cap B)$，与已知 $A\cap B=\{-3\}$ 矛盾.

由②得 $a=-1$，检验适合.

23. **解** $A=\{1,2\}$，

$$B=\{x\mid(x-1)[x-(a-1)]=0\},$$

$\because A\cup B=A$，即 $B\subseteq A$，$\therefore a=3$ 或 $a=2$.

$\because A\cap C=C$，$\therefore C\subseteq A$，$\therefore C=\varnothing$，$C=\{1\}$，$C=\{2\}$，$C=\{1,2\}$，其中 $C=\{1\}$，$C=\{2\}$ 不可能，

当 $C=\varnothing$ 时，$\Delta=m^2-8<0$，

$\therefore -2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$，

当 $C=\{1,2\}$ 时，$m=3$，综上所述 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$ 或 $m=3$.

24. 〔**方法一**〕若实数 a,b 使得①成立，则存在整数 m,n，使得 $\begin{cases}n=m\\na+b=3m^2+15\end{cases}$ 有解.

$\therefore na+b=3n^2+15$，$b=3n^2+15-na$.

又条件②成立，$\therefore a^2+(3n^2+15-na)^2\leqslant 144(n\in\mathbf{Z})$，即 $(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0$ 成立.

而 $\Delta=[-2n(3n+15)]^2-4(1+n^2)[(3n^2+15)^2-144]=-36(n^2-3)^2<0$，($\because n$ 是整数，$\therefore n^2-3\neq 0$).

故使条件①、②同时成立的实数 a、b 不存在.

[**方法 2**]若这样的 a、b 是存在的，则有 m、n 使得 $(n,na+b)=(m,3m^2+15)$，于是

$na+b-(3n^2+15)=0$

设原点到直线 $nx+y-(3n^2+15)=0$ 的距离为 d，则 $d=\frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}=6[\frac{\sqrt{n^2+1}}{2}+\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}]\geqslant 12$，其中“=”当且仅当 $\frac{\sqrt{n^2+1}}{2}=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$，即 $n^2=3$ 时成立，$\because n\in Z$，$\therefore$ 等号不成立，即 $d>12$.

又点 (a,b) 在直线 $nx+y-(3n^2+15)=0$ 上，所以 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant d>12$，这与题设 $a^2+b^2\leqslant 144$ 不符. 因此不存在满足①、②的实数 a 和 b.

§1.3 充要条件

(一) 再现型题组的解答与讲解

1. 充分条件,必要条件,必要条件;必要条件,充分条件.

2. 充分但不必要,必要但不充分,充要.

讲解 通过1、2两题的解答,使学生再现充要条件的有关概念.(1) 掌握充分条件.必要条件、充要条件的概念.如果$A\Rightarrow B$但$B\nRightarrow A$,那么称A是B成立的充分不必要条件;如果$B\Rightarrow A$但$A\nRightarrow B$,那么称A是B成立的必要不充分条件;如果$A\Rightarrow B$且$B\Rightarrow A$,那么称A是B成立的充分必要(简称充要)条件.(2) 能依据上述概念进行判定,并能够指导各种等价或非等价变换和推理与论证.

(二) 巩固型题组的解答

3. 充分但不必要,必要但不充分,充要.

4. D

5. **解** (1) 由$(x-1)(x+2)=0$得$x=1$或$x=-2$,由P不能推出Q,但$Q\Rightarrow P$,故P是Q的必要充分条件.

(2) 显然有$P\Longleftrightarrow Q$,故P是Q的充要条件.

(3) $x>5\Rightarrow x>2$,但$x>2$不能推出$x>5$,故P是Q的充分不必要条件.

(4) $b^2=ac$,当a、b、c部分或全部为零时,推不出$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$,但由$Q\Rightarrow P$,P是Q的必要不充分条件.

(5) $\theta\neq\frac{\pi}{3}$时,$\cos\theta$可能等于$\frac{1}{2}$,例如取$\theta=\frac{5\pi}{3}$,但$\cos\theta\neq\frac{1}{2}\Rightarrow\theta\neq\frac{\pi}{3}$,故$P$是$Q$的必要不充分条件.

(6) $x^2>y^2$不能推出$x>y$,同时$x>y$不能推出$x^2>y^2$,故P是Q的既不充分也不必要条件.

(7) $P\Rightarrow Q$,但Q不能推出P,故P是Q的充分不必要条件.

(8) P:$x=-3$且$y=4$,Q:$x=-3$或$y=4$,$P\Rightarrow Q$,而Q不能推出P,故P是Q的充分不必要条件.

(9) 由$0.1^{\lg x^2}>1\Rightarrow\lg x^2<0\Rightarrow x^2<1$且$x\neq 0$,所以由$P\Rightarrow Q$,但$Q$不能推出$P$,故$P$是$Q$的充分不必要条件.

(10) 由韦恩$P\Longleftrightarrow Q$,故P是Q的充要条件.

(11) 充要条件.

(12) 必要不充分条件.

(三) 提高型题组的解答

6. $ac<0$;$b^2-4ac\geqslant 0$,$ac>0$,$ab<0$;$b^2-4ac\geqslant 0$,$ac>0$,$ab>0$;$c=0$,$ab<0$;$b^2-4ac<0$,$a>0$;$a<0$,$b^2-4ac<0$.

7. **提示**:依题设有乙$\Rightarrow$甲①、丙$\Rightarrow$乙②,乙$\nRightarrow$丙③.

由①、②知,丙$\Rightarrow$甲,故丙是甲的充分条件.

假设丙也是甲的必要条件,即甲$\Rightarrow$丙④.

则由①、④知,乙$\Rightarrow$丙,这与已知的③相矛盾,假设错误.

故丙不是甲的必要条件,从而应选A.

8. C C B D.

提示:(2) $\sin^2\theta+a\sin\theta+1=0$有解$\Rightarrow\Delta=a^2-4\geqslant 0\Rightarrow|a|\geqslant 2$,$\therefore$必要.若$|a|\geqslant 2$,则以$\sin\theta$为未知数的二次方程必有两实根,$\because$两根之积为1,两根中必有一根的绝对值小于等于1.$\therefore\theta$有解,$\therefore$充分.

(3) $\because\log_m P\geqslant 0$,$\therefore M\nRightarrow N$,不充分,若$N$成立,则$\log_m P\neq 0$而$\log_m P>0$,$\therefore N\Rightarrow M$,$\therefore$必要.

(4) 如图1-5,M:平面上除$x=3$及$y=2$以外的所有点,显然点$(4,1)$使M成立,但N不成立,$\therefore$不充分,N:平面上不在$x+y=5$上所有点,点$(3,1)$使N成立,但M不成立,$\therefore$不必要.

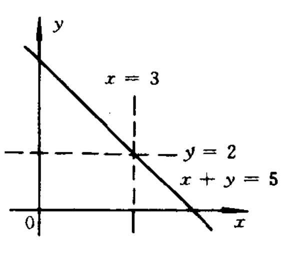


图 1-5

9. **解** 二次不等式$ax^2-ax+1>0$对一切$x\in\mathbf{R}$恒成立$\Longleftrightarrow$二次函数$y=ax^2-ax+1$的图象全在x轴上方

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}a>0\\\Delta=a^2-4a<0\end{cases}\Longleftrightarrow 0<a<4.$$

说明:这里a的取值范围"$0<a<4$"就是"二次不等式$ax^2-ax+1>0$对一切$x\in\mathbf{R}$都成立"的充要条件;充要条件与等价变换($\Longleftrightarrow$)紧密相联,大凡求某一字母的范围(某几个字母满足的条件),使某一结论成立,或由某一结论成立,求其中某个字母的取值范围(某几个字母参数满足的条件)之类的问题,都是在寻求使这一结论成立的充要条件,往往都要用到等价变换.

10. **分析**:作充要条件论证时,首先要判定命题中的条件是什么,结论是什么,这里条件是"$a+b+c=0$"结论是"关于x的方程$ax^2+bx+c=0$有根$x=1$".其次要分清充分性和必要性各要证明什么命题,然后分别证明.

证明 (1) 必要性:即要证"若$x=1$是关于x的

方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，则 $a+b+c=0$”.

∵$x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，

∴$a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0$. 即 $a+b+c=0$.

(2) 充分性：即要证：“若 $a+b+c=0$，则 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根”.

∵$a+b+c=0$，把 $x=1$ 代入方程 $ax^2+bx+c=0$ 的左边，得左边 $=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c=0$.

∴$x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

由(1)(2)可得原命题成立.

11. **分析**：本题是求使两个一元二次方程的根都是整数的充要条件，我们可以先求两方程有实根的充要条件，再从中筛选、验证.

解 设①、②两个一元二次方程的判别式分别为 Δ_1、Δ_2.

$$\begin{cases}\Delta_1=16-4m\cdot 4\geqslant 0,\\ \Delta_2=16m^2-4(4m^2-4m-5)\geqslant 0.\end{cases}$$

解得 $-\dfrac{5}{4}\leqslant m\leqslant 1$. 又 $m\in \mathbf{Z}$，所以 $m=-1$，$m=0$，$m=1$.

当 $m=-1$ 时，方程①为 $x^2+4x-4=0$ 无整数根；

当 $m=0$ 时，方程①首项系数为零，不是一元二次方程；

当 $m=1$ 时，①、②两方程分别为 $x^2-4x+4=0$，$x^2-4x-5=0$，其根均为整数.

所以，当 $m=1$ 时，两方程的根均为整数.

12. **解** 线段 AB：$x+y=3(0\leqslant x\leqslant 3)$，代入抛物线方程得 $x^2-(m+1)x+4=0(0\leqslant x\leqslant 3)$.

令 $f(x)=x^2-(m+1)x+4$，则原问题等价于 $f(x)=0$ 在 $[0,3]$ 内有且仅有一根.

(i)$\Delta=(m+1)^2-16=0$，且 $\dfrac{m+1}{2}\in[0,3]$.

由 $\Delta=0$ 得 $m=-5$ 或 $m=3$，但当 $m=-5$ 时，$\dfrac{m+1}{2}\notin[0,3]$，故 $m=3$.

(ii)$f(0)\cdot f(3)<0\Longleftrightarrow 4\cdot[9-3(m+1)+4]<0$ $\Longleftrightarrow m>\dfrac{10}{3}$.

(iii)$f(3)=0$ 时，得 $m=\dfrac{10}{3}$. 但此时方程为 $x^2-\dfrac{13}{3}x+4=0\Longleftrightarrow x=3$ 或 $x=\dfrac{4}{3}$，这时 $f(x)=0$ 在 $[0,3]$ 上有两根，故应舍去.

(iv)$f(0)=0$ 时，$m\in\varnothing$.

综上所述，$m=3$ 或 $m>\dfrac{10}{3}$ 为所求.

[注] 有且仅有一个交点的充要条件实质上就是确定参数 m 的值的问题.

课堂小结：1. 本节课的重点是理解充分条件、必要条件、充要条件的含义，并通运用上述概念进行推理、判断.

2. 充要条件的渗透面很广，两个命题的充要关系是化归的基础.

(四) 反馈型题组的解答

13. BAACA DBAAA

14. (1) 充分. (2) $0\leqslant m\leqslant\dfrac{1}{3}$. (3) 充要. (4) 充分不必要. (5) 充分不必要，必要不充分.

15. 由偶函数的定义证明之.

16. 由方程 $x^2-2mx+m^2-1=0$，解得两根 $x_1=m-1$，$x_2=m+1$. 由 $-2<m-1<4$ 且 $-2<m+1<4$，得 $-1<m<3$.

17. **解** $M\cap N\neq\varnothing$ 的充要条件是

$$\begin{cases}y^2=2x\\ (x-a)^2+y^2=9\end{cases}$$ 至少有一组实数解，

也即 $x^2+2(1-a)x+a^2-9=0$ 至少有一个非负根，由 $\Delta\geqslant 0$ 得 $a\leqslant 5$，又上述方程有两个负根的充要条件是 $x_1+x_2<0$ 且 $x_1x_2>0$，即 $-2(1-a)<0$ 且 $a^2-9>0$，解得 $a<-3$. 于是这个方程至少有一非负根的 a 的取值范围是 $-3\leqslant a\leqslant 5$. 此即所求的充要条件.

[注] 本题的解答过程用到了“正难则反”策略.

18. **解** $a_1=S_1=p+q$，当 $n\geqslant 2$ 时，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=p^{n-1}(p-1).$$

∵$p\neq 0$，$p\neq 1$，∴$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{p^n(p-1)}{p^{n-1}(p-1)}=p$.

若 $\{a_n\}$ 为等比数列，则 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=p$，

∴$p(p-1)=(p+q)\cdot p$，∴$p(q+1)=0$，

∵$p\neq 0$，∴$q=-1$. 这是 $\{a_n\}$ 为等比数列的必要条件. 反之，若 $q=-1$，$a_1=p-1$ 也适合 $a_n=p^{n-1}(p-1)$. 故 $a_n=p^n(p-1)(n\in \mathbf{N})$. 则 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=p(n\in\mathbf{N})$，

∴$\{a_n\}$ 是等比数列，∴$q=-1$ 是 $\{a_n\}$ 为等比数列的充分条件.

故所求的充要条件是 $q=-1$.

§1.4 综合法、分析法、分析综合法

(一) 再现型题组的解答与讲解

1. **证明** ∵$2\lg\dfrac{x+y}{2}=\lg x+\lg y$，

∴$\lg\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\lg xy$，∴$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=xy$，

$\therefore (x+y)^2=4xy$，$\therefore x^2+y^2-2xy=0$，

$\therefore (x-y)^2=0$，$\therefore x=y$.

讲解 通过该题的证明，目的是让学生再现证明问题的综合法及证题格式. **综合法**是从命题的条件出发，经过正确的推理，得到命题结论的方法，它的特点是依照由因导果的顺序去思考和论证. 其证题格式为：∵……，∴…….

2. **证明** 欲证 $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}>\sqrt{5}-2\Leftarrow$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}>\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}\Leftarrow$

$\sqrt{5}+2>\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

$\because \sqrt{5}>\sqrt{3}$，$2>\sqrt{2}$，

$\therefore \sqrt{5}+2>\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 成立，

故 $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}>\sqrt{5}-2$ 成立.

讲解 本题是用的分析法. **分析法**是依次寻找使命题结论成立的充分条件，直到这个充分条件显然成立时，从而断定命题结论的一种方法. 分析法的思考顺序和综合法相反，是执果索因. 其证题格式为：欲证……⇐(只需证)…….

3. **证法一** 联想到结论"如果 $a,b\in\mathbf{R}$，$ab=0$，则 a,b 中至少有一个为零"，启发我们将复数 $\xrightarrow[\text{取模}]{\text{转化}}$ 实数，

$\because z_1\cdot z_2=0$，$\therefore |z_1\cdot z_2|=0$，$\therefore |z_1|\cdot z_2|=0$，

$\because |z_1|,|z_2|\in\mathbf{R}$，$\therefore |z_1|=0$ 或 $|z_2|=0$，

$\therefore z_1=0$ 或 $z_2=0$，即 z_1,z_2 中至少有一个为零.

证法二 学生较难想到证法一，而往往设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，这时，由 $z_1\cdot z_2=0$ 得 $(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}=0$. 于是 $\begin{cases}ac-bd=0 & (1)\\ ad+bc=0 & (2)\end{cases}$

以下思路不明？转而用分析法.

欲证 $z_1=0$ 或 $z_2=0\Leftarrow\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}c=0\\d=0\end{cases}\Leftarrow a^2+b^2=0$ 或 $c^2+d^2=0\Leftarrow(a^2+b^2)(c^2+d^2)=0\Leftarrow a^2c^2-a^2d^2+b^2c^2+c^2d^2=0$

注意观察(1)、(2)、(3)式，不难发现 $(1)^2+(2)^2\Rightarrow(3)$. 思路已探明，证明略.

讲解 证法一是用的综合法，证法二是联合运用的分析法和综合法，我们称之为**分析综合法**. 即实际应用中常常联合运用分析法和综合法，如果要证明的命题是"若 A，则 B"，那么分析综合法的思维方式为：

①用综合法，由因导果. $A\Rightarrow C_1\Rightarrow C_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow C_n$.（下步怎么办？思路不十分清楚）；

②用分析法，执果索因. $B\Leftarrow C'_1\Leftarrow C'_2\Leftarrow\cdots\Leftarrow C'_n$；

③如果 C_n 与 C'_n 已相同，则证明思路探明.

归纳、总结：掌握综合法、分析法、分析综合法及其证题格式.

（二）巩固型题组的解答

4. **证法 1(分析法)**：欲证 $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}\Leftarrow(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2\Leftarrow 9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18}\Leftarrow 2\sqrt{14}<2\sqrt{18}\Leftarrow\sqrt{14}<\sqrt{18}\Leftarrow 14<18$.

$\because 14<18$ 成立，

$\therefore \sqrt{2}<\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 成立.

证法 2(分析综合法)：欲证

$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}\Leftarrow$

$\sqrt{7}-\sqrt{6}<\sqrt{3}-\sqrt{2}\Leftarrow$

$\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}<\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\Leftarrow$

$\sqrt{3}+\sqrt{2}<\sqrt{7}+\sqrt{6}$.

$\because 3<7$，$2<6$，$\therefore \sqrt{3}<\sqrt{7}$，$\sqrt{2}<\sqrt{6}$

$\therefore \sqrt{3}+\sqrt{2}<\sqrt{7}+\sqrt{6}$ 成立，

$\therefore \sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 成立.

5. **思路分析** 先用综合法. 由条件⇒

$z^2-2xz+x^2+4xz-4xy+4y^2-4yz=0\Rightarrow$

$z^2+x^2+2xz-4xy+4y^2-4yz=0$ ①

但是，下一步怎么办？有些人由于对①式左边的多项式不会分解，结果把题目做到中途而夭折了. 然而如转而观察结论，再采用分析法.

欲证 x,y,z 成等差数列 $\Leftarrow x+z=2y\Leftarrow$(注意到①式右边为 0)$x+z-2y=0\Leftarrow$(注意到①式左边为三元二次式)$(x+z-2y)^2=0\Leftarrow(x+z)^2-4(x+z)\cdot y+4y^2=0\Leftarrow x^2+2xz+z^2-4xy-4yz+ry^2=0$ ②

比较①、②知，二式相同，证明思路探明.

［注］ 本题亦可通过构造一元二次方程 $(x-y)t^2+(z-x)t+(y-z)=0(x\neq y$，其中 $x=y$ 时另证)进行证明.

（三）提高型题组的解答

6. **思路分析** 用综合法，由条件得

$\begin{cases}3\sin^2\alpha=\cos 2\beta & ①\\ \sin 2\beta=3\sin\alpha\cos\alpha & ②\end{cases}$

$\therefore \sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos\alpha\sin 2\beta=\sin\alpha\cdot 3\sin^2\alpha+\cos\alpha\cdot 3\sin\alpha\cos\alpha=3\sin\alpha$.

解答者本意是想得到 $\sin(\alpha+2\beta)=1$，有的人到

此可能灰心丧气，笔一挥前功尽弃，而会思维的人不同，到此马上断定必有 $3\sin\alpha=1$，即 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.（这就用了分析法），并由此想到由条件肯定能推出 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. 通过思考，由①^2＋②^2 消去 2β 得：$\sin^2\alpha=\frac{1}{9}$，又 $\because\alpha$ 为锐角，$\therefore\sin\alpha=\frac{1}{3}$，故 $\sin(\alpha+2\beta)=1$，

又 $\because\alpha$、β 均为锐角，$\therefore 0<\alpha+2\beta<\frac{3\pi}{2}$.

$\therefore\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

［注］（1）由以上两题的思路分析可以看到，分析法和综合法在思维过程中总是被统一运用着，但有时分析法居主导地位，而综合法辅助它；有时综合法居主导地位，而分析法辅助它.

（2）本题如改为计算 $\cos(\alpha+2\beta)$ 要简便的多.

$\therefore\cos(\alpha+2\beta)=\cos\alpha\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta=$

$\cos\alpha\cdot 3\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot 3\sin\alpha\cos\alpha=0$.

（以下略）.

（3）本题如改为用切函数处理，则更简便. 由①、②证 $\mathrm{tg}\,2\beta=\mathrm{ctg}\,\alpha=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)$.

$\because\alpha$、β 为锐角，$\therefore 2\beta\in(0,\pi)$，$\frac{\pi}{2}-\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\therefore 2\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$，$\therefore\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

7. **思路分析** 先用综合法. 由条件 $\Rightarrow A+C=2B$

$\because A+B+C=180°\Rightarrow B=60°$，但是，下一步怎么办？思路不十分清楚，再用分析法.

欲证：$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}\Leftarrow$

$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=3\Leftarrow\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}=1\Leftarrow$

$c(b+c)+a(a+b)=(a+b)(b+c)\Leftarrow$

$b^2=a^2+c^2-ac$ ③

由于出现了三角形的三边平方项，很容易想到用余弦定理，再从已知条件考虑用综合法. 由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$\because B=60°$

$\therefore b^2=a^2+c^2-ac$ ④.

比较③、④知，二式相同，证明思路探明.

［注］由本题的思路分析可以看到，有时分析法和综合法还应两者结合，交替使用.

8. **思路分析** 先用综合法. 由条件 $\Rightarrow$

$(x^2-yz)(y-xyz)=(y^2-xz)(x-xyz)\Rightarrow$

$x^2y-y^2z-x^3yz+xy^2z^2=$

$xy^2+x^2yz^2-x^2z-xy^2z$ ⑤

但是，以下思路不明. 再用分析法.

欲证：$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Leftarrow$

$(\because xyz\neq 0)x^2yz+xy^2z+xyz^2=yz+zx+xy$ ⑥

⑤与⑥比较，差距较大，但注意到⑤式为三元五次式，而⑥式为三元四次式及还有一条件 $x\neq y$ 未用. 故猜测由⑤到⑥的过程中可能在⑤式的两边约去了因式 $x-y$. 由此⑤式变为：

$\Rightarrow xy(x-y)+z(x^2-y^2)=xyz(x^2-y^2)+xyz^2(x-y)(\because x-y\neq 0)\Rightarrow$

$xy+z(x+y)=zyx(x+y)+xyz^2\Rightarrow$

$x^2yz+xy^2z+xyz^2=xy+zx+yz$ ⑦

比较⑥、⑦知，二式相同，证明思路探明.

课堂小结 分析综合法是一种十分重要的推理方法，其实质是"两头凑"——既充分利用已知条件，又时刻盯住解题目标. 不仅搞清楚知道些什么，能推出什么——由已知看可知，还要搞清干什么，需要什么——由目标看需知（目标导航）.

（四）反馈型题组的解答

9. **提示** 可用分析法，亦可用综合法证明.（见代数课本下册 P_{13} 例 9）.

10. 仿第 4 题即可得证.

11. **证明** 由 $a+b>0$ 可得 $a>-b$，$b>-a$.

而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数

$\therefore f(a)>f(-b)$，$f(b)>f(-a)$

于是 $f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$.

12. **证明** $\because 0<x<\pi$，故 $0<\sin x<1$，欲证原不等式成立，只要证 $2-\cos x\geqslant\sqrt{3}\sin x$，即证 $\sqrt{3}\sin x+\cos x\leqslant 2$，即证 $\sin(x+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$，这显然是成立的，故原命题成立.

13. **证明** 由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

得 $ab+bc+ca=0$ ①

欲证 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$ 成立. 只要证 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=a^2+b^2+c^2$，即证 $ab+bc+ca=0$，由①知这是成立的，故原命题成立.

14. **思路分析** 先用综合法. 由条件 $\Rightarrow a+c=2b$.（注意到结论是角的关系）$\Rightarrow\sin A+\sin C=2\sin B$（注意到结论中是半角）

$\Rightarrow 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$.

$(\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}\neq 0)$

$\Rightarrow\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$ ①

但是，下一步怎么办？思路不明，转而用分析法：

欲证 $\operatorname{ctg}\frac{A}{2},\operatorname{ctg}\frac{B}{2},\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ 成等差数列.

$$\Leftarrow \operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=2\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\Leftarrow$$

$$\frac{\sin\frac{A+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}=2\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\Leftarrow$$

$$\frac{2\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A-C}{2}-\cos\frac{A+C}{2}}=2\cdot\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\Leftarrow$$

$$\cos\frac{A-C}{2}-\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\Leftarrow$$

$$\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}. \qquad ②$$

比较①、②知,二式相同,证明思路探明.

15. **证明** 左繁右简,故应从左⇒右,右式是"果"式,注意到"果"式中仅含 $\cos x$,故应将左式中的各项均用 $\cos x$ 表示.

左式 $=2\sin^4x+3\sin^2x\cos^2x+5\cos^4x-(4\cos^3x-3\cos x)\cos x=$

$2(1-\cos^2x)^2+3(1-\cos^2x)\cos^2x+5\cos^4x-4(\cos^3x-3\cos x)\cos x=$

$2(1+\cos^2x)=$ 右式.

【注】本题从证明开始自始至终盯住解题目标. 解题目标既是目的,又是我们努力的方向. 只有方向明确,才有可能不使我们误入歧途,证明(求解)才能顺利完成,始终盯住解题目标是解题的一个重要策略.

17. **解** 易证:$Rt\Delta FHA\backsim Rt\triangle BOA$.

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{|FH|}{|OB|}=\frac{|AF|}{|AB|}\cdot$$

$$\because |AF|=a-c,\ |AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2a^2-c^2},$$

$$\therefore \frac{a-c}{\sqrt{2a^2-c^2}}=\frac{1}{\sqrt{7}},\ \therefore 7(a-c)^2=2a^2-c^2,$$

$$\therefore 5a^2-14ac+8c^2=0, \qquad (*)$$

〔以下思路不明? 原因是有的同学认为要求 e,需分别求出 a、c 才行,对解题目标理解的这一偏差,导致很多同学无法进行下去,这里分别求出 a、c 是不可能的,甚至有的同学认为题目缺条件,实际上,注意到解题目标是求 e(而不是求 a、c),所以只需求得 $\frac{c}{a}$ 即可. 这启发我们,将($*$)变为〕.

$$\therefore 8(\frac{a}{c})-14(\frac{c}{a})+5=0\Longleftrightarrow$$

$$(2\frac{c}{a}-1)(4\frac{c}{a}-5)=0\Longleftrightarrow$$

$$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\text{或}\frac{c}{a}=\frac{5}{4}(\text{舍去},\because 0<\frac{c}{a}<1)$$

$$\therefore e=\frac{1}{2}.$$

〔注〕 只所以在最后安排一个求解题,目的在于说明"分析综合法"不仅适用于证明题,也能指导求解题的思考. 分析综合法的实质是既充分利用已知条件,又时刻利用(或盯住)解题目标(即始终方向明确). 即不仅搞清知道什么? 能推出什么? 还要搞清干什么? 需要什么? 时刻盯住解题目标的确是解题的一个重要策略,设置本题在于提醒同学们在解求解题时,既要充分利用已知条件,又要充分利用解题目标所提供的信息. 同学们不妨试试看,相信你定有收获.

§1.5 反证法 数学归纳法

(一)再现型题组的解答与讲解

1. **证明** (**反证法**)假设等式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+=\frac{1}{x+y}$ 成立,则 $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{x+y}$,$\therefore (x+y)^2=xy$.

$\therefore x^2+y^2+xy=0$,$\therefore (x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2=0$.

$\because x$、$y\in\mathbf{R}$,$\therefore (x+\frac{y}{2})^2=0$ 且 $\frac{3}{4}y^2=0$.

$\therefore x=0$ 且 $y=0$ 这与已知 x、y 取非零实数相矛盾,因此,假设不成立,故原命题得证.

讲解 本题在于让学生再现反证法及用反证法证题的基本步骤.

(1)反证法是一种间接证法,反证法是从要证明的结论的否定出发,以有关的定义、公理、定理为依据,结合命题的条件进行推理,直到得出矛盾(如与定义、公理、定理或命题的条件相矛盾或者得到自相矛盾的结果),从而断定命题结论的否定不能成立,也就断定了命题成立.

(2)运用反证法时,其主要步骤可概括为:否定结论—推出矛盾—否定假设—肯定结论. 在上述四步中,第二步是关键.

(3)以下类型的问题常适合用反证法进行证明:命题是否定形式;命题的形式涉及"唯一性";命题的结论中有"至多"或"至少"字眼.

2. **证明**(**数学归纳法**):

(1)当 $n=1$ 时,左 $=1\cdot4=4$,右边 $=1\cdot(1+1)^2=4$,等式成立.

(2)假设当 $n=k$ 时,等式成立,

即 $1\cdot4+2\cdot7+\cdots+k\cdot(3k+1)=k(k+1)^2$.

那么当 $n=k+1$ 时,

$1\cdot4+2+\cdots+k(3k+1)+(k+1)[3(k+1)+1]$

$=k\cdot(k+1)^2+(k+1)(3k+4)$

$=(k+1)[k^2+4k+4]=(k+1)\cdot[(k+1)+1]^2$

这就是说当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

据(1)、(2)知等式对 $n\in N$ 都成立.

讲解 本例在于让学生再现数学归纳法及其步骤.数学归纳法是一种完全归纳法,它适用证明与自然数集 N 或由 N 的无穷多个元素组成的子集有关的命题.掌握用数学归纳法证题的一般步骤,并在实施过程中注意如何完成"假设 $n=k$ 时命题成立,证明当 $n=k+1$ 时命题也成立".

(1) 一般步骤是(三步)

① 证明当 n 取第一个值 n_0 时,结论正确.

② 假设当 $n=k(k\in N$,且 $k\geqslant n_0)$时结论正确,证明当 $n=k+1$ 时结论也正确.

③ 据①、②知,命题对于不小于 n_0 的所有自然数 n 都正确.

(2) 完成第二步证明,其实质是"一凑假设,二凑结论".

归纳、总结 数学归纳法与反证法是两种重要的证题方法,要理解其实质,掌握证题步骤,并能自觉用于解答问题.

(二) 巩固型题组的解答

3. **证明**:假设两个方程均无实根,则 $\Delta_1=4b^2-4a<0$ 且 $\Delta_2=4d^2-4c<0$,即 $a>b^2$ 且 $c>d^2$,

$\therefore a+c>b^2+d^2\geqslant 2bd.$ ①

而题设 a、bd、c 三数成等差数列,$\therefore a+c=2bd$ ②

①、②两式出现矛盾,因此假设不成立,故原命题得证.

讲解 本题若用直接法证明,需要技巧,且需知道这样一个实事."若 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a+b\geqslant0$,则 $a\geqslant0$ 或 $b\geqslant0$,即 a,b 中至少有一个不小于零."(注意:反之,则不然).

证明 $\because \Delta_1=4b^2-4a,\Delta_2=4d^2-4c$,

$\therefore \Delta_1+\Delta_2=4[b^2+d^2)-(a+c)]=$

$4[b^2+d^2-2bd]$

($\because$由题设 $a.bd,c$ 成立等差数列知,$a+b=2bd$)

$=4(b-d)^2\geqslant0.$

$\therefore \Delta_1,\Delta_2$ 中至少有一个不小于零,故两个方程中至少有一个方程有实根.

4. **证明** (1) 当 $n=1$ 时,$6^{2n-1}+1=6+1=7$,显然能被 7 整除.

(2) 假设当 $n=k$ 时,命题成立,即 $6^{2k-1}+1$ 能被 7 整除,那么,当 $n=k+1$ 时,

$6^{2(k+1)-1}+1=6^2\cdot6^{2k-1}+1=$

$6^2\cdot(6^{2k+1}+1)-35$

[或变形为:$35\cdot6^{2k-1}+(6^{2k-1}+1)$]

$\because 6^2\cdot(6^{2k-1}+1)$、$-35$ 均能被 7 整除.

$\therefore 6^2(6^{2k-1}+1)-35$ 能被 7 整除.

这就是说:当 $n=k+1$ 时,命题也成立.

由(1)、(2)可知对一切 $n\in N$ 命题都成立.

讲解 通过本题的证明可以清楚地看到用数学归纳法证题第二步的关键是"一凑假设、二凑结论".

5. **解** $S_n=\dfrac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}(n\in\mathbf{N})$.

证明(1) 当 $n=1$ 时,$S_1=\dfrac{3^2-1}{3^2}=\dfrac{8}{9}$,等式成立,

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立,即

$$S_k=\frac{2k+1)^2-1}{(2k+1)^2},$$

那么 $S_{k+1}=S_k+\dfrac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}=$

$\dfrac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}+\dfrac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}=$

$\dfrac{[(2k+1)^2-1](2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}=$

$\dfrac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}=$

$\dfrac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+1)^2}{(2k+1)^2(2k+3)^2}=$

$\dfrac{(2k+3)^2-1}{(2k+3)^2}=\dfrac{[2(k+1)+1)]^2-1}{[2(k+1)+1]^2}$

这就是说当 $n=k+1$ 时等式成立.

由(1)、(2)知,等式对一切自然数 n 都成立.

讲解 本题是一个探索性问题,考查观察,分析,归纳的能力和数学归纳法.观察—归纳—猜想—证明是一个完整的思维过程,既需要探求和发现结论,又需要证明所得结论的正确性,这是一种重要的思维能力,本题中的 S_1,S_2,S_3,S_4 是可根据已知数列的通项公式计算求得的.第二步用到了事实."$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$",这是完成第二步证明的关键.

6. **证明** (1) 当 $n=1$ 时,左式$=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.右式$=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$,等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立,即

$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k}=$

$\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}+\cdots+\dfrac{1}{2k}$,那么

$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k}+\dfrac{1}{2k+1}-$

$\dfrac{1}{2k+2}=\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}+\cdots+\dfrac{1}{2k}+\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+2}=$

$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}]=$

$\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k-1)}$.

这就是说当 $n=k+1$ 时等式也成立.

据(1)、(2)知等式对任何自然数 n 都成立.

讲解 这一等式的左边共 $2n$ 项,右边共 n 项,从 $n=k$ 到 $n=k+1$,左式增两项,右式增一项,而且右式的首项不同,因此证明中采用将 $\frac{1}{k+1}$ 与 $-\frac{1}{2k+2}$ 合并的变形,这是在分析 $n=k$ 与 $n=k+1$ 右式的差异和联系及受"凑结论"的启发找到的方法.

(三) 提高型题组的解答

7. **证明** 假设 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 成等差数列,则

$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$,即 $2ac=b(a+c)$ ①

又已知 a,b,c 成等差数列,则有

$2b=a-c$ ②

将②式代入①式,得 $2ac=\frac{1}{2}(a+c)^2$.

即 $(a-c)^2=0$.

得 $a=c$,这与已知 $a\neq c$ 矛盾,因此,假设不成立,故命题得证.

8. **证明**(反证法) 设当 $x_1\neq x_2$ 时,有

$f(x_1)=f(x_2)$ 成立,即 $\frac{x_1}{1+|x_1|}=\frac{x_2}{1+|x_2|}\Rightarrow$ ①

$x_1+x_1|x_2|=x_2+x_2|x_1|$ ②

由①又 $x_1\neq x_2$,所以 x_1、x_2 同号,当 $x_1>0,x_2>0$ 时,由② $x_1+x_1x_2=x_2+x_2x_1$ 得 $x_1=x_2$,与 $x_1\neq x_2$ 矛盾;当 $x_1<0,x_2<0$ 时,$x_1-x_1x_2=x_2-x_1x_2$ 得 $x_1=x_2$ 与 $x_1\neq x_2$ 矛盾,故原命题成立.

9. **证明** 当 $n=1$ 时,$3^1>(1+1)!$,

当 $n=2$ 时,$3^2>(2+1)!$,

当 $n=3$ 时,$3^3>(3+1)!$,

当 $n=4$ 时,$3^4<(4+1)!$,

当 $n=5$ 时,$3^5<(5+1)!$,

……由以上猜想,当 $n\leqslant 3$ 时,$3^n>(n+1)!$,当 $n>3$ 时,$3^n<(n+1)!$.

当 $n\leqslant 3$ 时,$3^n>(n+1)!$ 上边已验证成立,现用数学归纳法证明:当 $n>3(n\in\mathbf{N})$ 时,$3^n<(n+1)!$,

①当 $n=4$ 时,命题成立已证.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}$ 且 $k>3)$ 时,$3^k<(k+1)!$,那么,当 $n=k+1$ 时,

$3^{k+1}=3\cdot 3^k<(k+1)!\cdot 3<(k+1)!\cdot(k+2)$

$\therefore 3^{k+1}<(k+2)!$

这就是说,当 $n=k+1(k\in\mathbf{N},k>3)$ 时命题成立.

由①、②知对一切 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n>3$,$3^n<(n+1)!$ 成立.

[注] 本题通过实验(计算)—归纳猜想—证明三个步骤完成的,这对创造性思维品质的培养十分有益.

10. **解证** $\because f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$,$f(2)=4$,令 $x_1=x_1=1$,则 $f(2)=f(1+1)=f(1)f(1)=[f(1)]^2=4$.

$\because f(1)>0,\therefore f(1)=2$,又 $f(2)=4=2^2$.

令 $x_1=2,x_2=1$,则 $f(3)=f(2+1)=f(2)\cdot f(1)=2^2\cdot 2=2^3$.

由此猜想:$f(x)=2^x(x\in\mathbf{N})$

证明 (1)当 $x=1$ 时,命题成立已证.

(2)假设当 $x=k$ 时,命题成立,即 $f(k)=2^k$.

那么,当 $x=k+1$ 时,

$f(k+1)=f(k)\cdot f(1)=2^k\cdot 2=2^{k+1}$.

这就是说当 $x=k+1$ 时,命题也成立.

据(1)、(2)可知,对一切 $x\in\mathbf{N}$,$f(x)=2^x$ 都成立.

课堂小结:1. 反证法是一种间接法,要明确两点:一是证题步骤,二是哪样的问题适合用反证法.

2. 数学归纳法是证明与自然数 n 有关的命题的一种方法,但并不是与自然数 n 有关的命题都能用数学归纳法证明.证明步骤与格式的规范是数学归纳法的一个特征,把握 $f(k)$ 与 $f(k+1)$ 的关系是证题关键.由 $f(k)\Rightarrow f(k+1)$ 时可用"分析综合法".

(四) 反馈型题组的解答

11. **分析** 本题用直接法不易实现,可考虑用反证法.

证明 假设 $f(x)=0$ 至少有两个不同的实根 x_1、x_2,不妨设 $x_1<x_2$.

由方程根的定义,$f(x_1)=0,f(x_2)=0$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$ ①

但已知 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$ 这与①式矛盾,因此假设不成立,故原命题得证.

12. **证明** 假设 $a+b>0$ 不成立,则 $a+b\leqslant 0$,故 $a\leqslant -b,b\leqslant -a$,由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\infty)$ 上是增函数,所以 $f(a)\leqslant f(-b),f(b)\leqslant f(-a)$,从而 $f(a)+f(b)\leqslant f(-a)+f(-b)$.

这与已知条件 $f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$ 矛盾,因此,假设不成立,所以 $a+b>0$ 成立,命题正确.

13. **证明** 假设 p 不是偶数,$\because p\in\mathbf{Z},\therefore p$ 是奇

数，设 $p=2k+1(k\in\mathbf{Z})$，则

$p^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$ 是奇数，这与已知 p^2 是偶数相矛盾，因此假设不成立，故 p 是偶数.

14. **证明** (1)当 $n=1$ 时，左边 $=2\cdot 4=8$，

右边 $=\frac{4}{3}\cdot 1\cdot(1+1)(1+2)=8$，等式成立.

(2)假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$2\cdot 4+4\cdot 6+\cdots+2k(2k+2)=$

$\frac{4}{3}\cdot k\cdot(k+1)(k+2)$.

那么当 $n=k+1$ 时，

$2\cdot 4+4\cdot 6+\cdots+2k(2k+2)+2(k+1)[2(k+1)+2]=\frac{4}{3}k\cdot(k+1)(k+2)+2(k+1)\cdot 2(k+2)=$

$\frac{4}{3}(k+1)(k+2)[k+3]=$

$\frac{4}{3}(k+1)\cdot[(k+1)+1][(k+1)+2]$.

这就是说当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

据(1)、(2)可知，对一切 $n\in\mathbf{N}$ 等式都成立.

15. **证明** (1)当 $n=1$ 时，$4\cdot 6^n+5^{n+1}-9=40$，显然能被 20 整除.

(2)假设当 $n=k$ 时，$4\cdot 6^k+5^{k+1}-9$ 能被 20 整除，那么当 $n=k+1$ 时，

$4\cdot 6^{k+1}+5^{k+2}-9=24\cdot 6^k+5\cdot 5^{k+1}-9=$

$20\cdot 6^k+4\cdot 6^k+5^{k+1}+4\cdot 5^{k+1}-9=$

$20(6^k+5^k)+(4\cdot 6^k+5^{k+1}-9)$.

$\because 6^k+5^k$ 是整数，$\therefore 20(6^k+5^k)$ 能被 20 整除，再由假设 $4\cdot 6^k+5^{k+1}-9$ 能被 20 整除，则可知当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

由(1)、(2)可知，对一切 $n\in\mathbf{N}$ 命题都成立.

16. **证明** ①当 $n=1$ 时，左边 $=1+1=2$，右边 $=2$，所以等式成立.

②假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+k)=$

$2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)$，

那么，当 $n=k+1$ 时，

$(k+2)(k+3)(k+4)\cdots(k+k)(k+1+k)(k+1+k+1)=(k+2)(k+3)\cdots(k+k)(2k+1)(2k+2)=$

$2(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+k)(2k+1)=$

$2\cdot 2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)(2k+1)$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

由①、②可知对一切 $n\in\mathbf{N}$ 时，等式也成立.

说明 本题在使用数学归纳法证明的第二步，要特别注意由 k 过渡到 $k+1$ 时等式左端的变化，这时多了 $(k+1+k)$，$(k+1+k+1)$ 两个因式，少了 $(k+1)$ 一个因式，想清楚这一点是完成用数学归纳法证明本题的关键.

17. **证明** 当 $n=1$ 时，$2^1<(1+1)^2$，

当 $n=2$ 时，$2^2<(2+1)^2$，

当 $n=3$ 时，$2^3<(3+1)^2$，

当 $n=4$ 时，$2^4<(4+1)^2$，

当 $n=5$ 时，$2^5<(5+1)^2$，

当 $n=6$ 时，$2^6>(6+1)^2$，

……

由上可猜想，当 $n\leqslant 5$ 时，$2^n<(n+1)^2$；当 $n\geqslant 6$ 时，$2^n>(n+1)^2$.

当 $n\leqslant 5$ 时，$2^n>(n+1)^2$ 已证. 现用数学归纳法证明：当 $n\geqslant 6$ 时，$2^n>(n+1)^2$.

(1)当 $n=6$ 时，命题成立已证.

(2)假当设 $n=k(k\in\mathbf{N},k\geqslant 6)$ 时，命题成立，即

$2^k>(k+1)^2$. 那么，当 $n=k+1$ 时，

$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2(k+1)^2=2k^2+4k+2=$

$(k^2+4k+4)+k^2-2=(k+2)^2+k^2-2>$

$(k+2)^2(\because k\geqslant 6,\therefore k^2\geqslant 36,\therefore k^2-2>0)=$

$[(k+1)+1]^2$

这就是说当 $n=k+1$ 时，猜想也成立.

据(1)、(2)知猜想对任意不小于 6 的自然数均成立.

18. 用数学归纳法证明(略).

19. **分析** 结合点集的图形思考，所要证明的结果等价于方程 $ax^2+bx=c=0$ 与 $dx^2+ex+f=0$ 至少有一个有实根，可用反证法证之.

证明 依题设 $\frac{1}{2}be=ac+df$.

假设 $ax^2+bx+c=0$ 与 $dx^2+ex+f=0$ 都无实根，则 $\Delta_1=b^2-4ac<0$，$\Delta_2=e^2-4df<0$.

于是 $\Delta_1+\Delta_2=b^2+e^2-4(ac+df)=$

$b^2+e^2-2be=(b-e)^2<0$ 这不可能.

故两方程至少有一个有实根，即 $(P\cup Q)\cap M\neq\varnothing$

注：也可仿第 3 题的方法证之.

20. **提示** 令 $n=1$，$n=2$，$n=3$，求得 $a=3$，$b=11$，$c=10$，然后用数学归纳法证明.

21. **证明** (1)当 $n=1$ 时，左边 $=\frac{1}{1^2}=1$，

右边 $=\frac{1+1}{2\cdot 1}=1$ 等式成立.

(2)假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$\frac{1}{k^2}+\frac{2}{k^2}+\cdots+\frac{k}{k^2}=\frac{k+1}{2k}$，

那么当 $n=k+1$ 时，