高等学校
数学教材

模形式导引

潘承洞　潘承彪

京大学出版社

高等学校数学教材

模形式导引

潘承洞 潘承彪

北京大学出版社

·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

模形式导引/潘承洞,潘承彪. —北京:北京大学出版社,2002.6
ISBN 7-301-05516-1

Ⅰ. 模… Ⅱ. ① 潘… ② 潘… Ⅲ. 模(数学)-高等学校-教材
Ⅳ. 0153.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 020080 号

书 名:模形式导引
著作责任者:潘承洞 潘承彪
责 任 编 辑:刘 勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-05516-1/O·0539
出 版 者:北京大学出版社
地 址:北京市海淀区中关村北京大学校内 100871
网 址:http://cbs.pku.edu.cn
电 话:发行部 62754140 邮购部 62752019
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印 刷 者:北京大学印刷厂
发 行 者:北京大学出版社
经 销 者:新华书店
890×1240 A5 开本 10.875 印张 280 千字
2002 年 6 月第 1 版 2002 年 6 月第 1 次印刷
印 数:0001—3000 册
定 价:18.00 元

内容简介

模形式理论在 Fermat 大定理的 A. Wiles 证明中起着十分重要的作用，因而，模形式理论就成为当前数学界和年轻学生最关注、最想了解的数学分支之一. 本书是综合大学数学系高年级大学生和低年级研究生(不一定是数论专业)的“模形式”课程的入门教材. 全书共分十二章. 内容包括：椭圆函数，完全模群的 Eisenstein 级数 $G_{2k}(T)$，完全模群，完全模群的同余子群，模函数的基本知识，同余子群的模形式，Poincaré 级数，完全模群的模形式空间上的 Hecke 算子，同余子群的模形式空间上的 Hecke 算子，模形式与 Dirichlet 级数，模形式的两个应用及有关知识的附录. 本书第一章及第十二章附录是全书的基础知识，它为本书各章所讲述的内容作了铺垫.

本书可作为综合大学、高等师范院校数学系高年级大学生、研究生的教材，也可供青年教师、数学工作者和数论爱好者阅读.

序　言

模函数与模形式,更一般地,自守函数与自守形式是数学的一个重要分支,它是在19世纪后期由J. H. Poincaré(1854—1912),及C. F. Klein(1849—1925)所创立的.在此之前,N. H. Abel(1802—1829)、C. G. J. Jacobi(1804—1851)、K. T. W. Weierstrass(1815—1897),及F. G. M. Eisenstein(1823—1852)等对与它有密切关系的椭圆函数和椭圆曲线作了深入研究①.

模形式理论与数论有着天生的联系.例如,Riemann给出的Riemann ζ函数的函数方程的两个证明中的一个就是利用模形式$\theta_2(z)$的性质(见§30例1,[P&P1,第十二章]),这揭示了模形式与L函数的内在联系;利用模形式理论在平方和问题(见§32,[EG])及无限制整数分拆问题(见§33,[P&P1,第三十六章])上得到了漂亮的结果.

经历了相当一段的沉默,大约从20世纪六七十年代起,模形式理论开始了一个新的蓬勃发展时期,以其不断在著名数论问题上取得的重大成果与进展引起了数学界的广泛重视.1983年,J. Tunnell(*Inventiones Math.*,72(1983),323～334)应用椭圆曲线和模形式理论在同余数问题(见第一章问题20,21)上取得了重大成果(亦见[NK]),他给出了一个有效方法来判断一个自然数n是不是同余数,即n是不是一个边长为有理数的直角三角形的面积.1980年前后,在关于Kloosterman和均值估计的Linnik-Selberg猜想上取得了重要进展,更清楚地揭示了模形式理论和解析数论之间的密切联系,并使得不少解析数论著名问题的结果得到了较大的改进(1985年在上海举行的中国数学会五十周年年会上,我作了“解析数论的新进展”

① 读者要了解这里提到的数学名词和数学家,可查阅以下三本数学百科全书(见参考书目):[数百1],[数百2],[数百3].

的报告，主要就是谈这些成果，以期引起对此的重视. 亦见 H. Iwaniec, Spectral theory of automorphic functions and recent developments in analytic number theory, *Proceedings of ICM*, Berkeley, California, USA, 1986, 444～456). 最令人激动和兴奋的事件终于在上世纪末出现了，1993 年 6 月 21～23 日，40 岁的英国数学家 Andrew Wiles 在英国剑桥的 I. Newton 学院连续三天作了题为“模形式、椭圆曲线和 Galoi 表示”的报告，在 23 日上午 10 时 30 分，报告即将结束时，他宣布“**这表明 F. L. T.** (即 Fermat 大定理)**为真.**”(证明见：A. Wiles, *Annals of Math.*, 141(1995), 443～551; R. Taylor 和 A. Wiles, *Annals of Math.*, 141(1995), 553～572.) 这样，历时 350 余年，由 P. de Fermat(1601—1665)所提出的著名论断：当 $n>2$ 时，不定方程

$$x^n + y^n = z^n, \quad x, y, z \in \mathbf{Z}$$

无 $xyz \neq 0$ 的解，终于被彻底解决了[①]. 这是 20 世纪数学史上最重大的成就之一. 因而，模形式理论就成为当前数学界和年轻学生最关注、最想了解的数学分支之一.

因此，让数学系高年级大学生和低年级研究生(不一定是数论专业的)了解一些经典模形式理论的基础知识，对它产生兴趣，就是十分必要的了. 自上个世纪 60 年代以来，有关的好教材出了不少，但模形式理论似乎一直有一个‘难学’的名声. 经典模形式理论的基础知识并不复杂艰深、也不要求很高的技巧，但它涉及的知识面的确很广，且要能熟练地综合运用这些知识. 一般来说，它所要求的大学程度的预备知识包括：分析与复变函数论，高等代数与抽象代数，初等数论与代数数论基础，以及一点非欧几何、Riemann 曲面和椭圆曲线的基础知识. 在大学这些内容并不是都学的，所以，对高年级大学生和低年级研究生要理解它、学好它的确是不容易的. 但另一方面，如果能适当选取内容、适度严格的讲述，尽量减少过于抽象的近代知识，使学生能初步领会模形式的基本思想、语言、方法和理论，那么，

① 建议读者看一下通俗介绍的文章：D. A. Cox, Introduction to Fermat's last theorem, *AMM*, 101(1994), 3～14.

这门课对学生应该是很有吸引力的.而且,对于学生学会如何灵活综合地运用大学中所学的相对独立的各门课程中的知识来研究问题,全面巩固所学的知识,提高综合运用数学知识(包括分析,代数和几何)的能力和素质,是十分有益的.承洞和我都认为,为高年级大学生和低年级研究生开设一门这样类型的课程是很有必要的.事实上,我们自上个世纪 80 年代开始指导解析数论研究生,就一直要求他们具有全面扎实的基础知识,除了解析数论外,还要学习代数数论、丢番图逼近论与超越数论,以及模形式理论等.在 1982 年前后,我曾请裴定一教授、徐广善教授和朱尧辰教授在北京大学分别讲授了模形式理论、丢番图逼近论和超越数论.根据承洞和我的计划,大约从 1994 年开始,我在北京大学为高年级大学生和低年级研究生开设了经典模形式理论选修课,并着手撰写教材.到 1997 年,我们确定了这一课程的框架和内容,基本上定稿了.这三年多来,工作只能由我一人承担了.我又讲授了几次,把书稿发给学生请他们提意见,并不断修改讲法(不是内容的增减)以使它能尽量达到我们的预定目的.这就是撰写本书的指导思想和形成过程.

本书包含以下内容:由于模形式的重要性是体现在椭圆曲线、模形式和 L 函数三者之间的不可分割的联系上,所以,我们极简单地在第一章讲述了椭圆曲线、椭圆函数与模形式之间的关系,在第十章讲述了模形式与 L 函数之间的关系.在第二章通过讨论最简单的 Eisenstein 级数使对模形式先有一个初步的感性认识.简单说来,模函数是上半平面上的半纯函数,它在模变换群(见定义 8.1)下保持某种不变性.因此,在第三、四章讨论了完全模群及其同余子群的性质;在第五、六章讨论了模函数,完全模群的模形式及同余子群的模形式的基本知识;以及在第七章介绍了构造同余子群模形式的一般方法——Poincaré 级数,并讨论了它的性质.Hecke 算子理论是模形式理论中最基本最重要的组成部分,我们在第八、九章分别讨论了完全模群的模形式空间上的 Hecke 算子及同余子群的模形式空间上的 Hecke 算子.在第十一章介绍了模形式理论在平方和问题及无限制整数分拆问题上的两个经典应用.为了方便阅读,第十二章附录中给出了大多不加证明地又为本书所需要而在大学中不一定系统学过

的内容，读者可以边读本书边补这些知识.在第一到第十章，附有一些问题，以供练习.本书中的定义、定理、公式等均按每节排列.

显然，作为模形式基础教材，这些内容可能是不能再少了.我们不涉及半整权模形式、迹公式等重要内容，不从李群和离散子群的观点出发作一般讨论，近代语言几乎不用，更丝毫不涉及它的近代理论.但是，我们尽可能把所讨论的内容讲述清楚，当学懂了这些最简单、最基本的东西后，对模形式发生兴趣的学生完全能够进一步(可能更容易地)自学近代的模形式理论.‘少则得，多则惑’，科学工作者实质上都是在产生强烈兴趣后自学成材的.当然，正如不熟练地掌握初等数论就谈不上学习解析数论、代数数论一样，不熟练地掌握本书中这些最基本的知识也就谈不上进一步学习模形式理论.

在本书写作过程中主要参考了以下书籍(见参考书目)：[RG](它出版于1962年，但仍是一本模形式的入门好教材)、[NK]、[TA]、[BS]、[TM]，以及[JS].希望读者也看看这几本书：[GS]是模形式理论的经典著作，不过对初学者来说实在是太困难了；我们还建议读者可以看一下[PS]，它给出了模形式在不同数学分支中的三个应用.由于笔者水平有限，书中必有不少缺点以至错误，切望读者指正.

本书的写作得到了北京大学出版社、国家自然科学基金会，以及教育部数学中心的支持.本书的责任编辑刘勇同志改正了书稿中的一些疏误，提出了许多有益的建议.对此，我们表示衷心感谢.

潘承彪

2001年10月25日

目　　录

第一章　椭圆函数

本章是讨论椭圆函数的基本知识. §1 讨论双周期函数和格，为引入椭圆函数作准备；§2 和 §3 讨论椭圆函数的基本性质，特别是 Weierstrass $\wp$ 函数的基本性质及椭圆函数的构造；以及 §4 讨论了 Theta 函数，这不仅是构造椭圆函数的又一途径，而且由它可以构造模形式.

§1　双周期函数和格

周期函数是我们熟知的数学中的一个重要的基本概念和工具. 它的定义如下：

定义 1.1　定义在复平面 $\boldsymbol{C}$ 上的复值函数 $f(z)$ 称为**周期函数**，如果它不等于常数，且存在复数 $\omega\neq 0$，使对任意的 $z\in\boldsymbol{C}$ 有 $f(z+\omega)=f(z)$ 成立（当一边为无穷时另一边也为无穷），ω 称为 $f(z)$ 的**周期**. 周期函数 $f(z)$ 的全部周期所组成的集合记作 Λ 或 Λ_f，称为 $f(z)$ 的**周期集合**. 为方便起见**约定** $0\in\Lambda$，但 0 **不是周期**.

周期集合 Λ 显然有以下性质：对任意的 $\omega_1,\omega_2\in\Lambda$，及任意的 $m_1,m_2\in\boldsymbol{Z}$，必有

$$m_1\omega_1+m_2\omega_2\in\Lambda. \tag{1.1}$$

即 Λ 是 $\boldsymbol{C}$ 的加法子群，是 $\boldsymbol{Z}$ 上的线性空间.

$e^{\lambda z}$（λ 是非零复数）是我们最熟悉的周期函数，它的周期集合 $\Lambda=\{2k\pi i/\lambda:\ k\in\boldsymbol{Z}\}$. 在一般情形下，复变量周期函数的周期集合有什么样的性质呢？下面来讨论这个问题.

性质 1.1　如果周期函数 $f(z)$ 是半纯的，那么，它不可能有模为任意小的周期，即存在正常数 a，使得有

$$|\omega|\geqslant a,\quad 0\neq\omega\in\Lambda. \tag{1.2}$$

证　用反证法. 设 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots$ 是 $f(z)$ 的周期，且有 $\omega_n\to 0$.

因此对任意的 z 和 n 有 $f(z+\omega_n)-f(z)=0$. 由此就推出半纯函数 $f(z)$ 在其所有解析点处的导数必为零，所以 $f(z)$ 等于常数. 矛盾.

我们以后所讨论的周期函数都是半纯的，所以它的周期集合都满足条件(1.2). 事实上，对一个正常的周期函数这一要求是合理的. 因此，为了研究周期函数，首先必须搞清满足条件(1.1)和(1.2)的 $\boldsymbol{C}$ 的子集的性质. $\boldsymbol{C}$ 的这种子集本身就是一个十分重要的数学概念，与周期函数的概念并无直接联系. 下面就先来讨论它的性质. 像通常一样，我们**把全体复数组成的集合、复平面、及平面上从原点出发的向量集合看做是同一的**，均记为 $\boldsymbol{C}$.

性质 1.2 设 $\boldsymbol{C}$ 的子集 Λ 满足条件(1.1). 那么，条件(1.2)等价于条件：

在 $\boldsymbol{C}$ 的任意一个有限区域 D 内只可能有 Λ 中的有限个点，
$$(1.3)$$
即 Λ 不能有有限极限点.

证 (1.3)$\Longrightarrow$(1.2). 取 r 是适当大的正数，使区域 D 取为 $|z|<r$ 时，在 D 中必有 Λ 中的非零元素. 由条件(1.3)知在这样的 D 中至多有有限个 $\omega\in\Lambda$. 因此，必有 $a>0$ 使条件(1.2)成立.

(1.2)$\Longrightarrow$(1.3). 用反证法. 假设存在两两不同的无穷点列 $\omega_n\in\Lambda\cup D$, $n=1,2,\cdots$. 因 D 是有限区域，故必有子序列 $\omega_{1,n}$ $(n=1,2,\cdots)$，使当 $n\to\infty$ 时，$\omega_{1,n}\to z_0$ (z_0 不一定属于 Λ 或 D). 设 $\omega_n'=\omega_{1,n+1}-\omega_{1,n}$. 显然有 $0\neq\omega_n'\in\Lambda$, $|\omega_n'|\to 0$. 这和条件(1.2)矛盾. 证毕.

由性质 1.2 立即推出(证明留给读者)

性质 1.3 设 Λ 满足条件(1.1)和(1.2). Λ_1 是 Λ 的子集，且至少有两个元素. 那么，必有 $0\neq\omega^*\in\Lambda_1$，使对任意的 $0\neq\omega\in\Lambda_1$ 有
$$|\omega|\geqslant|\omega^*|. \qquad (1.4)$$

性质 1.4 设 Λ 满足条件(1.1)和(1.2). 那么，对任意非零的 $\omega_1,\omega_2\in\Lambda$, ω_1/ω_2 一定不等于实无理数.

证 若 $\mathrm{Im}\,\omega_1/\omega_2\neq0$，则结论成立. 故只要讨论 ω_1/ω_2 是实数的情形. 考虑 Λ 中所有形如 $a\omega_1$ (a 为任意实数)的元素组成的子集 Λ_1. 由性质 1.3 知必有 $0\neq\omega^*\in\Lambda_1$ 满足式(1.4). 设 $\omega_j=a_j\omega^*$ $(j=1,2)$. 容

易看出 $\omega_j-[a_j]\omega^*=(a_j-[a_j])\omega^*$ 都属于 $\Lambda_1,j=1,2$. 由此及 ω^* 的最小性(即式(1.4))就推出 $a_j-[a_j]=0,j=1,2$. 因此,a_j 均是整数,故 ω_1/ω_2 是有理数. 证毕.

由性质 1.4 立即推出：当 Λ 满足条件(1.1)和(1.2)时,在通过原点的一条直线 l 上,若有 $0\neq\omega\in\Lambda\cap l$,那么,一定存在 ω^* 使得

$$\omega\in\Lambda\cap l\Longleftrightarrow\omega=m\omega^*,\quad m\in\mathbf{Z}.\tag{1.5}$$

证明留给读者. 下面的性质是最重要的.

性质 1.5 设 Λ 满足条件(1.1)和(1.2). 那么,以下两种情形有且仅有一种成立：

(i) 存在 ω_1 使得

$$\Lambda=\{m_1\omega_1:\ m_1\in\mathbf{Z}\},\tag{1.6}$$

即 Λ 是 $\mathbf{Z}$ 上的一维线性空间;

(ii) 存在 $\omega_1,\omega_2,\mathrm{Im}\,\omega_1/\omega_2\neq0$,使得

$$\Lambda=\{m_1\omega_1+m_2\omega_2:\ m_1,m_2\in\mathbf{Z}\},\tag{1.7}$$

即 Λ 是 $\mathbf{Z}$ 上的二维线性空间.

证 若 Λ 中任意两个非零元素之比均为实数,则由性质 1.4 及式(1.5)知必有情形(i)成立. 不然,Λ 中必有两个非零元素之比的虚部不等于零,它们和原点 O 构成一个三角形. 由性质 1.1 知在这三角形中一定可找到一子三角形 OAB(见图 1.1),使得 $\overrightarrow{OA}=\omega_2\in\Lambda$, $\overrightarrow{OB}=\omega_1\in\Lambda$,且在三角形 OAB 上没有其他的 Λ 中的非零元素(为什么). 我们来证明这样的 ω_1 和 ω_2 必满足式(1.7). 设 $0\neq\omega\in\Lambda$,必有

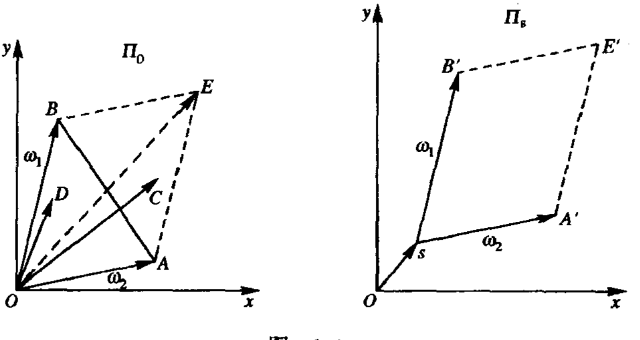

图 1.1

实数 λ_1,λ_2 使得

$$\omega = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 = [\lambda_1]\omega_1 + [\lambda_2]\omega_2 + \{\lambda_1\}\omega_1 + \{\lambda_2\}\omega_2.$$

若$\{\lambda_1\},\{\lambda_2\}$不全为零,则 $0\neq\overrightarrow{OC}=\{\lambda_1\}\omega_1+\{\lambda_2\}\omega_2\in\Lambda$. 由取法知$\overrightarrow{OC}$不在三角形 OAB 上,所以 $\overrightarrow{OC}$必在三角形 AEB 内,这里$\overrightarrow{OE}=\omega_1+\omega_2$(为什么? 见图 1.1). 这样就有

$$0\neq\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=(\omega_1+\omega_2)-(\{\lambda_1\}\omega_1+\{\lambda_2\}\omega_2)\in\Lambda.$$

但 $\overrightarrow{OD}$必在三角形 OAB 内,矛盾. 故 λ_1,λ_2 为整数,即(1.7)成立. 证毕.

性质 1.5 使我们可引进以下的重要概念.

定义 1.2 给定一对不共线的复数 ω_1,ω_2,即 $\operatorname{Im}\omega_1/\omega_2\neq 0$,我们称集合

$$\Lambda = \Lambda(\omega_1,\omega_2) = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2;\ m_1,m_2 \in \boldsymbol{Z}\} \tag{1.8}$$

是复平面上 $\boldsymbol{C}$ 的一个**点格**或**格**,格中的元素称为**格点**,$\{\omega_1,\omega_2\}$称为格的一组**基**.

性质 1.5 表明: $\boldsymbol{C}$ 的一个子集是格的充要条件是它满足条件(1.1)和(1.2),且有两个不共线的元素. 这也可作为格的定义,但这里的定义更为直观、自然.

设 K 是一个有幺元素 e 的交换环,K^*是 K 中全体可逆元素组成的乘法群. 记 K 上的二阶矩阵集合

$$\mathrm{GL}_2(K) = \left\{\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}:\ a,b,c,d \in K,\ |\alpha| = ad - bc \in K^*\right\}, \tag{1.8'}$$

它组成一个乘法群,称为 K 上的二阶**一般线性群**. 我们把它的子群

$$\mathrm{SL}_2(K) = \{\alpha \in \mathrm{GL}_2(K):\ |\alpha| = e\}, \tag{1.9}$$

称为 K 上的二阶**特殊线性群**. 若 $K\subseteq\boldsymbol{R}$,我们记 $\mathrm{GL}_2(K)$的子群

$$\mathrm{GL}_2^+(K) = \{\alpha \in \mathrm{GL}_2(K):\ |\alpha| > 0\}. \tag{1.10}$$

定义 1.3 $\boldsymbol{R}$ 上的特殊线性群 $\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{R})$称为**辛群**;$\boldsymbol{Z}$ 上的特殊线性群 $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z})$称为**完全模群**,$\Gamma$ 的子群称为**模群**,记为 Γ',Γ'' 等.

性质 1.6 格 $\Lambda(\omega_1',\omega_2')$等于格 $\Lambda(\omega_1,\omega_2)$,即它们有相同的格点的充要条件是存在

$$\alpha \in \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{Z}),\quad |\alpha| = \pm 1,$$

使得

$$\begin{bmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

证明留给读者(见图 1.2). 这表明一个格的基不是惟一的，满足上式的$\{\omega_1',\omega_2'\}$一定是格 $\Lambda(\omega_1,\omega_2)$的一组基. 特别的$\{\omega_2,\omega_1\}$一定是格 $\Lambda(\omega_1,\omega_2)$的一组基. 显见，$\mathrm{Im}\omega_1/\omega_2$ 和 $\mathrm{Im}\omega_2/\omega_1$ 有且只有一个是正的. **为了确定起见，以后说到$\{\omega_1,\omega_2\}$是格 Λ 的一组基及出现符号格 $\Lambda=\Lambda(\omega_1,\omega_2)$ 时，总假定满足条件：**

$$\mathrm{Im}\omega_1/\omega_2>0. \tag{1.12}$$

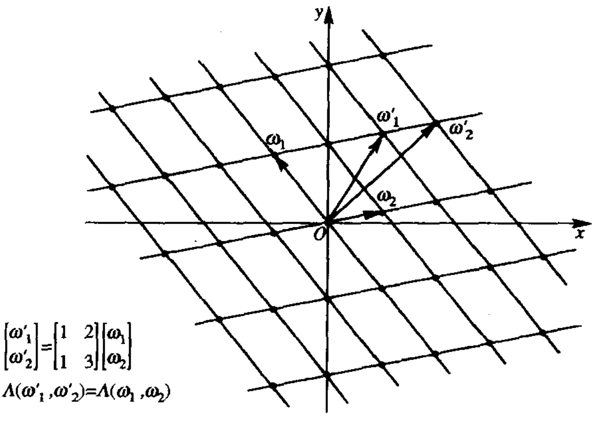

图　1.2

在这样的约定(1.12)下，性质 1.6 就变为

性质 1.7　$\{\omega_1',\omega_2'\}$是格 $\Lambda(\omega_1,\omega_2)$的一组基的充要条件是存在

$$\alpha=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in\Gamma, \tag{1.13}$$

使得式(1.11)成立.

证　先假定 $\alpha\in GL_2(\boldsymbol{R})$，并有式(1.11)成立. 这时有

$$\tau'=\frac{\omega_1'}{\omega_2'}=\frac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2}=\frac{(a\tau+b)(c\bar{\tau}+d)}{|c\tau+d|^2},$$
$$\tau=\frac{\omega_1}{\omega_2}. \tag{1.14}$$

因而得到

$$\operatorname{Im}\frac{\omega_1'}{\omega_2'}=\operatorname{Im}\tau'=\frac{ad-bc}{|c\tau+d|^2}\operatorname{Im}\tau=\frac{ad-bc}{|c\tau+d|^2}\operatorname{Im}\frac{\omega_1}{\omega_2}.\quad(1.15)$$

由此及性质 1.6 就证明了所要的结论.

由以上讨论,可相应得到关于周期函数的周期集合的性质.

性质 1.8　设 Λ 是周期函数 $f(z)$的周期集合,满足条件(1.1)和(1.2).那么,Λ 必是性质 1.5 中的(i)或(ii)这两种情形之一.

这样,由性质 1.6 和 1.7 知,可引进

定义 1.4　设 $f(z)$是周期函数,周期集合 Λ 满足条件(1.1)和(1.2).那么,当性质 5 中的情形(i)成立时,$f(z)$称为是**单周期函数**,ω_1 称为它的**基本周期**;当性质 1.5 中的情形(ii)成立时,$f(z)$称为是**双周期函数**,满足条件(1.12)的$\{\omega_1,\omega_2\}$称为它的**基本周期对**.

$\sin z,\cos z,e^{\lambda z}(\lambda\neq0)$等都是单周期函数.显见,单周期函数的基本周期仅可能是 ω_1 和 $-\omega_1$.而双周期函数的基本周期对是所有满足式(1.11)和(1.13)的$\{\omega_1',\omega_2'\}$.我们要讨论的是双周期函数.

容易看出,以 $\Lambda(\omega_1,\omega_2)$为周期集合的双周期函数 $f(z)$只要在半开平行四边形 $OAEB$(见图 1.1):

$$\Pi_0=\Pi_0(\omega_1,\omega_2)=\{r_1\omega_1+r_2\omega_2:0\leqslant r_1<1,0\leqslant r_2<1\}\quad(1.16)$$

上的值定义后,就完全确定了.一般的,对给定的复数 s,Π_0 沿 s 平移得到半开平行四边形(见图 1.1):

$$\begin{aligned}\Pi_s&=\Pi_s(\omega_1,\omega_2)=\Pi_0+s\\&=\{s+(r_1\omega_1+r_2\omega_2):0\leqslant r_1<1,0\leqslant r_2<1\},\quad(1.17)\end{aligned}$$

双周期函数 $f(z)$只要在 Π_s 上的值定义后,其值就完全确定了.

定义 1.5　设 $f(z)$是以 $\Lambda(\omega_1,\omega_2)$为周期集合的双周期函数.我们把 Π_0,或一般的把 Π_s 称为是双周期函数 $f(z)$的**基本平行四边形**,**周期平行四边形**,或**基本定义域**.也称为是格 $\Lambda(\omega_1,\omega_2)$的基本平行四边形.

基本平行四边形 $\Pi_0(OAEB)$,不含两边 AE 和 BE(包括端点),这因为在由下面的等式