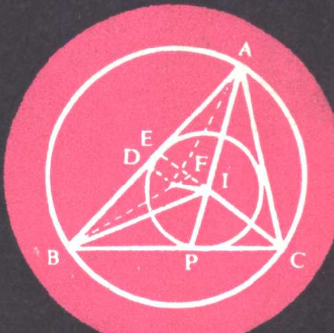
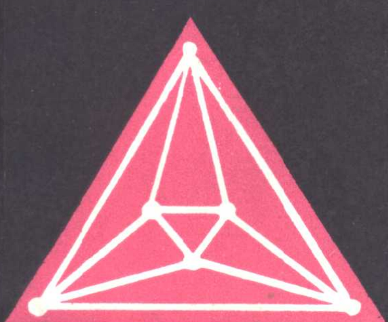
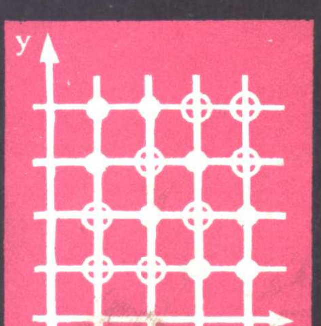
高中数学竞赛辅导讲座

常庚哲　张明樑　周春荔　刘鸿坤　等编







高中数学竞赛辅导讲座

常庚哲　张明樑　周春荔　刘鸿坤　等编

上海科学技术出版社

高中数学竞赛辅导讲座

常庚哲　张明梁　周春荔　刘鸿坤　等编

责任编辑　宗大路

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　上海群众印刷厂印刷

开本787×1092　1/16　印张12.25　字数292,000

1987年5月第1版　1987年5月第1次印刷

印数：1—44,000

统一书号：13119·1426　　定价：1.80元

前 言

1986年7月，在波兰首都华沙举行了第27届国际中学生数学竞赛．我国首次派出了由六名队员组成的“满队”参加了这一届竞赛．7月中旬，从华沙传来了使人振奋的电讯：这六名同学夺得了三个一等奖、一个二等奖和一个三等奖，总分名列第四．中国学生为国争光，全国人民感到欢欣鼓舞．

这样好的成绩是从哪里来的？除了这些学生中学数学课程的基础扎实之外，一个很重要的原因是：他们在参赛之前接受了严格的训练．这六名同学能跻身于我国国家代表队的行列里，首先要经过“过五关、斩六将”的考验．在1985年全国高中数学联赛之后，来自各个省、市、自治区的78名联赛优胜者于1986年1月齐集天津南开大学，参加全国首届数学冬令营，通过两个上午的数学竞赛，选定了21名学生组成“数学奥林匹克集训班”．在北京，由来自好几所大学和三个研究所的十几位教授、专家对“集训班”讲课，1986年5月初，根据最后的选拔考试成绩和平时表现出的能力，才确定了这六名同学的名单．

在胜利的鼓舞下，越来越多的青少年数学爱好者跃跃欲试，准备在各种水平的数学竞赛中一显身手；越来越多的地区正准备举办相应的辅导活动，以帮助这些青少年有崭露头角的机会．一个共同的问题是：苦于缺乏训练资料．在这个时候，由上海科学技术出版社出版的《数学竞赛辅导讲座》，真正起着雪中送炭的作用．

本书所包含的十七讲，几乎全部覆盖了国内外数学竞赛题所涉及的基本知识和技巧．这样，就为有志于数学竞赛的青少年朋友提供了一本合适的参考书，也为担任辅导工作的老师们奉献了一本有针对性的辅导材料，讲座的执笔人都是我国数学普及工作领域内的知名学者，其中有好几位担任过我国为第27届国际数学竞赛成立的“集训班”的教练工作，这就预示着本书将是一本高水平的辅导讲座．

事实已经充分证明：数学竞赛决不是与正常的数学教学乃至其他科目的教学相对立的．请看今年我国的这6名选手，他们无一不是各自的中学里各科成绩都拔尖的学生；扩大到“集训班”里的21名学生，也是同样的情况．事实上，数学竞赛不但要求学生具有坚实的数学基础知识，还要求他们有足够的机智和敏捷．因此，这本书除了对于数学竞赛有直接的指导作用之外，就是对于提高中学数学课程的教与学的水平，也将是十分有益的．

数学竞赛的知识水平和技巧水平在不断更新和发展，几年之后回头来看这本书，也许会发现有需要改进的地方，但是在目前，说它代表着当今数学竞赛的水平，是恰如其分的．

常庚哲

1986年8月

目　　录

第一讲

数学解题中的构造思想与方法

北京师范学院　周春荔

学习数学必须善于解题，不仅要善于解标准题，而且要善于解那些需要独立思考，见解独到和有所创新的题。解题意味着发现一条摆脱疑难、绕过障碍的途径，它是智力的特殊成就；是对已有知识、方法，采取调动、重组、变换、类比、限定、推广等手段进行再创造的过程。其中，构造性思想与方法就是这种创造性活动的一个组成部分。

（一）

为了说明数学解题中的构造性思想与方法。我们先从例题的分析谈起。

例 1　证明存在两个无理数 x, y, 使 $z=x^y$ 是有理数。

证法一　用反证法

设对于任何两个无理数 x,y 来说，$z=x^y$ 都是无理数，那么 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 就一定是无理数．进而 $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ 也就是无理数。

但是 $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2=2$ 是有理数，因此得出矛盾。这表明，存在有两个无理数 x, y, 使得 $z=x^y$ 是有理数。

证法二　设法构作一个满足问题条件的例子，存在性即可证实。

我们已知 $\sqrt{2}$ 与 $\log_2 9$ 都是无理数，令 $x=\sqrt{2}$, $y=\log_2 9$, 则 $x^y=\sqrt{2}^{\log_2 9}=2^{\log_2 3}=3$ 是有理数，问题得证。

比较例 1 的两种证法，证法一虽很巧妙，但证明完毕，我们对 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 到底是个有理数还是无理数并不清楚。证明的基础是排中律．若 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是有理数，这就是我们要找的例子；若 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是无理数，则 $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2$ 就是我们要找的例子．证法二则是构造了一个满足问题条件的实例，构作的"元件"是无理数 $\sqrt{2}$ 与 $\log_2 9$，构作的"支架"是对数基本关系式 $a^{\log_a b}=b$。证法一是非构造性的间接证明，证法二则是一种构造性证明。

在证法二中，以问题已知元素或条件为"元件"，数学中的某些关系式为"支架"，在思维中构作了一种新的"建筑物"。这种方法有一定的普遍意义。我们再通过两道例题概括这种方法的特点。

例 2　a、b、c、d 都是正数，证明，存在这样的三角形，它的三边等于

$$\sqrt{b^2+c^2}、\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}、\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}.$$

并计算这个三角形的面积。

分析　如果要利用三线段构成三角形三边的充要条件（三角形不等式）来判定满足题设条件的三角形的存在性，不是容易的。再用海伦公式根据三边计算这个三角形面积就更使人望而生畏了！

怎么办？在这"山穷水尽疑无路"之际，只要注意到 $\sqrt{b^2+c^2}$, $\sqrt{a^2+(c+d)^2}$, $\sqrt{(a+b)^2+d^2}$ 的特点，

就会点燃思想的火花，考虑利用勾股定理把这三条线段构作出来，不妨试试看。

如图 1，以 $a+b$, $c+d$ 为边画一个矩形 $ABCD$。斜线所示的三角形 CEF 的三边：

$CE=\sqrt{a^2+(c+d)^2}$, $CF=\sqrt{(a+b)^2+d^2}$, $EF=\sqrt{b^2+c^2}$.

满足题设条件的三角形作出来了，当然，它的存在性也就自明了。

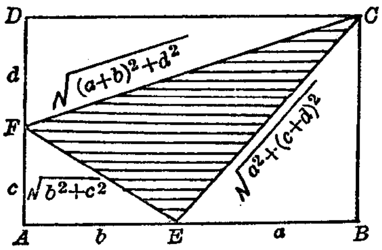


图 1

设 $\triangle CEF$ 的面积为 S，显然

$$S=(a+b)(c+d)-\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}d(a+b)-\frac{1}{2}a(c+d)$$

$$=\frac{1}{2}(ac+bc+bd).$$

真可谓“柳暗花明又一村”了。

解　略

例 3　已知 α、β 为锐角，且

$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$,　①　　$3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0$,　②

求证　$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$，(1978 年高考理工科试题。)

分析　由① $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1\Longrightarrow 3\sin^2\alpha=1-2\sin^2\beta=\cos 2\beta$，即 $\cos 2\beta>0$；而再由 ①，$2\sin^2\beta=1-3\sin^2\alpha$,　$\therefore$　$\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1-2\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$，即 $\cos 2\alpha>0$，可以判定 2α, 2β 也是锐角。

由①得
$$3\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)+2\left(\frac{1-\cos 2\beta}{2}\right)=1,$$

化简得
$$3\cos 2\alpha+2\cos 2\beta=3.$$

因此，已知条件等价于 2α, 2β 都是锐角，且 $\begin{cases}3\sin 2\alpha=2\sin 2\beta, & ③\\ 3\cos 2\alpha+2\cos 2\beta=3, & ④\end{cases}$

条件分析清楚了，由③及 2α, 2β 均为锐角，联想正弦定理，可构作 $\triangle ABC$，使 $\angle A=2\alpha$, $\angle B=2\beta$. $AC=3$, $BC=2$.

作 $CE\perp AB$ 于 E，因 $\angle ABC$, $\angle BAC$ 均为锐角，垂足 E 落在线段 AB 上，则 $BE=2\cos 2\beta$, $AE=3\cos 2\alpha$.

若要④式成立，则有

$$AE+BE=3\cos 2\alpha+2\cos 2\beta=3,$$

$$\therefore\quad AB=AC=3.$$

我们所构作的 $\triangle ABC$ 必是等腰三角形。

作 $\angle A$ 的平分线 AD，则 $AD\perp BC$ 于 D，容易看到 $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$ 成立。

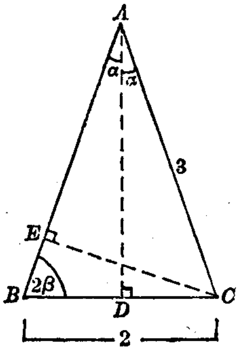


图 2

证明　略。

例 2、例 3 的解法表明：在解题过程中，由于某种需要，要么把题设条件中的关系构造出来，要么将这些关系设想在某个模型上得到实现，要么把题设条件经过适当地逻辑组合而构造成一种新的形式，从而使数学问题获得解决。在这个过程中思维的创造活动的特点是“构造”，我们不妨称之为构造性思维，运用构造性思维解题的方法，称为构造法。

在构造性思维过程中，要对题设条件进行逻辑组合、一般化、特殊化，巧妙地对概念进行分析与综合，最后制作出一种新的产品——思维的创造物与想象物。构造性思维有时体现在解题的全过程中，也有时体现于解题的某个关键环节或步骤中，构造性思维总是遵循着将数量关系组合为新的产物、在构造的模型上具体实现或在有限步骤内能具体实现的原则。这个原则在证明存在性的问题中广泛采用，而且被加以推广。比如构造一个函数，构造一个多

项式，构造一个数列等等，它常常成为解题中实现转化的关键步骤。构造方法不仅在证实问题结论中广泛采用，而且构造反例在证伪中的作用也是显见的。因此，我们有时也称构造性思维原则为数学解题中的构造性思想。

（二）

数学解题中的构造性思想与方法，现在仍然是一个探索课题。从解题实践经验中，我们体会到：构造性思维一要明确目的，即为什么目的而构造；二要弄清楚题设条件的特点，以便依据特点，确定方案实现这一构造。下面我们归纳列举几种在初等数学中常见的构造法则。

法则一 构造图形

如果问题条件中的数量关系有明显的几何意义或以某种方式可与几何图形建立联系，则可通过几何作图构造图形，将题设条件及其数量关系直接在图形中得到实现，然后在构造的图形中寻求所证的结论。

一般说来，只要图形构作的合理，所要求证的关系就会在所构造的图形中得到直接或者间接的显示。

比如，$a>0$，$b>0$，可以实现为两条线段 a 与 b，$a+b$，$a-b$ 可以实现为两条线段的和与差，$\sqrt{2}a$ 可以实现为线段 a 的 $\sqrt{2}$ 倍（用腰为 a 的等腰直角三角形的斜边来实现），a^2 可以用边长为 a 的正方形来实现等等。

再如，锐角三角函数可以在直角三角形中用“边比”来实现，也可以用单位圆中的三角函数线来实现。

还有些量可通过向量的形式在图形中得到实现，或者通过坐标系的构作而在图形中得到实现。

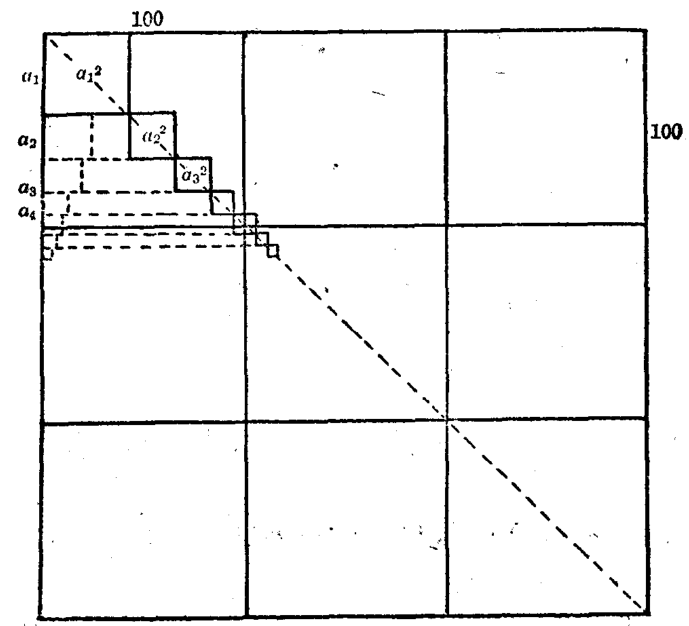


图 3

中学几何教材中介绍的勾股定理的“弦图”证法，就是通过构造图形实现的。

例 4 有 100 个正数 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_{100}$，

$a_1+a_2+\cdots+a_{100}=300$，且 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2\geqslant 10000$，

求证 $a_1+a_2+a_3>100$。

分析 由题中给出 100 个正数，以及这 100 个正数的平方和，启发我们利用这一关系构造几何图形。如图 3 作边长为 300 的正方形，如图分为 9 个边长为 100 的正方形，我们把边长为 $a_i(i=1,2,\cdots,100)$ 的小正方形依次由左上方顶点沿对角线放下去，最后一个恰在右下角顶点处。这完全由 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=300$ 得到保证。

由图，我们只要证明，若 $a_1+a_2+a_3\leqslant 100$，对角线上那 100 个小正方形不可能把左上角的边长为 100 的正方形填满即可。

为此，只要把所有小正方形向左平移到靠左边线处。注意到，若 $a_1+a_2+a_3=100$ 时，$a_1\geqslant\dfrac{100}{3}$，但依题设条件 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=300$ 知 $a_{100}\leqslant 3$。所以 $a_{100}<a_1$。因此

$$\begin{aligned}a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2&<a_1\times100+a_2\times100+a_3\times100\\&=(a_1+a_2+a_3)\times100\leqslant100\times100=10000,\end{aligned}$$

这与题设条件 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2\geqslant 10000$ 矛盾。所以应有 $a_1+a_2+a_3>100$ 成立。

证明 略。

例 5 证明，任意三角形的内切圆半径与外接圆半径之比不超过 $\dfrac{1}{2}$。

分析 设 $\triangle ABC$ 中，k_1 是它的内切圆，半径为 r，k_2 是它的外接圆，半径是 R，现在只要证明 $2r\leqslant R$ 即可。

我们联想到相似三角形内切圆半径之比等于相似比这个事实，不妨作一个与 $\triangle ABC$ 相似且内切圆半径为 $2r$ 的三角形，然后直接比较 $2r$ 与 R 的关系。

为此，过 $\triangle ABC$ 各顶点作对边的平行线交成 $\triangle A_1B_1C_1$，易知 $\triangle ABC$ 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的“中点三角形”。$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，且 $\triangle A_1B_1C_1$ 的内切圆半径为 $2r$。因为 $\triangle A_1B_1C_1$ 各边与圆 k_2 至少有一个交点，平行于 $\triangle A_1B_1C_1$ 各边分别作圆 k_2 的切线，如图 4 中所示，交得 $\triangle A_2B_2C_2$。圆 k_2 变成了 $\triangle A_2B_2C_2$ 的内切圆，由于 $\triangle A_2B_2C_2\supseteq\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2\backsim\triangle A_1B_1C_1$，所以 $2r\leqslant R$ 成立。

证明 略。

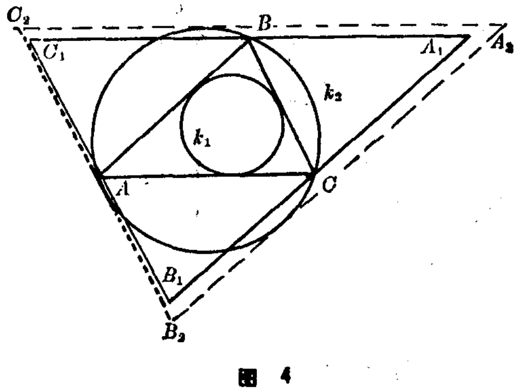


图 4

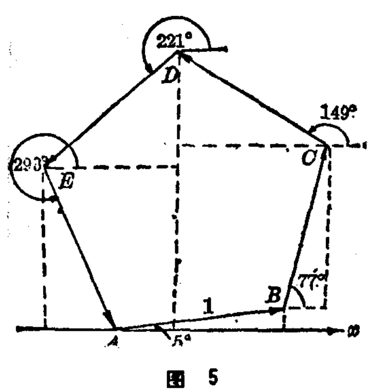


图 5

例 6 证明 $\cos5^\circ+\cos77^\circ+\cos149^\circ+\cos221^\circ+\cos293^\circ=0$。

分析 观察可知题目中这些角相差 72°，若均减去 5°，得序列 0°，72°，144°，216°，288°。

另外由于欲证结果为 0，而从一点引出的首尾相接的向量成一多边形，则这些向量在横轴上射影和为 0，而 $\cos\alpha$ 恰与向量在横轴投影的表示有关。将上述特点，进行组合加工，得出如图 5 的构造图形。

在平面上作一边长为 1 的正五边形 $ABCDE$，使其一边 AB 恰与 x 轴成倾角 $5°$。由于正五边形每个外角均为 $72°$，这时，向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{EA}$ 与 x 轴夹角分别为 $5°$、$77°$、$149°$、$221°$、$293°$。它们在 x 轴上的射影恰等于 $\cos 5°$、$\cos 77°$、$\cos 149°$、$\cos 221°$、$\cos 293°$。

由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=0$，则它们的各向量在 x 轴上的分量(射影)之和为 0。

即
$$\cos 5°+\cos 77°+\cos 149°+\cos 221°+\cos 293°=0.$$

证明 略。

图形构造解题过程的模式是：

$$\boxed{\text{题设条件特点分析}} \xrightarrow[\text{几何意义}]{\text{几何作图}} \boxed{\text{构造图形}} \xrightarrow[\text{或间接推理}]{\text{在图形中寻求}} \boxed{\text{所求结论}}$$

构造性思想与方法主要表现在从第一步(题设条件特点分析)向第二步(构造图形)的飞跃。

法则二 构造"算法"

主要是指我们能够直接设计、构造出一种可行的作图步骤、计算程序，在有限次内能够实现所构造的对象。这样，我们是通过构造出在有限步骤内确定对象的程序与方法，来证明对象的存在性。我们借用"算法"这一术语，称这种法则为构造"算法"。

我们设计辗转相除法来求两个正数的最大公约数，被称为"欧几里得算法"。这可以看作是构造"算法"的一个例子。

例 7 已知十个不同的正数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$。证明，至少存在 55 个彼此不等的形如
$$\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\varepsilon_3 a_3+\cdots+\varepsilon_{10} a_{10}$$
的正数，其中 ε_i 取 1 或 0。

分析 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$ 显然是符合要求的十个不同的正数 (如 $\varepsilon_1=1$，$\varepsilon_2=\varepsilon_3=\cdots=\varepsilon_{10}=0$，则取 a_1，以下类推)。其余 45 个彼此不同的数都要由这十个数设法构造出来，但又要彼此不等，我们要保证这点，不妨按严格递增次序构造。第一组共十个：

设 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7<a_8<a_9<a_{10}$，则第二组可选 $a_{10}+a_1<a_{10}+a_2<\cdots<a_{10}+a_9$ 共九个数，它们是 ε_i 中只有两个取 1 其余取 0 的不同的和数。这九个和数与第一组 10 个也彼此不等。依此法按递增次序可作出 ε_i 中有且只有 3 个取 1 的和数 8 个，有且仅有 4 个取 1 的和数 7 个，……有且仅有 9 个取 1 的和数 2 个，ε_i 全取 1 的和数 1 个，它们是

$$a_{10}+a_9+a_1<a_{10}+a_9+a_2<\cdots<a_{10}+a_9+a_8,$$
$$a_{10}+a_9+a_8+a_1<a_{10}+a_9+a_8+a_2<\cdots<a_{10}+a_9+a_8+a_7,$$
$$\cdots$$
$$a_{10}+a_9+a_8+\cdots+a_3+a_1<a_{10}+a_9+a_8+\cdots+a_3+a_2,$$
$$a_{10}+a_9+a_8+\cdots+a_3+a_2+a_1.$$

总计十组，共 $10+9+8+7+\cdots+3+2+1=55$ 个彼此不等的形如 $\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_{10} a_{10}$ (其中 ε_i 取 1 或 0)的正数。

证明 略。

本题可推广到"已知 n 个不同的正数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$。证明，至少存在 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个彼此不等的形如 $\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_n a_n$ 的正数。其中 ε_i 取 1 或 0。" 可依例 7 方法构作并写出 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个彼此不等的形如 $\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_n a_n$ 的正数的程序和步骤进行证明。

例 8 函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 都有定义。求证，$f(x)$ 一定可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和。

分析 本题已知 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的函数，要设计一种程序，以 $f(x)$ 为"原料"加工制作一个偶函数 $\varphi(x)$ 及一个奇函数 $\psi(x)$，并且使 $\varphi(x)+\psi(x)=f(x)$。

容易想到 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 都与 $\frac{1}{2}f(x)$ 有关系，要由 $f(x)$ 产生奇函数、偶函数，与自变量及函数的符号也有关。因此可按

$$f(x)\to f(-x)\begin{cases}\nearrow\varphi(x)\\ \searrow\psi(x)\end{cases}$$

的程序进行构造，得

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\quad \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

由于 $$\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x),$$

$$\psi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-\psi(x).$$

∴ $\varphi(x)$ 是偶函数，$\psi(x)$ 是奇函数。

而 $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=\varphi(x)+\psi(x)$，命题得证。

证明 略。

证题过程中实际上构造出了将 $f(x)$ 表为一个偶函数 $\varphi(x)$ 与一个奇函数 $\psi(x)$ 之和的表示方法的程序。

例 9 证明，能够找到 1985 个连续的自然数，它们中恰好只有一个质数。

分析 直接寻找适合于题设的 1985 个自然数，简直是大海捞针。但只要求设计一种方法，按照这个方法实施一定能找到一组 1985 个适合于条件的自然数。

联想到"质数无限多"的欧几里得证法中曾构造 $N=n!+1$。这样 $N+1$，$N+2$，…，$N+k$（其中 $k<n$）即为连续的 k 个合数。于是启发我们构造如下的程序。

设 $N=1985!+1$，因为质数无限多，取大于 N 的最小质数 p。这时，由 $N+1$，$N+2$，…，$N+1984$ 均为合数，所以 $p>N+1984$ 即 $p\geqslant N+1985$。这保证了在 N 与 p 之间至少有 1984 个合数，所以 $p-1$，$p-2$，$p-3$，…$p-1983$，$p-1984$ 恰为 1984 个连续的合数，而 p 是质数，所以

$p-1984$，$p-1983$，…，$p-2$，$p-1$，p 即为满足题设条件的 1985 个连续的自然数。

证明 略。

本题实际上构造了一种给出一组满足题设条件的 1985 个连续自然数的程序。

构造"算法"解题过程的模式是

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{题设条件}\\\text{特点分析}\end{array}}\xrightarrow[\text{安排一种算法}]{\text{设计一种程序}}\boxed{\text{构造“算法”}}\xrightarrow[\text{实现对象}]{\text{通过算法}}\boxed{\text{所求结论}}$$

显然构造"算法"较构造图形是一种更为抽象的构造性思维过程。

法则三 构造函数

由题设条件及所给的数量关系，构想、组合成一种新的函数、方程、多项式等具体关系，使问题在新的关系下实现转化从而获得解决。

在高中微积分教材中，拉格朗日中值定理的证明是典型的构造函数的例子。其中，为了

转化为可应用罗尔定理的条件，由几何直观的启示构造辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

成为关键的一步。读者不妨重温拉格朗日中值定理的证明，从中体会构造辅助函数的要领。

例 10 解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=n,\\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n,\\ \cdots\cdots\cdots\\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=n.\end{cases}$$

分析 该方程是 n 元方程组，形式很对称，我们构造函数

$$\begin{aligned}p(t)&=(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)\cdots(t-x_n)\\&=t^n+a_1t^{n-1}+a_2t^{n-2}+\cdots+a_{n-1}t+a_n,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}0&=p(x_1)+p(x_2)+\cdots+p(x_n)\\&=\sum_{i=1}^n x_i^n+a_1\sum_{i=1}^n x_i^{n-1}+a_2\sum_{i=1}^n x_i^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{i=1}^n x_n\\&\xlongequal{\text{(由原方程组)}}n+a_1n+a_2n+\cdots+a_{n-1}\cdot n+a_n\cdot n\\&=n(1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)=np(1).\end{aligned}$$

这表明 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中有一个为 1，根据方程对称性知 $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n=1$。

解 略。

例 11 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是实数，求证：

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

分析 要证明的结论形式与简化二次方程判别式的形式相似，启发我们设法构造一个二次函数，使其判别式恰为所求证的不等式。

构造函数：

$$p(x)=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),$$

容易看到

$$p(x)=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2\geqslant0,$$

所以恒有

$$4(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\leqslant0,$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

证明 略。

例 12 求证：存在一个整系数多项式 $p(x)$，使它当 $0.08\leqslant x\leqslant0.12$ 时，成立

$$|p(x)-0.1|<0.0001.$$

分析 我们由 $0.08\leqslant x\leqslant0.12$ 知

$$|10x-1|\leqslant0.2, \qquad ①$$

如果所求的多项式 $P(x)=\frac{1}{10}Q(x)$，则

由

$$|P(x)-0.1|<0.0001. \qquad ②$$

可得

$$|Q(x)-1|<0.001. \qquad ③$$

由于 $P(x)$ 要求整系数，所求 $Q(x)$ 的各项系数必须是 10 的倍数，且满足③式。很自然地想到构造函数

$$Q(x)=(10x-1)^n+1\quad(\text{其中 } n \text{ 为奇数}),$$

因为将 $10x-1$ 与①式联系，由二项式定理知，当 n 为奇数时，$(10x-1)^n+1$ 各项系数均为 10 的倍数，要 $Q(x)$ 满足③，即

$$|(10x-1)^n|<0.001,$$

根据①，必须选择 n，使得 $(0.2)^n<0.001$，
或 $5^n>10^3$，显然取 $n=5$ 即可。

于是我们构造出多项式

$$P(x)=\frac{1}{10}[(10x-1)^5+1]$$

满足条件。

证明 略。

例 12 是一种典型的构造函数的例题。

构造函数解题过程的模式是：

$$\boxed{\begin{matrix}\text{题设条件}\\\text{特点分析}\end{matrix}}\xrightarrow[\text{依条件重新组合}]{\text{构想、逻辑组合}}\boxed{\text{构造函数}}\xrightarrow{\text{由构造的函数推出}}\boxed{\text{所求结果}}$$

构造函数是更加抽象的构造性思维，除对问题条件特点分析之外，还要求对典型的函数及其特性要非常熟悉。

法则四　构造模型

将问题中的条件、数量关系，在一个构造的模型上实现并得到一种解释，从而实现了问题的证明或转化为在所构造的“模型”上相应问题的证明。

设问题中涉及集合 A，我们的构造目的在于寻求一个集合 B，A 与 B 之间存在一种一一映射关系，同时 A 中的数量关系与 B 中相应的数量关系也存在一一对应。这样我们把集合 A 中的问题化归为集合 B 中相对应的问题加以研究。

例 13　如果 x_1 和 x_2 的绝对值不大于 1，

求证：$\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}=2\sqrt{1-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$.

分析　通过笛卡尔直角坐标系建立平面点与数对 (x, y) 之间的一一对应，方程 $x^2+y^2=1$ 对应着单位圆，$x_1=OM_1$，$x_2=OM_2$（如图 6），则

$$\sqrt{1-x_1^2}=|M_1N_1|,\ \sqrt{1-x_2^2}=|M_2N_2|,$$

取 M_1M_2 中点 M，则 $\frac{x_1+x_2}{2}=OM$，

$$\sqrt{1-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}=|MN|,$$

设 MN 交 N_1N_2 于 N'，

由梯形中位线定理知

$$|M_1N_1|+|M_2N_2|=2|MN'|<2|MN|,$$

即
$$\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}\leqslant2\sqrt{1-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2},$$

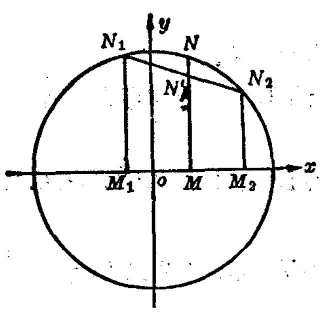


图 6

证明 略。

类似地建立空间直角坐标系，利用单位球模型可实现下述不等式的证明：

“如果 x_1, x_2, y_1, y_2 的绝对值都不大于 1，

则 $\sqrt{1-x_1^2-y_1^2}+\sqrt{1-x_2^2-y_2^2}\leqslant 2\sqrt{1-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2}$;”

“若 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ 的绝对值不大于1,

则 $\sqrt{1-x_1^2-y_1^2}+\sqrt{1-x_2^2-y_2^2}+\sqrt{1-x_3^2-y_3^2}\leqslant 3\sqrt{1-\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2-\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2}$”。

例13构造的是几何模型,然而,构造模型并非都是几何形式的。

例 14 求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ 有多少组非负整数解?

分析 设计模型,7个不可辨别的球,放在四个盒子中:

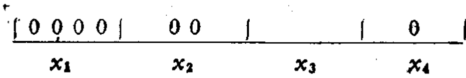


图 7

如图所示,球的放法对应着方程的一组解(4, 2, 0, 1)。反之,方程任一组非负整数解对应着球在盒中的一种放法。

因此,计算7个球在四个盒子中放法的总数 $C_{10}^7=C_{10}^3=120$,即方程非负整数解共120组。

解 略。

例 15 已知空间中六条直线,其中任何三条不平行,任何三条不交于一点,也不共面。

求证:在这6条直线中总可选出三条,其中任二条异面。

分析 由已知条件,任意三条已知直线中必有两条异面直线,把这六条直线与空间六点 A、B、C、D、E、F 建立一一对应,两条直线异面,则其对应两点间用红色线段相连, 否则以蓝色线段相连。这样建立了一个模型,原问题归结为:已知六个点,其中任意两点用红线段或蓝线段连接,且任何一个以这些点为顶点的三角形都有一边是红色的,求证,存在一个三角形,其三边都是红色的。

由于只涂两种颜色,所以 P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, P_1P_5, P_1P_6 中至少有三条涂同一颜色。不妨设 P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 颜色相同。

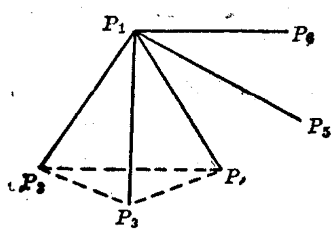


图 8

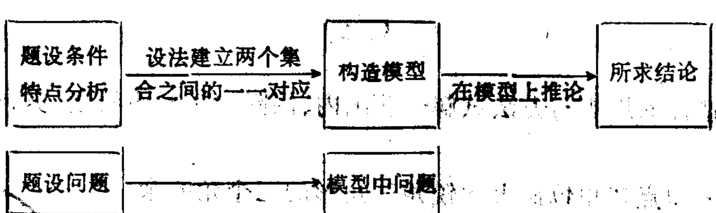
(1) 若这三条均涂蓝色,则 $\triangle P_2P_3P_4$ 三边将都是红色。

(2) 若这三条均涂红色,根据题意,$\triangle P_2P_3P_4$ 中有一边也涂红色,设 P_2P_3 为红色,则 $\triangle P_1P_2P_3$ 三边皆为红色。

综合(1)、(2),问题得证。

证明 略。

构造模型解题过程的模式是:



构造模型是数学解题中的重要方法,同时也是构造性思维的一种重要形式,其实质是建立两个集合的元素之间、元素的关系之间的一种特殊的一一映射。

法则五 构造反例

为了说明一个命题不真,常常选择一个符合于题设条件但命题结论不成立的特例。这个过程叫做构造反例。选择特殊值、极端情形,常常是构造反例的关键。

例 16 "设 A、B 是坐标平面上的两个点集，$C_r=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$，若对于任何 r，都有 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，则必有 $A\subseteq B$"。

试判定命题是否正确，如不正确，构造一个反例。

分析 $(0, 0)$点是特殊点，我们构造反例，

取 $A=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，

B 为去掉A中$(0, 0)$点的集合。容易看到 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，但$A$不包含于$B$中。

解 略。

例 17 "$\triangle ABC$ 的三边为 a, b, c，面积为 S，$\triangle A_1B_1C_1$ 三边为 a_1, b_1, c_1，面积为 S_1。若 $a>a_1$, $b>b_1$, $c>c_1$，则 $S>S_1$。"

试判定命题是否正确，如不正确，构造一个反例。

分析 一个三角形一条边虽然很长，但若这边上的高很小，则三角形面积也很小。于是可构造反例如下：

$$\triangle ABC \text{ 中}, BC=200, AB=AC=101,$$
$$\triangle A_1B_1C_1 \text{ 中}, A_1B_1=B_1C_1=C_1A_1=100,$$
$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 100^2>4000.$$

$\triangle ABC$ 中，BC 边的高 $h=\sqrt{101^2-100^2}=\sqrt{201}<15$，

$$S=\frac{1}{2}\times 200\times h<\frac{1}{2}\times 200\times 15=1500,$$
$$\therefore\ S_1>S.$$

图 9

由此例表明，题设命题不真。

解 略。

构造反例的过程图示如下：

问题条件特点分析 $\xrightarrow[\text{极端情形}]{\text{通过特殊值}}$ 构造反例 $\xrightarrow{\text{得出结论}}$ 原命题不真

以上所例举的五种构造方法是用构造法解题中常见的五种类型，但远非构造性思想与方法的全部。对数学解题中构造性思想与方法的探讨，也还只是初步和浅陋的。尚有待于通过实践进一步总结，使之更加系统化、理论化。

（三）

我们应用构造性的思想与方法试解一些国内、国际的数学竞赛题，共同探讨构造法在解题中的应用。

例 18 证明：顶点在单位圆上的锐角三角形的三个角的余弦之和小于该三角形的周长之半。

分析 因 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以外心O在三角形内。

连 AO、BO、CO，则 $AO=BO=CO=1$，取 BC、CA、AB 中点分别为 D、E、F，则 $BD=\frac{a}{2}$, $CE=\frac{b}{2}$, $AF=\frac{c}{2}$，

由图 10 中可见 $\cos B<\cos\angle OBD=\frac{BD}{OB}=\frac{a}{2}$，

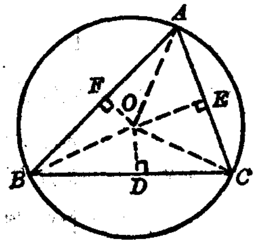


图 10

同理
$$\cos C<\cos\angle OCE=\frac{b}{2},\ \cos A<\cos\angle OAF=\frac{c}{2},$$
$$\therefore\ \cos A+\cos B+\cos C<\frac{1}{2}(a+b+c).$$

证明 略。

例 19 正数 x, y, z 满足方程组

$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25 \\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9 \\ z^2+xz+x^2=16, \end{cases}$$

试求 $xy+2yz+3xz$ 的值。

分析 原方程可变形为：

$$\begin{cases} x^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2-2x\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)\cos 150^\circ=5^2 & ① \\ \left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+z^2=3^2 & ② \\ z^2+x^2-2xz\cos 120^\circ=4^2, & ③ \end{cases}$$

上述三式与余弦定理及勾股定理相似，故可构造图形(如图 11)，① 式满足 x、$\dfrac{y}{\sqrt{3}}$ 为边，夹角为 150°，而第三边为 5 的 $\triangle OPR$，② 式满足以 $\dfrac{y}{\sqrt{3}}$，z 为直角边，斜边为 3 的直角 $\triangle OPQ$，③ 式满足以 z、x 为边，夹角为 120°，第三边为 4 的 $\triangle OQR$。

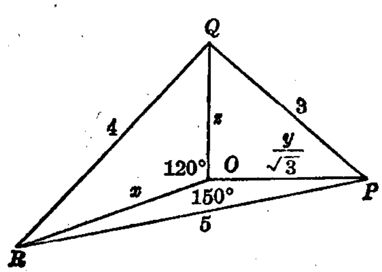


图 11

在 $\triangle PQR$ 中，
$$\because\ PR^2=PQ^2+QR^2,$$
$$\therefore\ \angle PQR=90^\circ,$$
从而
$$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6,$$
又
$$S_{\triangle PQR}=S_{\triangle POR}+S_{\triangle POQ}+S_{\triangle QOR}$$
$$=\frac{1}{2}x\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\sin 150^\circ+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)z+\frac{1}{2}xz\sin 120^\circ$$
$$=\frac{xy}{4\sqrt{3}}+\frac{yz}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}xz}{4}=\frac{1}{4\sqrt{3}}(xy+2yz+3xz),$$
所以
$$xy+2yz+3xz=6\cdot 4\sqrt{3}=24\sqrt{3}.$$

解 略。

例 20 **判断并证明：是否能够在半径为 1 的圆周上选取 1975 个点，使得其中任意两点间的直线距离都是有理数。**

分析 依据初等数论常用公式
$$\left(\frac{2uv}{u^2+v^2}\right)^2+\left(\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\right)^2=1,$$
我们可以在直径为 1 的半圆周上找到 1975 个点：R，$A_1, A_2, \cdots, A_{1973}, S$。其中 $RS=1$(是直径)，使得 A_1R，$A_2R, \cdots, A_{1973}R, A_1S, A_2S, \cdots, A_{1973}S$ 均为有理数。

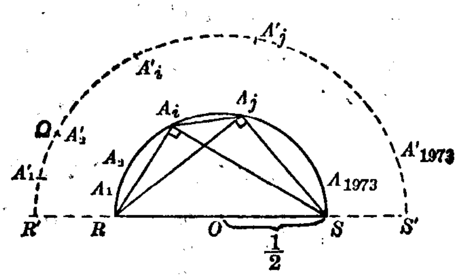


图 12

为此，我们选择 1973 个彼此不同的正整数对，
$$(u_1, v_1),\ (u_2, v_2),\ \cdots(u_{1973}, v_{1973}).$$
(其中 $u_i>v_i$)。这样，就在半圆周上取到异于 R、S 的彼此不同的点 $A_1, A_2, \cdots, A_{1973}$，使得

$$A_iR=\frac{2u_iv_i}{u_i^2+v_i^2},\quad A_iS=\frac{u_i^2-v_i^2}{u_i^2+v_i^2}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots 1973).$$

显然 A_iR, A_iS 均为有理数。

我们再证明，$A_iA_j(i\neq j)$ 也都是有理数。

由于直径 $RS=1$，由正弦定理得

$$\begin{aligned}A_iA_j&=\sin\angle A_iRA_j=\sin(\angle A_iRS-\angle A_jRS)\\&=\sin\angle A_iRS\cdot\cos\angle A_jRS-\sin\angle A_jRS\cdot\cos\angle A_iRS\qquad(i\neq j),\end{aligned}$$

因为 A_iR, A_iS, A_jR, A_jS 为有理数，

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\sin\angle A_iRS=A_iS,\quad \cos\angle A_iRS=A_iR,\\ &\sin\angle A_jRS=A_jS,\quad \cos\angle A_jRS=A_jR.\end{aligned}$$

均为有理数。

故 A_iA_j 都是有理数，$(i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 1973)$。

这样，在直径 $RS=1$ 的半圆周上找到了 1975 个点 R, A_1, A_2, $\cdots$, A_{1973}, S，其中任意两点间的距离都是有理数。

以 RS 中点 O 为位似中心，作位似比为 2 的位似变换，将上述半圆周变换为半径为 1 的半圆周 Ω; R, A_1, A_2, $\cdots$, A_{1973}, S 变换到 Ω 上的 R', A_1', A_2', $\cdots$, A_{1973}', S'。显然，这 1975 个点是半径为 1 的圆周上的点，且任两点之间的距离都是有理数。

证明 略。

例 21 证明 如果 p、q 是互质的正整数，则

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\left[\frac{3p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

（其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分。）

分析 由 $\left[\frac{p}{q}\right]$ 表示不超过 $\frac{p}{q}$ 的整数的个数，$(p-1)(q-1)$ 可构想为边长为 p、q 的矩形内部“整点”的个数。于是一个新颖的设想产生了，不妨从计算面积为 pq 的矩形内部的“整点”个数入手。

在直角坐标系 xOy 中，作矩形 $OABC$，使 $OA=q$, $OC=p$。考察矩形 $OABC$ 内的整点 $(x,\ y)$，其中 $1\leqslant x\leqslant\ \ -1$, $1\leqslant y\leqslant p-1$，总数恰为 $(p-1)(q-1)$。

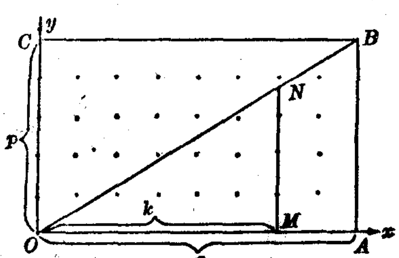


图 13

引矩形的对角线 OB，显然，这个对角线上没有一个整点。[对角线 OB 上的所有点的坐标 $(x,\ y)$ 满足关系式

$$\frac{x}{y}=\frac{OA}{AB}=\frac{q}{p},$$

但因 $(q,\ p)=1$，因此不存在正数 $x<q$, $y<p$，使得 $\frac{x}{y}=\frac{q}{p}$。] 因此对角线 OB 下方，即 $\triangle OAB$ 内的整点数恰为 $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$。

我们现在从另一个角度计算 $\triangle OAB$ 内整点数目，取横坐标为 $k(1\leqslant k\leqslant q-1)$，设 $OM=k$，那么

$$MN=\frac{OM}{OA}\cdot AB=\frac{kp}{q},$$

$\left[\frac{kp}{q}\right]$ 即为线段 MN 上的整点数。因此

$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\left[\frac{3p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]$ 恰等于 $\triangle OAB$ 内所有的整点数。同时

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\left[\frac{3p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

同理可证：

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\left[\frac{3q}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$