常微分方程

蔡燧林 编

浙江大学出版社

$y^{(n)}=f(x)$

高等学校教学用书

常微分方程

蔡燧林　编

浙江大学出版社

内 容 提 要

本书可供高等院校理工科各专业（数学专业除外）作为常微分方程教材或参考书. 全书分四章：初等积分法、线性微分方程、线性微分方程组、非线性系统的分析（包括稳定性理论、定性理论和摄动方法初步）。各章配有习题并附答案，个别习题还有提示。书末有两个附录：常微分方程组的初值问题解的存在唯一性定理和算子解法，可供读者选用。

常微分方程

蔡燧林　编

责任编辑　陈晓嘉

*　*　*

浙江大学出版社出版

（杭州玉古路 20 号　邮政编码 310027）

浙江大学出版社电脑排版中心排版

杭州金融管理干部学院印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

*　*　*

787×1092　32 开本　7.5 印张　174 千字

1988 年 4 月第 1 版　1997 年 7 月第 4 次印刷

印数：11031—14030

ISBN 7-308-00057-5/O・014　定价：8.00 元

前　言

本书是作者在自编讲义基础上，结合多年来在浙江大学的教学实践，经较大修改编写而成的. 浙大的部分工科及理科的常微分方程单独设课七八年以来，在提高学生的常微分方程水平，加深微积分训练，加强与其他数学课的横向联系等方面，均起到了良好的作用. 本书可作为工科及部分理科的常微分方程课教材或教学参考书，也可供广大工程技术人员自学或参考.

全书共分四章. 第一章初等积分法，介绍了一些特殊类型的一阶及高阶微分方程的解法，其中贯穿了求解一阶方程的两个基本方法——变量变换法及积分因子法. 从目前发展来看，初等积分法这部分内容不需多讲，但又不可不讲. 基于这一点，作者选取了如目录中所述的一些内容，教师在讲授时，还可以删节，以控制学时. 为了使读者一开始就对常微分方程的全貌有所了解，这一章还介绍了常微分方程的基本概念、基本思想以及一阶和 n 阶常微分方程初值问题解的存在和唯一性定理(证明放在附录中). 第二章线性微分方程，详细论述了 n 阶线性微分方程的通解结构理论，以使读者能够比较清晰、完整地了解这一部分内容. 对于常系数齐次的情形，就其特征方程有重根时所对应的解的情况，给出了简洁的证明. 第三章线性微分方程组，在布局结构上几乎与第二章平行，介绍了对于常系数齐次线性方程组的循环列解法，并给出了常系数齐

次线性方程组的通解定理及其证明.为使行文简洁,这一章采用了向量与矩阵的记号,但只要求读者知道它们的意义、简单运算以及线性代数方程组基础解系的知识,并不涉及线性代数其他更多的内容.当然,对于已具有线性代数知识的读者来说,由于采用了这种写法,得益会更多.第四章非线性系统的分析,简单介绍了稳定性概念及一次近似理论、在相平面上奇点邻域内轨线的性态、摄动法、基本概念、正则摄动法和 LP 方法.由于在实际中大量出现的都是非线性现象,而且要求出非线性系统的精确解几乎是不可能的,因此一般只研究解的性质或求渐近展开式.由于篇幅的限制,本书只简单地介绍了研究局部性态或弱非线性的点滴理论和方法,有关进一步的探讨,读者可参考其他书籍.书中各章配有习题,并附有答案.书末有两个附录,供读者参考或教学中选用.

本书承浙江大学出版社出版,作者对此表示衷心的感谢.对书中的不足和错误之处,恳切地希望读者批评指正.

编　者

1988 年 3 月

重排说明

本书第一版至今，已有九年，印刷发行共计一万余册. 原纸版几经重印，已不能再用. 浙江大学出版社不惜耗资用计算机重新排版，作者在此表示深切感谢. 趁此重排之际，我将此书略事修改. 一是改正了第一版中的一些印刷错误；二是删去了一些重复率太多或太难的习题；三是增加了近十年来工科研究生入学考试中有关常微分方程的一些有代表性的题目，其中部分放在习题中，或者放在例题中. 这些新增的习题和例题，值得读者注意.

作　者

1997 年 3 月

目　　录

第一章　初等积分法

§1　基本概念

在研究自然现象和工程技术问题时，常需要找出所研究的变量 x 和 y 之间形如 $F(x,y)=0$ 的关系. 有时找不到这种直接的关系式，但可以根据具体问题所具有的客观规律，建立起这些变量和它们的导数或微分之间的关系，从而得到包含有未知函数的导数或微分的方程. 于是建立并研究这些方程，就成为寻找变量之间的函数关系的一个重要方面.

一般，在一个（组）方程中，如果未知量是一个（组）函数，而且该方程中含有此未知函数的导数，则称这种方程为**微分方程**（**组**）. 微分方程是微积分的进一步发展. 为更好地阐述有关微分方程的一些基本概念，我们先看几个例子.

例 1　设温度为 T_0 的物体放置在温度为 $\tau(\tau<T_0)$ 的空气中. 实验表明，物体温度对时间 t 的变化率与当时物体和空气的温度之差成正比，比例常数 $k(>0)$ 依赖于所给物质（该物体和空气）的性质，可由实验确定. 若空气的温度保持不变，求从实验开始时算起，在时刻 t 物体的温度.

解　设时刻 t 时物体的温度为 T，则有

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-\tau). \tag{1.1}$$

因为当温差$(T-\tau)$为正(负)时,物体的温度T随时间t的增加而减小(增加),故系数k前总添负号.

显然方程(1.1)就是一个微分方程.

由题意,未知函数T除了要满足微分方程(1.1)外,还要满足条件:

$$T|_{t=0}=T_0. \tag{1.2}$$

现在我们要由微分方程(1.1)求出未知函数T.为此,改写(1.1)为

$$\frac{dT}{T-\tau}=-k dt.$$

两边积分得

$$\ln(T-\tau)=-kt+c_1,$$

这里c_1是任意常数.于是得到

$$T-\tau=e^{-kt+c_1}=e^{c_1}e^{-kt},$$

命$e^{c_1}=c$,这里c是一个新的任意常数,则有

$$T=\tau+ce^{-kt}. \tag{1.3}$$

由(1.2),当$t=0$时$T=T_0$,代入(1.3)得$c=T_0-\tau$.这样,(1.3)中的任意常数c就被确定了,于是时刻t时物体的温度

$$T=\tau+(T_0-\tau)e^{-kt}, \tag{1.4}$$

这就是所求物体的温度T与时间t的函数关系.它满足微分方程(1.1)及条件(1.2).

(1.4)表示的是初始温度为T_0的某一物体的温度T随时间t变化的规律.(1.3)中含有任意常数c,这表明它是一个函数族,因而刻画的是在各种不同初始温度下,某一物体温度T随时间t变化的共同规律.

例 2　在离地面高度为 s_0 处，以初速 v_0 垂直上抛一物体. 设坐标原点 O 取在地面上；Os 轴向上为正向（如图 1-1）. 若不计空气阻力，求物体的运动规律.

解　设在时刻 t，物体位于坐标 s 处. 由于物体在运动过程中，只受重力 $F=-mg$ 的作用，其中负号是因为引力方向与选定的坐标轴正向相反. 因此根据牛顿第二定律 $ma=F$（其中 a 为运动的加速度，$a=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$），有

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-mg,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-g. \tag{1.5}$$

方程(1.5)也是一个微分方程. s 除了要满足微分方程(1.5)外，还要满足条件：

$$s\big|_{t=0}=s_0,\qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}=v_0. \tag{1.6}$$

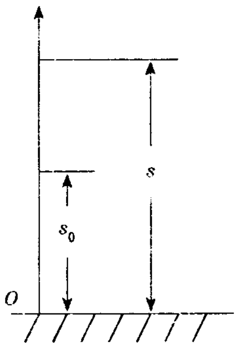

图1-1

将(1.5)化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)=-g,$$

积分两次，得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-gt+c_1, \tag{1.7}$$

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2, \tag{1.8}$$

其中 c_1,c_2 是两个任意常数.

把条件(1.6)用于(1.8)，得

$$c_2=s_0,\qquad c_1=v_0.$$

于是

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0. \tag{1.9}$$

这就是所求的运动规律. 它满足微分方程(1.5)及条件(1.6).

(1.9)表示的是初始位置为s_0,初始速度为v_0的垂直上抛物体的运动规律. (1.8)含有两个任意常数c_1和c_2,因而是一个函数族,刻画的是在各种不同初始位置和初始速度下,垂直上抛物体运动的共同规律.

下面介绍微分方程的一些基本概念.

如果在微分方程里,出现的未知函数是单个自变量的函数,我们称这一类微分方程为**常微分方程**. 例如(1.1)和(1.5)都是常微分方程. 如果在微分方程里,所出现的未知函数是两个或两个以上自变量的函数,则称该类方程为**偏微分方程**. 如$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$都是偏微分方程. 本书仅研究常微分方程. 以下简称常微分方程为微分方程或方程.

在微分方程中出现的未知函数的导数的最高阶数,称为微分方程的**阶**. 例如(1.1)是一阶微分方程,(1.5)是二阶微分方程,又如$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$也是二阶微分方程.

一阶微分方程的一般形式是

$$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0, \tag{1.10}$$

其中F是x,y和$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的已知函数,且一定要含有$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. x是自变量,y是未知函数.

已经解出导数的一阶微分方程的一般形式是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \tag{1.11}$$

其中 $f(x,y)$ 是 x 和 y 的已知函数.

设函数 $y=\varphi(x)$ 在某区间 $a<x<b$ 内连续并有连续的一阶导数,并且在该区间内恒有 $F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\equiv 0$(或 $\varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x))$),则称 $y=\varphi(x)$ 是(1.10)(或(1.11))的一个**解**,区间 $a<x<b$ 是解 $y=\varphi(x)$ 的定义区间.

如果从关系式 $\Phi(x,y)=0$ 所能确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 是(1.10)(或(1.11))的解,则称 $\Phi(x,y)=0$ 是(1.10)(或(1.11))的一个**积分**.求得了微分方程的一个积分,就认为求得了它的一个解,所以一般工科教科书上不区分解与积分的差别.方程的解或积分在 (x,y) 平面上的图形称为该方程的**积分曲线**.

在直角坐标系中,我们可以给微分方程以如下的几何解释:对于给定的微分方程(1.11),其中 $f(x,y)$ 是 (x,y) 平面上某区域 G 内定义的函数,对 G 内的每一点 (x,y),作斜率为 $f(x,y)$ 的小直线段,则说在 G 内确定了一个**方向场**.给定一个形如(1.11)的微分方程,就相当于在相应的区域内给定一个方向场.微分方程(1.11)的积分曲线是这样的曲线,在它上面的每一点 (x,y) 处的切线斜率都等于 $f(x,y)$,即在每一点都与方向场的方向相切.

确定了一个微分方程之后,主要的问题是求该方程的解.这里包含两个问题:一是是否存在解?二是如何具体求出解?只有存在解,才有可能去求解的精确表达式或近似表达式.

现在我们来讲第一个问题.首先要指出,由于一个微分方

程的解可以有很多,因此为了要确定其中某一个特定的解,还需要附加一定的条件.这种附加条件与方程(1.11)同样重要.关于方程(1.11)的解的存在性,有下述定理.

定理 1.1 考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.11}$$

及条件

$$y|_{x=x_0}=y_0. \tag{1.12}$$

设 $f(x,y)$ 在区域

$$D:\quad |x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b$$

内连续,且有连续的偏导数 $f'_y(x,y)$,则在区间

$$|x-x_0|\leqslant h$$

内存在唯一的 $y=\varphi(x)$ 满足方程(1.11)及条件(1.12).其中 $h=\min(a,b/M)$, $M=\max\limits_{(x,y)\in G}|f(x,y)|$.

(证明见附录)

定理 1.1 中,条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 称为一阶方程的**初值条件**.求方程(1.11)满足初值条件(1.12)的解称为**初值问题**.定理 1.1 称为一阶方程初值问题解的存在唯一性定理.方程(1.11)满足初值条件(1.12)的解称为**特解**.由上面的例 1 可见,满足微分方程(1.1)的解可以含有一个任意常数而形成一个解族.一般,如果含有一个任意常数 a 的函数族 $y=\varphi(x,c)$ 满足

$$\frac{d\varphi(x,c)}{dx}\equiv f(x,\varphi(x,c)),$$

并且对于区域 G 内的任意一点 (x_0,y_0),总存在相应的 c 值,使 $\varphi(x_0,c)=y_0$,则称 $y=\varphi(x,c)$ 是方程(1.11)在区域 G 内的**通解**.通常,"区域 G 内的"几个字不提.如例 1 中,条件(1.2)是

初值条件,(1.4)是微分方程(1.1)满足初值条件(1.2)的特解,(1.3)是(1.1)的通解.与积分的定义类似,可以定义通积分.

下面我们来看 n 阶微分方程的情况.

n 阶微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{1.13}$$

其中 F 是 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的已知函数,且一定要含有 $y^{(n)}$. x 是自变量,y 是未知函数.

已经解出未知函数的最高阶导数的 n 阶方程的一般形式是

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}). \tag{1.14}$$

其中 f 是 $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 的已知函数.

设函数 $y=\varphi(x)$ 在某区间 $a<x<b$ 内连续并有直至 n 阶的连续导数,而且在该区间内恒有 $F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0$(或 $\varphi^{(n)}(x)\equiv f(x,\varphi(x),\cdots,\varphi^{(n-1)}(x))$),则称 $y=\varphi(x)$ 是(1.13)(或(1.14))在区间 $a<x<b$ 内的一个**解**.类似地可以定义(1.13)(或(1.14))的积分和积分曲线.

n 阶方程的**初值条件**是

$$y|_{x=x_0}=y_0,y'|_{x=x_0}=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}, \tag{1.15}$$

其中 $y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)}$ 和 x_0 是 $n+1$ 个给定的数.求方程(1.14)满足初值条件(1.15)的解称为 n 阶方程的**初值问题**.

定理 1.2 设函数 $f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 在区域

$$D: |x-x_0|\leqslant a, |y^{(i)}-y_0^{(i)}|\leqslant b$$
$$(i=0,1,\cdots,n-1) \tag{1.16}$$

内连续(这里及以后 $y^{(0)} \equiv y$),并且分别对 $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ 有连续偏导数,则在区间 $|x - x_0| \leqslant h$ 内存在唯一的 $y = \varphi(x)$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), & (1.14) \\ y^{(i)}|_{x=x_0} = y_0^{(i)} \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1). & (1.15) \end{cases}$$

其中

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

$$M = \max_{(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \in D} |f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})|.$$

(证明见附录)

方程(1.14)满足条件(1.15)的解称为**特解**. 由例 2 可见,满足 2 阶方程的解可以含有两个任意常数. 一般,如果含有 n 个任意常数 $c_1, \cdots, c_n$ 的函数 $y = \varphi(x, c_1, \cdots, c_n)$ 满足

$$\varphi^{(n)}(x, c_1, \cdots, c_n) \equiv f(x, \varphi(x, c_1, \cdots, c_n), \cdots, \\ \varphi^{(n-1)}(x, c_1, \cdots, c_n)),$$

并且对于 $n + 1$ 维区域 G 内的任意一点 $(x_0, y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)})$,总存在相应的 $c_1, \cdots, c_n$ 值,使

$$\varphi^{(i)}(x_0, c_1, \cdots, c_n) = y_0^{(i)} \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1),$$

则称 $y = \varphi(x, c_1, \cdots, c_n)$ 是方程(1.14)在区域 G 内的**通解**. 如例 2 中,条件(1.6)是初值条件,(1.9)是微分方程(1.5)满足初值条件(1.6)的特解,(1.8)是(1.5)的通解. 类似地可以定义通积分.

定理 1.1 和定理 1.2 的意义是很重要的. 因为只有解存在,才有可能去寻求它的精确表达式或近似表达式. 也只有在一定的条件下解才唯一,才有可能去求出确定的解. 作为工科

教材，我们不打算在解的存在唯一性问题上多花笔墨.

从微分方程作为解决工程技术问题的工具这一要求来说，我们研究微分方程的主要步骤是：

(1) 根据实际问题，建立起反映变量间内在联系的微分方程并列出初值条件(一般称此步骤为建立数学模型)；

(2) 求出满足微分方程并适合初值条件的解或研究解的性质；

(3) 再结合实际问题，研究解的实际意义.

本章从下节起，将按照类型特点介绍几种常用的微分方程及其解法.

§2　可分离变量方程·齐次方程

一、可分离变量方程

我们首先讨论已解出导数的一阶微分方程(1.11)的一种特殊形式，即具有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x)\psi(y) \tag{1.17}$$

形式的方程，其特点是，右边是一个仅含 x 的函数与一个仅含 y 的函数的乘积. 我们称这类方程为**可分离变量的微分方程**. 以下讨论这类方程的两种解法，并设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都是连续函数.

(1) 设 $\psi(y)\neq 0$，我们改写方程(1.17)，使等号一边仅含 y 的函数和 y 的微分 $\mathrm{d}y$，另一边仅含 x 的函数和 x 的微分 $\mathrm{d}x$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\varphi(x)\mathrm{d}x. \tag{1.18}$$