初中二年级（下）

中学数学系列讲座

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会　编

清华大学出版社

初中二年级（下）

中学数学系列讲座

编

中学数学系列讲座

初中二年级

（下册）

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会 编

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是初中二年级下学期学生的课外阅读书．目的是为了扩大学生的知识面，丰富解题方法，从而提高数学的分析、解题能力。

全书共七讲，内容包括换元法、列方程解应用题、二元二次方程组、不等式组的应用、平行四边形、对称、勾股定理等，每讲都有方法介绍、例题分析、规律总结，并配有练习题与答案．本书可供自学青年及初中数学教师参考，也为各校开展学生课外数学小组活动提供了素材。

中学数学系列讲座

初中二年级（下册）

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会　编

☆

清华大学出版社出版

北京　清华园

北京海淀昊海印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

☆

开本：787×1092 1/32　印张：5.25　字数：117千字

1989年2月第1版　　1989年2月第1次印刷

印数：00001—30000　　定价：1.40元

ISBN 7-302-00373-4/O·71

前　言

《中学数学系列讲座》共分11册：初中一、二、三年级及高中一、二年级上、下各一册，高三年级全一册.

这套书是以"十年制数学教学大纲"为依据，参照各年级教科书内容与实际教学进度编写而成. 这是一套具有提高性质的课外读物，用以扩大学生的知识面，开拓视野，丰富解题方法，提高学生分析问题与解决问题的能力.

本"系列讲座"以数学专题讲座的形式编写，各讲独立成章，便于学生根据自己的兴趣和需要灵活选读，亦可供中学数学教师和自学者参考，并为各校开展数学课外活动提供素材.

这套书由北京市海淀区教师进修学校数学组与北京数学会海淀区分会联合组成编委会，负责组织编写，并得到海淀区教育局的支持和指导. 由于经验不足，一定有不少缺点，敬请读者批评指正，以便今后修改与补充.

《中学数学系列讲座》编委会

《中学数学系列讲座》
编委会名单

目　录

第一讲

解方程的重要方法——换元法

贾育明

方程是代数的重要内容．在课内，大家已经学会了一些典型的、基本的方程解法．为了提高数学兴趣，增强解题能力，下面，我们一起学习解方程的另一个重要方法——换元法．

一． 换元法简介

例1 解方程组

$$\begin{cases}(x+2y-8)^2+(2-x)^2=0, & (1)\\ xz^2+yz-5\sqrt{xz^2+yz+9}+3=0. & (2)\end{cases}$$

（上海数学竞赛试题）

略解： 由（1）知，$x+2y-8=0$；$2-x=0$．即$x=2$，$y=3$．

以 $x=2$、$y=3$ 代入（2）得

$$2z^2+3z-5\sqrt{2z^2+3z+9}+3=0. \qquad (3)$$

令 $t=\sqrt{2z^2+3z+9}$，则得

$t^2-5t-6=0$，解得

$t_1=6$，或$t_2=-1$．

（因 $t\geqslant0$，负根应舍去．）

$\therefore$ $2z^2+3z+9=36$．解得

$$z_1=3 \text{ 或 } z_2=-\frac{9}{2}.$$

∴方程组的解为 $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=3, \\ z_1=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2, \\ y_2=3, \\ z_2=-\dfrac{9}{2}. \end{cases}$

例 2 解方程 $\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}}$

$$=5.$$

（安徽省数学竞赛试题）

略解： 设 $\sqrt{x-3}=y$，则 $x=y^2+3$，代入原方程，得

$$\sqrt{y^2+1+2y}+\sqrt{y^2+4+4y}=5,$$

$$|y+1|+|y+2|=5.$$

但因为 $y=\sqrt{x-3}\geqslant 0$，所以方程化为

$$y+1+y+2=5.$$

所以 $y=1$，由此可得 $x=4$.

以上两个例题中，都引入了辅助未知数，使之代替有关方程中的未知数，这种解方程的方法叫换元法.

在课本中，我们已经接触过这种方法．大家在学习此方法的同时又得到过那些启示呢？

代数方法解应用问题开创了用文字（x，y，z…）表示未知量的方法，这使得代数解题的思路和步骤与算术中的方法产生根本的区别，从而使解题过程大大简化．在解方程及其他一些数学问题时，为了使问题化新为旧、化难为易，对

一个含未知数的代数式也可以用另一个表示新的未知数的字母来代换．这种字母的代换仅仅是为了简化解题步骤，在解题的全部过程中，仍以求出原题的未知数为最终目的．因此，人们把换元法中使用的新的未知数又叫作辅助未知量或称为“参数”，辅助未知量的引入和参与解题过程，仅仅起到简化数学问题的作用．

换言之，采用换元法，可以将已学典型方程的解法的适用范围扩大了，当我们再见到某些陌生的方程，有了一种研究解决的办法．

练 习 题

用换元法解下列方程或方程组：

1. $$\begin{cases} \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{5}{y-2}=1, \\ \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{y-2}=2. \end{cases}$$

（广东省数学竞赛试题）

2. $(x-3)^2+\sqrt{x^2-6x+16}=13$.

3 $$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=5, \\ x-y=12. \end{cases}$$

提示：可设$\sqrt{x+1}=u$、$\sqrt{y-2}=v$ 解之．

原题引自课本代数第三册 P155，13．（13）．解后请比较换元法与代入法的区别．

三．审题观察的目的及方法

换元法巧在换元，难点也在换元．为了掌握此方法的实

题，建议大家学习时从培养自己审题的观察能力入手.

数学上的观察，有很强的目的性，不同于一般地阅读浏览. 为便于大家理解与记忆. 我们把观察方法分为三种情况来阐述.

1. 联想式观察

对于一般的方程，我们是根据未知数的种类、次数、个数进行分类，然后沿用典型解法求解的. 对于一个新的方程，在没有进行系统的学习之前，审题时可以把观察的重点放在新方程与旧方程的联系上，尽量发现它与某类方程间的共同特征，然后设想是否能采用某种代换，使新问题归结为已经解过的旧问题，从而寻找到解题的方向.

例3 解下列方程：

（1）$2^{2x}-12\cdot 2^{x}+32=0$；

（2）$2(2\sqrt{6}+5)^{x}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{x}-1=0$.

分析：（1）观察方程 $2^{2x}-12\cdot 2^{x}+32=0$ 后，应该发现以下三个显而易见的特点：

① 方程是一元的；

② 含未知数的项有两项，即 2^{2x} 与 $12\cdot 2^{x}$；

③ 2^{2x} 与 2^{x} 间存在着平方关系，即

$$(2^{x})^{2}=2^{2x}.$$

这个关系是因为条件中的主要对象为指数，从而由指数的有关定义发现的.

经过怎样的代换可以使它归结为我们所熟悉的方程呢？

（2） 仿效观察上一个方程的思路，我们能概括方程 $2(2\sqrt{6}+5)^{x}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{x}-1=0$ 有哪些特

征呢？请思考.

略解：

（1）设 $2^x=y$，代入原方程，得

$$y^2-12y+32=0.$$

解此方程，得

$y_1=4$，$y_2=8$，从而可得

$$x_1=2,\qquad x_2=3.$$

（2）设 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x=y$，则

$$y^2=[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x]^2=[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2]^x$$
$$=(2\sqrt{6}+5)^x.$$

将 y 代入原方程，得

$2y^2-y-1=0$. 解方程，得

$y_1=1$，$y_2=-\dfrac{1}{2}$（舍去）.

当 $y=1$ 时，

$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x=1$，即

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^0,$$

$\therefore\ x=0.$

小结：（1）从以上两个例题的解法中可以看到，新问题是在归结为旧问题时求到未知数的，这种指导思想在学习一元二次方程、分式方程、无理方程时曾有所体现，当时采用的方法是因式分解、去分母、去根号等步骤，而现在使用了换元法的技巧；

（2）例中的方程叫指数方程，今后课内还要系统地学习。面对一个崭新的问题，大家应注意培养个人的观察能力，自觉地从“摹仿型学习”向“探索型学习”发展。

练 习 题

4. 解方程 $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$.

5 解方程组

(1) $\begin{cases} xy-\sqrt{xy+1}=11, \\ 2^x-\dfrac{1}{4}\cdot 2^y=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} lg^2x+lg^2y=10, \\ lg\dfrac{x}{y}=2. \end{cases}$

((1)为天津市数学竞赛试题)

提示：由 $2^x-\dfrac{1}{4}\cdot 2^y=0$ 可得 $x=y-2$.

2. 解剖式观察

对于一个外形比较复杂的方程，为了找出方程的特征，不妨把方程分成较小的几部分，分析这几部分之间的数量关系．常见的数量关系有平方关系、倒数关系、代数和为定值关系等等．这些数量关系对辅助未知数的引入常常起到启发的作用．

例 4 解方程 $(x^2+7x+5)^2-3x^2-21x=19$.

分析：原方程可变形为

$$(x^2+7x+5)^2-3(x^2+7x+5)+15=19.$$

这样，含未知数的项仅有两部分，它们之间存在着平方关系．如果令 $y=x^2+7x+5$，原方程可变为

$$y^2-3y-4=0，此方程可解.$$

解法略。

解剖式观察之所以强调观察组成部分之间的数量关系，

是因为引入辅助未知数有一个先决条件：原方程含未知数的各部分，都应该能用参量（或含参量的代数式）来表示。这样，经过代换才能使方程未知数的个数保持不变，达到以“简单”代“复杂”的解题目的.

如果原方程为

$$(x^2+7x+5)^2-3x^2-20x=19,$$

用换元法就会产生困难，大家不妨探寻一下其中的原因。

例 5 解方程

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-1}=x.$$

分析： 经观察，方程中含未知数的四项存在下面的关系：

$$(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2=2(x+\sqrt{x^2-1}).$$

如果令 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=y$，则原方程可化为

$$y(y-2)=0.$$

解法略.

练 习 题

6. 观察下列方程，思考解题步骤：

（1） $(x^2-3x+4)-7(x^2-3x+4)+132=0$；

（2） $(x^2-3x+4)^2-5(x^2-3x+4)+6=0$；

（3） $(x^2-3x+11)-2\sqrt{x^2-3x+11}-3=0$；

（4） $2x^2-6x+\dfrac{6}{x^2-3x+4}+1=0$。

7. 解方程 $\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3$,

其中 a、b、$c\neq0$，$ab+bc+ca\neq0$.

8. 解方程 $\sqrt[n]{\frac{4-x}{x}}+\sqrt[n]{\frac{x}{4-x}}=2$（山西省数学竞赛试题）.

3. 寻求式观察

有一些换元技巧，条件要求很高，只对某些特殊的方程适用．因此，在审题时就有了明确的针对目标．在学习中，随着解题方法的不断丰富，这类技巧也会增多．因此，大家在学习时要彻底弄清每个技巧产生的背景、使用条件、解题步骤，这样才能尽快运用自如．

例如，在数、式运算时，我们发现

$$(a-1)^2+(a+1)^2=2(a^2+1) \qquad (1)$$

计算的结果消去了 a 的一次项．如果把这种计算中的“巧合现象”用到换元法中，我们就可以解决某类一元四次方程．

例 6 解方程 $(2x+7)^4+(2x+3)^4=82$.

解：令 $2x+5=y$，原方程变为

$$(y+2)^4+(y-2)^4=82.$$

$$2(y^4+24y^2+16)=82,$$

$$y^4+24y^2-25=0,$$

$$(y^2+25)(y^2-1)=0,$$

$$\therefore\quad y=\pm1.$$

$$\because\quad x=\frac{y-5}{2},$$

$\therefore\ x_1=-2,\qquad x_2=-3.$

如果将原方程直接展开，会得到一个标准的一元四次方程，目前无法求解。正因为考虑到$(a-1)^4$与$(a+1)^4$的和缺少a的奇次项，所以解题中设$2x+7$与$2x+3$的平均值$2x+5$为y，这样就巧妙的应用了类似于（1）式的特点及本题中$2x+7$与$2x+3$间的数量关系。

练　习　题

9．解方程　$(x^2-x+3)^2+(x^2-x+7)^2=106.$

10．解方程　$(2\sqrt[5]{x+1}-1)^4+(2\sqrt[5]{x+1}-3)^4=16.$

三．代换方法汇集

下面介绍初中学习阶段几种常见的换元法．希望大家在学习的过程中，首先应该注重换元法的基本思想，至于具体方法要掌握多少，可以根据个人的精力和兴趣有所选择。

1．应用问题中的换元法

例 7　配制一种农药，其中生石灰、硫磺粉和水的重量的比是 1:2:4，要配制这种农药 2550 公斤，各种原料分别需要多少公斤？

（初一第一册代数课本 P148，18）

解：略。

解这类问题时，并不是直接设生石灰或硫磺或水的重量为x，而是间接地设一份量为x．这一份量不是题目所求

的，但用它便于同时表示生石灰，硫磺和水的重量．这种解法实际上是一种参数解法，看来，在学习换元法之前，解应用问题时大家已经用过参数方法了，而换元法本质上就是一种参数法．

2．平均数代换

解某些方程时，需要将方程中的几个多项式展开，这不仅使运算变得繁杂，当出现高次方程时，又是我们力所不及的．因此，作为例 6 的一种推广，人们常把有关的几个多项式的平均数选作辅助未知数，如

例 8 解方程

$$x(x+2)(x+4)(x+6)=x^2+(x+2)^2+(x+4)^2+(x+6)^2.$$

解：令 $y=x+3$，则原方程可换元为

$$(y-3)(y-1)(y+1)(y+3)=(y-3)^2+(y-1)^2+(y+1)^2+(y+3)^2.$$

展开化简，得

$$y^4-14y^2-11=0,$$

解得

$$y^2=7+2\sqrt{15}，\quad y^2=7-2\sqrt{15}<0\text{（舍去）}.$$

$$\therefore\quad (x+3)^2=7+2\sqrt{15},$$

$$x=-3\pm\sqrt{7+2\sqrt{15}},$$

即
$$x_1=-3+\sqrt{7+2\sqrt{15}};$$
$$x_2=-3-\sqrt{7-2\sqrt{15}}.$$

在审此题时，我们还应该注意到，x、$x+2$、$x+4$、