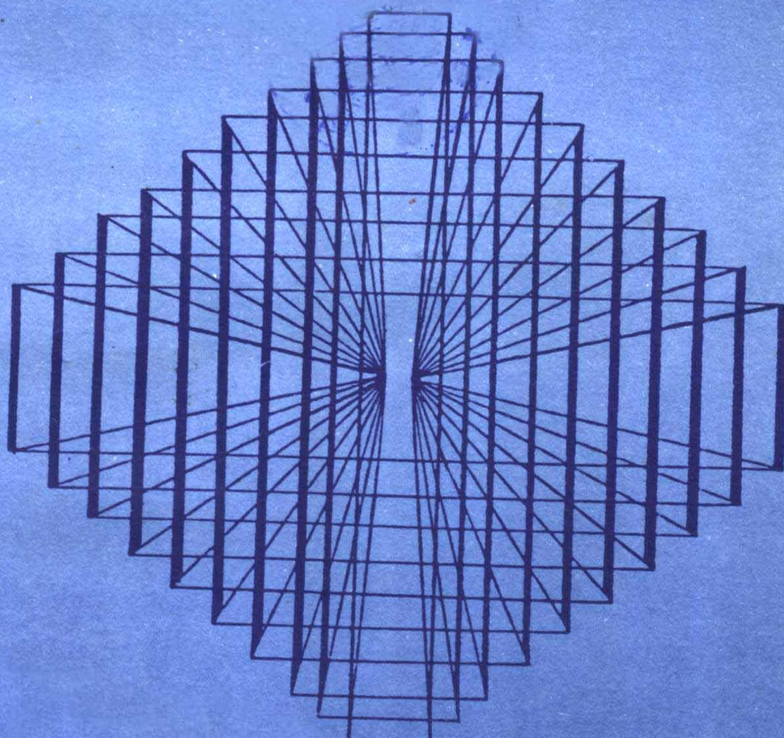
一般拓扑学专题选讲

四川教育出版社

现代数学研究丛书

一般拓扑学专题选讲



四川教育出版社

责任编辑:何伍鸣

封面设计:何一兵

现代数学研究丛书

一般拓扑学专题选讲　　蒋继光　著

四川教育出版社出版发行　　(成都盐道街三号)

四川省新华书店经销　　四川省地矿局测绘队印刷厂

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 8.125 插页 4 字数 170 千

1991 年 3 月第一版　　1991 年 3 月第一次印刷

印数:1—720 册

ISBN7-5408-1284-2/G・1245　(精)定价:4.70 元

□□序言

本书主要介绍仿紧空间的基本理论和某些近代成果，同时介绍基本的广义仿紧空间和正规空间的一些新结果。我们希望本书有助于对这些感兴趣的读者掌握有关的理论与技巧，并能尽快地进入研究的前沿．其次，考虑到仿紧空间理论不仅是从事一般拓扑学的教学与科研人员所关心，同时也是从事微分几何、流形理论和分析学等方面的教学与科研人员所关心的，我们对这部分内容介绍得比较系统与详细。

无论从理论或应用的角度而言，仿紧空间都是一般拓扑学的一个基本而重要的组成部分。众所周知，度量空间与紧空间是两类应用很广的基本空间，仿紧空间则是它们二者公共的最成功的推广。它自身同样在几何、拓扑、流形和泛函等数学分支中有重要的应用。仿紧空间理论在其自身发展的同时，深刻地影响并有力地推动着一般拓扑学的发展。例如 1948 年 A. H. Stone 发现度量空间的仿紧性后，促成了度量化问题的满意解决．仿紧空间可数乘性的研究从一个主要方面推动了广义度量空间理论的发展。为了研究仿紧空间的有限乘性，近年还应用了拓扑博奕的概念。从 1924 年 P. Alexandroff 引入局部有限族的概念到 1944 年 J. Dieudonné 引入仿紧空间类，标志着拓扑学家从认识上和技巧上，从整体有限到局部有限的重大发展。打开了可以大显身手的广阔领域。尽管仿紧

空间已有半个世纪的研究历史，但现今仍处于向纵深发展的阶段。60—80年代在不附加分离公理的条件下，获得了仿紧空间的一系列新刻画，表明研究工作更加细致、深刻。

广义仿紧空间又称为覆盖性质理论。其中亚紧空间与次仿紧空间是仿紧空间的两类最自然的推广。近年来的研究发现，较这两类空间更广泛的次亚紧空间以及我国学者刘应明于1977年提出的拟仿紧空间类，不仅本身有一些良好的性质，还可以用它们来统一刻画仿紧空间和其它基本广义仿紧空间。

仅从Tietze扩张定理和Urysohn引理就足以表明正规空间类的基本意义。一个既困难又有趣的课题是乘积空间的正规性，这方面已有丰富的成果。在T. C. Przymusinski[1984]中已有较全面的介绍。本书则着重介绍该文认为是“特别有趣和强有力的定理”，由于超出该文范围而未予证明，这就是M. E. Rudin[1975]的主要结果。

全书分四章：第一章提供以序数和基数为主的集论基础，其内容是本书后几章需用的，同时也为了给研究生们一个近代表述的集论知识。了解序数与基数的一般读者可以不读本章而直接阅读第二章。第二章包含正则空间范围内仿紧空间的基本刻画，仿紧空间的基本性质，κ-仿紧空间和仿紧空间的一个重要子类，即强仿紧空间。第三章介绍正规与集体正规空间。它们既是进一步研究仿紧空间及其推广所必需的，而且自身也是一般拓扑学里应用很广的基本空间类。第四章包含仿紧空间的主要的四种推广，并在此基础上进一步介绍仿紧空间的刻画。本章最后一节汇集了若干主要的未解决的问题，供有兴趣的读者探讨。

二、三、四章末皆附有习题。基中少数是基本练习，多数可以看作书中内容的延伸。

凡了解一般拓扑学基础知识的读者，如读过江泽涵[1978]中的第一篇或蒲保明等[1985]的著作（书名见本书末的参考文献），就可以顺利地阅读本书。

本书是在同行友好的鼓励和敦促下动笔撰写的。四川教育出版社，特别是理科编辑室对本书的编辑出版给予了大力支持。胡师度教授细致的校对工作，令本书增色不少。研究生江辉有、周杰阅读并抄写了本书初稿。作者谨此一并表示衷心感谢。由于水平所限，书中难免有不妥之处，还望读者多加指正。

蒋　继　光

(Jiang　Jiguang)

1989 年 8 月于四川大学

●●目　　录

第一章 集论预备

本章提供本书需用的集论知识,并统一术语与符号.由于一般拓扑学中普遍地使用现代集论的基本概念与结果,我们在这里给出以序数和基数为主的集论基础的严格表述.为此,形式语言的使用是不可避免的,适当地使用也是有益的.不过为了大多数读者的方便,我们尽量少用逻辑符号.同时也为了本章在文体上与后几章大体一致.

§1.1 集论的公理系统与基本概念

通常所说的**集论**是指康托集论经过公理化方法和形式语言加工形成的一门严谨的基础数学理论,即以 Zermelo-Fraenkel 公理系统附加选择公理所构成的现代集论,简记为 ZFC. 集论的早期发展是与 19 世纪数学家们为了给微积分学奠定一个严格的理论基础的工作紧密联系的. 特别在捷克数学家 B. Bolzano(1781—1848)的著作中多次出现过任意集的概念. 然而集论的真正创立者是德国数学家 G. Cantor(1845—1918). 他在 1874—1897 年之间发表了一系列集论论文,建立了包括良序集、基数和序数在内的抽象集的一

般理论. 康托集论是数学发展史上一项伟大的创造. 在1900年前后,集论中出现了若干矛盾,即悖论. 这些悖论给诞生不久的集论带来了困难,特别对那些致力于把整个数学建立在集论基础之上的数学家们,更是严重的打击. 经过深入研究,人们发现,之所以产生悖论,首先是集的概念太一般. 把无论多么大的总体都当作集必将导致矛盾. 其次,含糊的语言所表达的不确切的概念,也易为悖论所利用. 因此,必须用公理的方法来限定哪些总体才可以是集,也要保证有的总体一定是集. 还要建立一套简明、实用的逻辑语言来确切地表达这些公理. 1908年,德国数学家 E. Zermelo(1871—1953)发表了第一个集论公理系统. 从它可以推导出康托集论的几乎所有的主要结果,并能排除已知的悖论. 1922年,A. Fraenkel 补充了替换公理模式. 这样就形成了 Zermelo-Fraenkel 公理系统. 由此建立的集论简记为 ZF. 但在应用上还需要再添加一个选择公理,这样的集论记为 ZFC. 这就是现今在各个数学分支中普遍使用的集论.

下面我们来介绍 ZFC 的公理系统. 为此,先介绍集论语言. 集论语言首先包括下列基本符号:

$$=,\ \in,\ \wedge,\ \neg,\ \exists,\ (,\ ),\ x,\ y,\ z,\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots$$

其中$=$叫**相等谓词**,$x=y$ 表示 x 与 y 是同一事物. $\in$ 叫**从属关系**,$x\in y$ 读作 x **属于** y 或称 x 是 y 的一个**元**. $\wedge$ 叫**合取联结词**,表示"且". $\neg$ 叫**否定词**,表示"非". $\exists$ 叫**存在量词**,表示"存在",$\exists x$ 读作"存在 x". (,)分别叫左、右括号. x,y,x_0,x_1 等叫**变元**. 变元皆表示集且不再表其他事物. 集是未予定义的原始概念.

由基本符号组成的有限序列叫**表达式**,如) $\wedge y\exists$ 就是一个表达式. 用下面两条规则构成的表达式叫**公式**.

(1) 对每个变元 x,y,

$$x \in y \text{ 与 } x = y$$

是公式，叫**原子公式**.

(2)　若 Φ 与 Ψ 是公式，则 $\Phi \wedge \Psi$，$\neg\Phi$，对每个变元 x，$\exists x\Phi$ 皆是公式.

$\Phi \wedge \Psi$ 表且 Φ 且 Ψ，$\neg\Phi$ 表示非 Φ，$\exists x\Phi$ 表示存在 x，Φ. 这时，我们说"$\exists x$"中的量词$\exists$ **作用于** Φ **的某个变元** y，如果 $y=x$. 集论语言由它的所有公式所组成.

为了缩短公式的表达式，通常还添加下列缩写符号和约定.

(1)　用$\forall x\Phi$ 代替$\neg(\exists\ x(\neg\Phi))$. 读作**对每个** x，Φ. $\forall$ 叫**全称量词**.

(2)　用 $\Phi \vee \Psi$ 代替$\neg((\neg\varphi)\wedge(\neg\Psi))$. 读作 Φ **或** Ψ. $\vee$ 叫**析取联结词**.

(3)　用 $\Phi \to \Psi$ 代替$(\neg\Phi)\vee\Psi$，读作**若** Φ **则** Ψ，或 Φ **导致** Ψ.

(4)　用 $\Phi \leftrightarrow \Psi$ 代替$(\Phi\to\Psi)\wedge(\Psi\to\Phi)$，读作 Φ **当且仅当** Ψ.

(5)　用 $x \notin y$ 代替$\neg(x\in y)$，读作 x **不属于** y. 用 $x\neq y$ 代替$\neg(x=y)$，读作 x **不等于** y.

(6)　用$(\exists x\in y)\Phi$ 代替$\exists x((x\in y)\wedge\Phi)$. 用$(\forall x\in y)\Phi$ 代$\forall x((x\in y)\to\Phi)$.

(7)　在不致混淆时，省略括号. 如 $(x\in y)\wedge\Phi$ 可简写为 $x\in y\wedge\Phi$. $\exists x(\forall y(y\in x))$可简写为$\exists x\forall y\in x$.

公式 Φ 的一部分连贯的符号，如果它自己也构成一个公式，则称为 Φ 的一个**子公式**. 例如公式

$$\forall x(x \notin y) \wedge \exists\ y(z \in y)$$

有 6 个子公式. 它们是 $x\in y$，$\neg(x\in y)$，$\forall x(x\notin y)$，$z\in y$，$\exists y(z\in y)$及原公式自己. 公式中的量词$\exists x$(或$\forall x$)的**辖区**是以$\exists x(\forall x)$为首的子公式. 公式中的一个变元称为**约束出现的**或**约束变元**，如果它属于公式

中某个量词的辖区内且这个量词作用于它. 不是约束出现的变元称为**自由出现的**或**自由变元**. 例如在公式

$$\forall x(x \notin y) \wedge \exists y(z \in y)$$

中,量词$\forall x$ 的辖区是$\forall x(x \notin y)$. 公式 $x \notin y$ 中的变元 x 属于这个辖区且$\forall$ 作用于它,故 x 是约束变元. y 虽在$\forall x$ 的辖区内,但$\forall$ 没有作用于它,y 在原公式中是自由出现的. 但在子公式$\exists y(z \in y)$中的 y 显然是约束出现的,而 z 是自由变元. 改变公式中约束变元的符号并不改变公式的含意. 如$\exists y(z \in y)$也可写成$\exists u(z \in u)$. 一个公式表示它的自由变元的一种性质,没有自由变元的公式叫**语句**,它表达一个非真即假的事物.

当我们用 $\Phi(x_0,x_1,\cdots,x_n)$表示公式时,是指公式 Φ 中自由出现的变元皆在两两不同的变元 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 之中. 最后我们再介绍一个缩写符号.

(8)　用$\exists! x\Phi$ 代替公式

$$\exists y \forall x(x = y \leftrightarrow \Phi),$$

此处 y 是一个不在 Φ 中自由出现的变元. $\exists! x\Phi$ 读作**存在唯一的** x, Φ.

集论 ZFC 的第一条公理是

1.1.1　存在性公理

$$\exists x(x = x).$$

这条公理表示,存在一个集.

1.1.2　外延性公理

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

这条公理表示,由相同的元构成的二集相等.

记号 $x \subset y$ 表示$\forall z(z \in x \to z \in y)$,称 x **包含于** y 或 x 是 y 的**子集**. $x \subset y$ 且 $x \neq y$ 时,称 x 是 y 的**真子集**. 由外延性公理可知,若 $x \subset y$ 且 y

$\subset x$，则 $x=y$.

1.1.3　概括公理模式

$$\forall a_1\cdots\forall a_n\forall x\exists y\forall z(z\in y\leftrightarrow z\in x\wedge\Phi(z,a_1,\cdots,a_n)).$$

其中 Φ 是一个公式且 x,y 是与 $z,a_1,\cdots,a_n$ 皆不同的两个不同变元.

据外延性公理，上面公理中断言存在的集 y 是唯一的，今后记为

$$\{z\in x:\Phi(z,a_1,\cdots,a_n)\}.$$

对于不同的公式 Φ，上面的公式给出不同的公理，所以称之为公理模式.

由公理 1.1.1 及 1.1.3 知，$\{z\in x:z\neq z\}$ 是一个集. 显然每个集都不是它的元，且由 1.1.2 知，这种不含任何元的集是唯一的，称之为**空集**，记为 $\varnothing$.

1.1.4　定理　以一切集为元的集不存在.

证　若存在一个集 y 以一切集为其元. 由公理 1.1.3 知，$x=\{z\in y:z\notin z\}$ 是一个集，从而 $x\in y$. 于是 $x\in x\leftrightarrow x\notin x$，矛盾. 证毕.

1.1.5　成对公理

$$\forall x\forall y\exists z\forall u(u\in z\leftrightarrow u=x\vee u=y).$$

这条公理表示，对任意的集 x 与 y 存在唯一的（通过外延性公理）集 z，使得它的元恰为 x 和 y. 我们记 $z=\{x,y\}$，叫一个**无序对**. 形如 $\{x,x\}$ 的集简记为 $\{x\}$，叫**单元集**. 集

$$\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}$$

叫**序对**.

1.1.6　并公理

$$\forall x\exists y\forall z(z\in y\leftrightarrow\exists u\in x(z\in u)).$$

这条公理表示，对每个集 x，存在唯一的集 y 使得 y 的元恰好是 x

的元的元. 这个集 y 叫 x **的并**. 记为 $\bigcup x$. 对每个集 x,令

$$\bigcap x = \{z : \forall u \in x(z \in u)\},$$

称为 x 的**交**. 上式右端表示一个类(见下一段). 当 $x \neq \varnothing$ 时,任取 $w \in x$,则

$$\bigcap x = \{z \in w : \forall u \in x(z \in u)\}.$$

据概括公理模式,$\bigcap x$ 是一个集. 当 $x = \varnothing$ 时,$\bigcap x$ 没有定义. 事实上 $\bigcap \varnothing$ 是由一切集构成的总体,据 1.1.4,它不是一个集,我们称它为集的**宇宙**或**万有类**,记为 V.

我们记 $y \bigcup z = \bigcup \{y, z\}$,$y \bigcap z = \bigcap \{y, z\}$. 定义

$$y \setminus z = \{x \in y : x \notin z\},$$

叫 y 与 z 的**差**.

上面我们提到了集的万有类 $\boldsymbol{V}$,即由一切的集构成的总体. 还有许多与 $\boldsymbol{V}$ 相似的大得来不能是集的总体,我们称之为**真类**. 确切地说,给定一个集论语言的公式 Φ 及变元 $a_1, \cdots, a_n$. 则记号

$$\boldsymbol{A} = \{x : \Phi(x, a_1, \cdots, a_n)\}$$

表示一个类,即 $x \in \boldsymbol{A} \leftrightarrow \Phi(x, a_1, \cdots, a_n)$. 其中 $a_1, \cdots, a_n$ 叫**参变量**. 显见类只是公式的另一种表现形式,并不是我们集论的新的研究对象. 我们研究的对象只有一种,就是集. 类只是一个辅助性概念. 使用类往往比直接使用公式方便,例如类可以像集那样进行并和交的运算. 每个集 y 是一个类,因为 $y = \{x : x \in y\}$. 不是集的类叫**真类**. 除了我们已知的万有类 $\boldsymbol{V}$ 是真类外,我们还将介绍其他的真类. 今后我们用黑体英文字母 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ 等来表示类.

1.1.7　幂集公理

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall u (u \in z \rightarrow u \in x)).$$

这条公理表示,对每个集 x,存在唯一的 y 使得 y 的元恰为 x 的子集. 这个集 y 记为 $P(x)$,叫 x 的**幂集**.

1.1.8　替换公理模式

$$\forall a_1\cdots\forall a_n(\forall x\exists !y\Phi(y,x,a_1,\cdots,a_n)\rightarrow$$
$$\forall u\exists v\forall y(y\in v\leftrightarrow\exists x\in u\wedge\Phi(y,x,a_1,\cdots,a_n))).$$

其中 Φ 是一个公式且 u,v 是与 $x,y,a_1,\cdots,a_n$ 皆不同的两个不同变元.

这条公理模式表示,若 $\forall x\exists! y\Phi(y,x,a_1,\cdots,a_n)$,则对每个 u,

$$v=\{y:\exists x\in u\Phi(y,x,a_1,\cdots,a_n)\}$$

是一个集.

1.1.9　基础公理

$$\forall x(x\neq\varnothing\rightarrow\exists y\in x(y\cap x=\varnothing)).$$

由此公理可以推出 $x\in y$ 与 $y\in x$ 不能同时成立. 特别地 $x\notin x$.

为了今后讨论方便,我们现在作一项技术性的约定:集论语言的变元,除了用 $x,y,z,x_0,x_1,\cdots$ 等字母表示外,今后我们可以用大小写英文或希腊文字母来表示. 例如 $A,B,X,U,a,b,e,\Gamma,\Delta,\alpha,\beta,\xi$,等都可作为变元的符号,也就是都可以表示集. 而类,仍用黑体大写字母 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{X}$ 等表示.

任给 A,B,它们的**笛卡儿积**定义为

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle:x\in A\wedge y\in B\}.$$

为了验明它是集,首先对每个固定的 $y\in B$,有 $\forall x\in A\exists!\ z(z=\langle x,y\rangle)$. 由替换公理模式知

$$P(y,A)=\{z:\exists x\in A(z=\langle x,y\rangle)\}$$

是一个集. 其次有 $\forall y\in B\exists! u(u=P(y,A))$. 再用替换公理可知,

$$\{u:\exists y\in B(u=P(y,A))\}=\{P(y,A):y\in B\}$$

是一个集. 最后,由并公理知

$$A\times B=\bigcup\{P(y,A):y\in B\}$$

是一个集.

以序对为元的集叫**关系**. 设 R 是一个关系，则 $\langle x,y\rangle\in R$ 简记为 xRy. 集

$$\mathrm{dom}(R)=\{x:\exists\ y(xRy)\}$$

叫关系 R 的**定义域**. 它是集，因为若 $\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}\in R$，则 $x\in\bigcup\bigcup R$，从而

$$\mathrm{dom}(R)=\{x\in\bigcup\bigcup R:\exists\ y(xRy)\}.$$

由概括公理模式知，上式右端是一个集. 同理，

$$\mathrm{ran}(R)=\{y:\exists\ x(xRy)\}$$

是一个集，叫关系 R 的**值域**. 关系

$$\mathrm{id}_A=\{\langle x,x\rangle:x\in A\}$$

叫集 A 上的**恒同**. 设 R 是关系，则集

$$R[A]=\{y:\exists\ x\in A(xRy)\}$$

称为 A 在 R 下的**像**. $R[\{x\}]$ 简写为 $R[x]$. 集

$$R^{-1}=\{\langle x,y\rangle:yRx\}$$

叫关系 R 的**逆**. 设 S 是另一关系使得 $\mathrm{ran}(S)=\mathrm{dom}(R)$，则集

$$R\circ S=\{\langle x,y\rangle:\exists u(xSu\wedge uRy)\}$$

称为 R 与 S 的**复合**. R 称为 **A 上的关系**，如果 $R\subset A\times A$.

一个关系 f 称为**函数**，如果

$$\forall x\in\mathrm{dom}(f)\exists!y(xfy).$$

这个唯一的 y 记为 $f(x)$，称为 f 在 x 的**值**. 称函数 f 是 **1-1 的**，如果 $\forall x\forall x'\forall y(xfy\wedge x'fy\rightarrow x=x')$. 记号 $f:A\rightarrow B$ 表示 f 是一个函数使得 $\mathrm{dom}(f)=A$ 且 $\mathrm{ran}(f)\subset B$. 当 $\mathrm{ran}(f)=B$ 时，称 f 为**满函数**或**到 B 上的函数**. 当 $f:A\rightarrow B$ 是 1-1 满函数时，逆关系 $f^{-1}:B\rightarrow A$ 也是 1-1 满函数使得

$$f^{-1}(y)=x\leftrightarrow f(x)=y.$$

这个函数 f^{-1} 称为 f 的**反函数**.

设 $f: A\to B$. 首先,当把 f 看作是到 $\mathrm{ran}(f)$ 上的满函数时,就改记为 $\hat{f}$,即 $\hat{f}: A\to \mathrm{ran}(f)$,使得 $\forall\ x\in A(\hat{f}(x)=f(x))$. 其次,设 $C\subset A\subset X$. 则 $f|C=f\cap(C\times B)$是 C 到 B 的函数,称为 f 在 C 上的**限制**,若函数 $g:X\to B$ 使得 $g|A=f$,则称 g 是 f 到 X 上的一个**扩张**.

记号${}^AB$ 表示从 A 到 B 内的一切函数构成的集,即${}^AB=\{f: f: A\to B\}$. $\forall\ f: A\to B, f\subset A\times B$. 则${}^AB=\{f\in P(A\times B): f: A\to B\}$,由概括公理模式知它是一个集. 显然${}^{\varnothing}A=\{\varnothing\}$. 特别地${}^{\varnothing}\varnothing=\{\varnothing\}$. 若 $A\neq\varnothing$,则${}^A\varnothing=\varnothing$.

若 F 是集 S 上的函数,即 $\mathrm{dom}(F)=S$. 我们有时将 F 另记为 $\{F_s: s\in S\}$,称为一个**族**或**集族**,其中 $F_s=F(s), s\in S$. S 则称为这个族的**指标集**. 设对每个 $s\in S, f_s: A_s\to B$ 是函数. 称函数族$\{f_s: s\in S\}$是**相合的**,如果对任意的 $s,t\in S$,

$$f_s|(A_s\cap A_t)=f_t|(A_s\cap A_t),$$

即 f_s 与 f_t 在交集 $A_s\cap A_t$ 的每个元处有相同的值. 这时,易知$\bigcup_{s\in S}f_s: \bigcup_{s\in S}A_s\to B$ 是函数,称为函数族$\{f_s: s\in S\}$的**组合**,记为$\bigtriangledown_{s\in S}f_s$.

任意族$\{A_s: s\in S\}$的**笛卡儿积**定义如下:

$$\prod_{s\in S}A_s=\{x: x: S\to\bigcup_{s\in S}A_s\wedge\forall s\in S(x_s=x(s)\in A_s)\}.$$

笛卡儿积也简称**积**,每个 A_s 叫积的第 s 个**因子**,$\prod_{s\in S}A_s$ 的元 x,也记为$\langle x_s\rangle_{s\in S}$. 若$\forall s\in S, A_s=A$,则 $\prod_{s\in S}A_s={}^SA=\{x: x: S\to A\}$.

对任意的积 $\prod_{s\in S}A_s$ 及 $T\subset S$,则**投射**

$$P_T: \prod_{s\in S}A_s\to\prod_{s\in T}A_s$$

定义如下:

$$\forall x=\langle x_s\rangle_{s\in S}\in\prod_{s\in S}A_s, P_T(x)=x|T=\langle x_s\rangle_{s\in T}.$$

当每个 $A_s\neq\varnothing$时,P_T 是满函数. 当 $T=\{s\}$是单元集时,$P_{\{s\}}$简记为 P_s,即