高级中学

代数第一册（甲种本）

教学参考书

人民教育出版社

高级中学代数试用第一册（甲种本）

教 学 参 考 书

江苏教育学院

人民教育出版社出版
北 京 出 版 社 重 印
北京市新华书店发行
香河县第二印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.25 字数 128,000
1983 年 10 月第 1 版 1991 年 6 月第 8 次印刷
印数 80,251—83,150

ISBN 7-107-00315-1

G・518(课) 定价：1.05 元

目　　录

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

I 教学要求

1．使学生理解集合的概念，并能正确地运用集合的两种表示方法；了解元素对集合的属于关系；熟悉常用数集的记号 N, Z, Q, R 的意义。

2．使学生理解子集、交集、并集、补集的概念，并能识别和使用有关的术语和符号；了解包含与相等关系的意义，空集与全集的意义；能写出一些简单的方程和不等式的解集.

3．使学生了解映射、一一映射与逆映射的概念，并了解它们相互之间的区别与联系.

4．在引入集合与映射的概念的基础上，使学生加深对函数的概念的理解．切实理解函数是由定义域、值域以及定义域到值域上的对应法则三部分组成的一类特殊的映射，而它的核心是对应法则．通过一一映射与逆映射的概念理解反函数的意义，以及互为反函数的函数图象之间的关系.

5．使学生理解函数的单调性的概念，并能判断一些简单函数在给定区间上的单调性；理解函数的奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的奇偶性，能利用函数的奇偶性帮助描绘函数的图象.

6．使学生掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念，它们

的图象和性质，并会解简单的指数方程和对数方程.

7. 在解题和证题中，通过运用函数的性质，培养学生的运算能力与逻辑思维能力；通过揭示互为反函数的两个函数之间的内在联系，特别是对数函数与指数函数之间的内在联系，对学生进行辩证唯物主义的思想教育.

II 教材分析和教学建议

集合概念及其基本理论，是近代数学最基本的内容之一. 许多重要的数学分支，如数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析、概率统计、拓扑学等，都建立在集合理论的基础上. 此外，集合思想还广泛地渗透到自然科学的许多领域，集合术语在科技文章和科普读物中比比皆是. 在高一让学生掌握集合的初步知识，可以使学生对初等数学中的一些基本概念理解得更深刻，表达得更明确，同时也可为参阅一般科技读物和以后学习近代数学准备必要的条件.

函数是中学数学中最重要的基本概念之一. 在中学数学教材中，函数的教学大致可分为两个阶段. 第一阶段是在初三《代数》课本内初步探讨了函数概念以及函数关系的表示法，并讨论了正比例函数、一次函数、反比例函数、二次函数等最简单的函数. 通过函数值的计算、列对应值表以及描画函数的图象，使学生积累了关于函数的比较丰富的感性知识，并初步学会用运动变化的观点来考察变量之间的相互依赖关系和自变量、因变量之间的对应关系. 从本章开始的四章教材(包括高二《代数》课本的第一章)，是函数教学的第二阶段，可以说是对于函数概念的再认识阶段. 即运用集合、对应的思

想概括出函数的一般定义，加深对函数概念的理解．并研究了幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数等基本初等函数，从而使学生获得比较系统的函数知识，为今后的学习打下良好的基础．

本章教材共分四大节．第一大节是在学生学过初中数学，因而对各个基本数集（自然数集、整数集、有理数集、实数集）与点集（几何图形）已有相当多的感性知识的基础上，正式介绍了集合与元素的概念，并介绍了集合的表示方法．接着讲子集的概念，讨论了两个集合之间的包含与相等的关系，然后逐一介绍了交集、并集、补集等基本概念与符号，以及它们的一些简单性质．第二大节是用集合、对应观点，从实例引入映射的概念，再用映射的概念来刻划函数的概念．第三大节讲幂函数的概念、图象与性质，并以简单的幂函数为主要例子，分析了函数的单调性与奇偶性．然后阐述了一一映射与逆映射的概念，并用逆映射给出反函数的定义，最后分析了互为反函数的两个函数的图象间的关系．第四大节叙述了指数函数与对数函数的概念、图象和性质，并介绍了简单的指数方程和对数方程的一些解法．

本章的重点是有关集合的基本概念，映射、函数与反函数的概念，以及幂函数、指数函数和对数函数的概念、图象与性质．

本章的第一个难点是有关集合的各个基本概念的涵义以及相互之间的区别和联系．第二个难点是映射的概念，以及用映射来刻划函数的概念．第三个难点是反函数．为了分散这个难点，课本将它分成一一映射、逆映射、反函数及其图象

等四节来叙述．第四个难点是一些代数命题的证明．比如“函数的奇偶性”这一节中的例2，就是一个较难的证明题．

为了解决难点，要注意从实例出发，从感性认识提高到理性认识；要注意运用对比的方法，反复比较几个意义相近或有从属关系的概念的异同；要注意结合直观图形或函数图象，来说明较抽象的概念和性质．在证明代数命题时，要注意从已有知识出发，讲清推理的层次，启发学生探索证题的途径．

本章教学时间约需36课时．具体分配如下(仅供参考)：

1.1　集合	约2课时
1.2　子集、交集、并集、补集	约4课时
1.3　映射	约1课时
1.4　函数	约2课时
1.5　幂函数	约4课时
1.6　函数的单调性	约2课时
1.7　函数的奇偶性	约2课时
1.8　一一映射	约1课时
1.9　逆映射	约1课时
1.10　反函数	约2课时
1.11　互为反函数的函数图象间的关系	约1课时
1.12　指数函数	约3课时
1.13　对数函数	约3课时
1.14　指数方程和对数方程	约4课时
小结和复习	约4课时

一　集　合

1.1　集合

1．集合是数学中最原始的概念之一，我们不能用其他更基本的概念来给它下定义，所以也把它叫做不定义的概念或原始概念．点、直线、平面等概念也都是不定义的概念．对于这些不定义的概念，我们只能作描述性的说明．课本从学生已有的知识出发，用分别取自数、点、图形、整式以及物体的五个实例来引入集合的概念．这样既便于学生接受，也说明集合的概念如同其他数学概念一样，不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的．

2．集合理论的创始人康托尔❸称集合为一些确定的、不同的东西的总体，人们能意识到这些东西，并且能判断一个给定的东西是否属于这个总体．课本把集合描述为"一组对象的全体"，并在下文中指出集合中的元素是"确定的"，"互异的"，总的来看，这样叙述的集合的概念基本上接近于康托尔原来的提法．

3．关于集合中的元素的两个特征，可这样解释：

（1）确定性．设 A 是一个给定的集合，x 是某一具体对象，则 x 或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，两种情况必有一种且只有一种成立．

（2）互异性．一个给定集合中的元素，指属于这个集合

❸　康托尔(Georg Cantor, 1845—1918 年)，德国数学家．

的互不相同的个体(或对象). 因此, 同一集合中不应重复出现同一元素. 以后提到集合中的两个元素时, 一定是指两个不同的元素.

我们可依据上述两个特征来判断所给对象是否构成集合. 例如, "著名的科学家", "好心的人"这类对象, 一般不能构成数学意义上的集合, 因为找不到用以判别每一具体对象是否属于集合的明确标准. 又如记号$\{1, 1, 2\}$, 由于其中出现了重复的元素, 所以不能作为集合的正确表示, 应把它写成$\{1, 2\}$. 如果它所表示的是方程$(x-1)^2(x-2)=0$的解集, 其中1是二重根, 这种表示也是不妥的, 应把它写成$\{1_{(2)}, 2\}$, 其中元素1的右下角括号内的2, 表明1是方程的一个二重根, 但在解集内只算作一个元素.

4. 用列举法表示集合, 一般不必考虑元素之间的顺序. 但在表示数列之类的特殊集合时, 通常仍按惯用的次序写出它的元素. 例如集合$\{2, 4, 8, 16\}$, 如果无特殊需要, 一般很少写成$\{8, 2, 16, 4\}$或其他形式. 当一个集合有许多元素或无限多个元素时, 列出全部元素是很麻烦的, 甚至是不可能的. 这时, 如果通过列出该集合中的一部分元素, 可以提供某种规律, 使读者能由此规律正确地找出其余的元素, 那么就可用省略号代表其余的元素. 例如: 从51到100的所有整数的集合可记作$\{51, 52, 53, \cdots, 100\}$; 同样, 所有正偶数组成的无限集可记作$\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$.

用描述法表示集合的一种常用形式是$\{x|P\}$, 竖线前面的x叫做此集合的代表元素, 竖线后面的P指出元素x所具有的公共属性. $A=\{x|P\}$, 表示集合A是由所有具有性质P

的那些元素 x 组成的. 换句话说,若 x 具有性质 P, 则 $x\in A$; 若 $x\in A$, 则 x 具有性质 P.

有些集合的代表元素可能不用单个字母 x 来表示. 例如,由抛物线 $y^2=2x$ 上所有的点的坐标组成的集合, 可记作 $\{(x,y)\,|\,y^2=2x\}$. 此集合的代表元素是 (x,y), 其中 x,y 都是实数, 由于一般不致误解, 所以通常无需注明"$x,y\in R$". 而且,只要不引起误解,有时集合的代表元素也可省略不写. 例如{整数},即代表整数集 Z. 注意: 这里的大括号已包含"所有"的意思,因而不必写成{全体整数}. 在表示集合时, 要防止把集合 $\{(1,2)\}$ 写成 $\{1,2\}$ 或 $\{x=1, y=2\}$ 之类的错误,也要防止用{实数集}, $\{R\}$ 来表示实数集 R 的错误.

列举法与描述法各有优点,究竟用哪种方法,要视具体问题而定. 有些集合,随便选用哪种表示方法都可以; 有些集合,则只能用其中的一种表示方法. 例如,集合 $\{x\,|\,-1<x<2\}$ 不能用列举法来表示,而集合 $\{-3,0,2\}$ 不宜用描述法来表示.

5. 课本明确了"属于"、"不属于"这两个概念. $a\in A$ 与 $a\notin A$ 取决于 a 是不是 A 的元素. 根据集合中的元素的确定性,可知对任何 a 与 A, 在 $a\in A$ 与 $a\notin A$ 这两种情况中必有一种且只有一种成立.

6. 以数或点为元素的集合分别叫做数集或点集. 这是中学数学里的主要研究对象. 课本中列举的以 N, Z, Q, R 等符号所代表的数集,都属于最重要、最常见的数集, 对它们各自代表的意义,应要求学生熟记.

1.2　子集、交集、并集、补集

1. 子集概念涉及两个集合之间的关系，即包含关系. 为了讲清楚子集概念与包含关系，在教学中要注意以下几点：

(1) 要正确阐述子集概念的涵义，防止偏差. “A 是 B 的子集”的涵义是：A 的任何一个元素都是 B 的元素，即由任一 $x \in A$，能推出 $x \in B$. 教学中不宜把子集说成是由原来的集合中的部分元素组成的集合. 这种说法是和“空集是任何集合的子集”的规定相抵触的，因为空集不含任何元素；也和“A 是 A 的子集”相矛盾，因为 A 含有 A 的全部元素，而不是部分元素.

若 A 是 B 的子集，且 B 中至少有一元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subset B$. 空集不是空集的真子集，所以不能说“空集是任何集合的真子集”，只能说“空集是任何非空集合的真子集”.

(2) 要注意区别“包含于”、“包含”、“真包含”、“不包含”这些概念的不同涵义与不同表示法. $A \subseteq B$ 与 $A \supseteq B$ 是互逆的，$A \subseteq B$ 与 $A \nsubseteq B$ 是互否的，而 $A \subseteq B$ 与 $B \supseteq A$ 是同义的. 至于 $A \subset B$，它等价于“$A \subseteq B$ 且 $A \neq B$”；换言之，$A \subseteq B$ 包括 $A=B$，$A \subset B$ 两种情况，其中必有一种且只有一种成立. 至于 $A \subseteq B$ 与 $A \supseteq B$ 这对互逆的命题，一般不能同时成立；如果同时成立，那么 $A=B$.

(3) 要注意 $\in$ 与 $\subseteq$（或 $\subset$）这两种符号的不同涵义. $\in$ 用在元素与集合之间，表示从属关系；$\subseteq$（或 $\subset$）用在集合与集合之间，表示包含（或真包含）关系. 为了帮助识别，可考察下面的例子：

设 $A=\{0, 1\}$ 且 $B=\{x \mid x \subseteq A\}$，$A$ 与 B 是什么关系？

注意这里 A 不是 B 的子集，而是 B 的元素. 因为由 B 的表示式可知，x 代表 A 的子集，因而 A 的子集(包括 A 自身)都是 B 的元素，所以 $A\in B$. 如用列举法写出 B，则 $B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$.

(4) 关于"两个集合相等"这一概念，课本是用"$A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$"来定义"$A=B$"的. 事实上，因为 $A\subseteq B$，所以 A 的元素都是 B 的元素；又因为 $B\subseteq A$，所以 B 的元素也都是 A 的元素. 这就是说，集合 A 与集合 B 的元素完全相同，因而我们说 A 与 B 是相等的集合. 这样讲解有助于学生理解两个集合相等的定义的合理性. 由这个定义还得到一种证明方法：如要证明 $A=B$，只要证明 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 都成立就行了.

集合相等是一个重要概念，中学教材中的一些内容可用它来作出比传统教材更简明的定义. 例如，同解方程可定义为：如果两个方程的解集相等，那么这两个方程叫做同解方程. 同样，可用解集相等来定义同解不等式. 因此，方程(或不等式)同解原理的证明，实质就是证明两方程(或两不等式)的解集相等.

(5) 要学生注意，不要把数 0 或集合 $\{0\}$ 与空集 $\varnothing$ 混淆. 数 0 不是集合，$\{0\}$ 是含有一个元素 0 的集合，而 $\varnothing$ 是不含任何元素的集合. 同时要注意，不要把空集错误地写成{空集}或 $\{\varnothing\}$.

(6) 课本讲到的与子集概念有关的一些事实，可列在一起，作为包含关系的性质. 这些性质是：

(i) 对于任何集合 A，都有 $A\subseteq A$；

(ii) 对于任何集合 A，都有 $\varnothing\subseteq A$；

(iii) $A\subseteq B, B\subseteq C \Longrightarrow A\subseteq C$,

$A\subset B, B\subset C \Longrightarrow A\subset C$.

2. 关于交集概念，教学中要注意以下几点：

(1) 课本除了用文字给出定义外，还写出这一定义的数学表达式：

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,\ \text{且} x\in B\}.$$

注意其中的“且”字，它说明 $A\cap B$ 的任一元素 x 都是 A 与 B 的公共元素. 由此可知，$A\cap B$ 必是 A 与 B 的公共子集，即

$$A\cap B\subseteq A,\quad A\cap B\subseteq B.$$

(2) 由交集定义还可直接推出以下性质：

(i) $A\cap A=A$; (ii) $A\cap\varnothing=\varnothing$; (iii) $A\cap B=B\cap A$.

如果有条件，讲解中也可以给出如下的简单证明：

(i) $A\cap A=\{x\mid x\in A,\ \text{且}\ x\in A\}=\{x\mid x\in A\}=A$.

(ii) $\because$ $A\cap\varnothing\subseteq\varnothing$（引用 $A\cap B\subseteq B$），

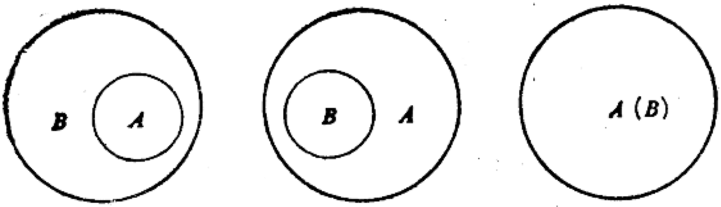
$\varnothing\subseteq A\cap\varnothing$（空集是任何集合的子集），

$\therefore$ $A\cap\varnothing=\varnothing$（集合相等的定义）.

(iii) $A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且}\ x\in B\}=\{x\mid x\in B,\ \text{且}\ x\in A\}$
$=B\cap A$.

其中(ii) 也可用反证法来证明：若 $A\cap\varnothing$ 不是空集，则至少含有一个元素 x，按交集定义，$x\in\varnothing$，这与空集定义矛盾. 所以 $A\cap\varnothing=\varnothing$.

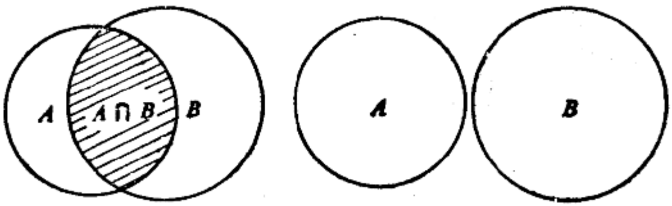
(3) 作为交集概念的一个应用，可启发学生讨论图 1-1 中每一组（两个）集合 A, B 的交集：



(i) 若 $A\subset B$，
则 $A\cap B=A$.

(ii) 若 $B\subset A$，
则 $A\cap B=B$.

(iii) 若 $A=B$，
则 $A\cap B=A=B$.



(iv) 若 A 与 B 相交
(有公共元素，但互不包含)，
则 $\varnothing\subset A\cap B\subset A$，
$\varnothing\subset A\cap B\subset B$.

(v) 若 A 与 B 分离
(无公共元素)，
则 $A\cap B=\varnothing$.

图 1-1

由此可见，无论集合 A 与 B 处于何种关系，$A\cap B$ 都有意义.

3. 关于并集概念，教学中要注意以下几点：

(1) 课本除了用文字给出定义外，还写出这一定义的数学表达式：

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A,\ 或\ x\in B\}.$$

注意其中的“或”字的意义，用它连接的并列成分之间不一定是互相排斥的. “$x\in A$，或 $x\in B$”这一条件，包括下列三种情况：

$x\in A$, 但 $x\notin B$; $x\in B$, 但 $x\notin A$; $x\in A$, 且 $x\in B$(很明显, 适合第三种情况的元素 x 构成的集合就是 $A\cap B$, 它不一定是空集). 还要注意, A 与 B 的公共元素在 $A\cup B$ 中只出现一次. 因此, $A\cup B$ 是由所有至少属于 A, B 两者之一的元素组成的集合.

由定义可知, A 与 B 都是 $A\cup B$ 的子集, 联系到 $A\cap B$ 都是 A, B 的子集, 可得下面的关系式:

$$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B,\quad A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B.$$

(2) 由并集的定义还可直接推出以下性质:

(i) $A\cup A=A$; (ii) $A\cup\varnothing=A$; (iii) $A\cup B=B\cup A$.

对这三个性质, 可仿照交集相应性质的证明予以推导.

4. 关于补集概念, 教学中要注意以下几点:

(1) 讲补集概念, 首先要让学生了解全集概念. 全集是相对于所研究的问题而言的一个相对概念, 它含有与所研究的问题有关的各个集合的全部元素, 因此, 全集因所研究的问题而异. 例如在考虑自然数的因数分解时, 我们把自然数集作为全集; 在解不等式时, 我们把实数集作为全集.

(2) 课本除了用文字给出补集的定义外, 还写出这一定义的数学表达式:

$$\overline{A}=\{x\mid x\in I, 且\ x\notin A\}.$$

所以补集定义可以这样解释, 如果从全集 I 中取出集合 A 的全部元素, 则所有剩余下来的元素组成的集合就是 $\overline{A}$. 由此我们很容易想起"差"的概念, 事实上, 补集 $\overline{A}$ 就是全集 I 与集合 A 的差集.

(3) 由补集定义可推出以下简单性质:

(i) $A\cup\overline{A}=I$; (ii) $A\cap\overline{A}=\varnothing$; (iii) $\overline{\overline{A}}=A$.

前面两个性质可这样证明：(i) 一方面，由 $A\subseteq I$, $\bar{A}\subseteq I$，可知 $A\cup\bar{A}\subseteq I$；另一方面，对于 I 中每一元素 x, $x\in A$，或 $x\in\bar{A}$（即 $x\notin A$），二者必居其一，可知 $I\subseteq A\cup\bar{A}$. 所以 $I=A\cup\bar{A}$. (ii) 对同一元素 x，不可能既有 $x\in A$，又有 $x\notin A$，所以 A 与 $\bar{A}$ 无公共元素，即 $A\cap\bar{A}=\varnothing$. 性质(iii)可这样证明：

$\bar{\bar{A}}=\{x\,|\,x\in I,\ 且\ x\notin\bar{A}\}=\{x\,|\,x\in I,\ 且\ x\in A\}=A.$

此外，还有几个明显的性质：

$$\bar{I}=\varnothing,\ \bar{\varnothing}=I,\ \ A\cap I=A,\ \ A\cup I=I.$$

阐述这些性质，可使学生加深对全集与补集概念的理解.

5. 课本是从实例引入子集、交集、并集、补集等概念的. 课本所举的实例都具有重要意义，教学中应有足够的重视.

6. 运用集合的基本概念，可把初等数学中的一些概念用集合术语来重新叙述. 例如：

(1) 在解方程时，可把给定的未知数的取值集合作为全集 I，那么方程在 I 中的解集就是 I 的一个子集. 如果一个方程在 I 中的解集是空集 $\varnothing$，就说这个方程在 I 中无解.

(2) 设方程组

$$\begin{cases}f_1(x, y)=0,\\ f_2(x, y)=0\end{cases}$$

的解集是 F，方程 $f_1(x, y)=0$ 与 $f_2(x, y)=0$ 的解集分别是 F_1 与 F_2，则 $F=F_1\cap F_2$.

一般地，如果一个方程组的解集是 F，而组成这个方程组的 n 个方程的解集分别是 $F_1, F_2, \cdots, F_n$，那么 F 就是 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 的交集（记作 $F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n$）.

(3) 设方程 $f(x)=0$ 的解集是 F，如果

$$f(x)=f_1(x)f_2(x),$$

且方程 $f_1(x)=0$ 与 $f_2(x)=0$ 的解集分别是 F_1，F_2，那么 $F=F_1\cup F_2$.

证明：设 $a\in F$，即 $f(a)=0$，由 $f(a)=f_1(a)f_2(a)$，可知$f_1(a)=0$，$f_2(a)=0$ 中至少有一式成立．因此，$a\in F_1$，或 $a\in F_2$，即 $a\in F_1\cup F_2$．从而 $F\subseteq F_1\cup F_2$.

反过来，设 $a\in F_1\cup F_2$，则 $a\in F_1$，或 $a\in F_2$，即 $f_1(a)=0$，$f_2(a)=0$ 中至少有一式成立．所以 $f(a)=f_1(a)f_2(a)=0$，即 $a\in F$．从而 $F_1\cup F_2\subseteq F$.

因此，$F=F_1\cup F_2$.

这个结论可以推广到 $f(x)$ 能够分解为 n 个因式的情况．对于不等式(组)来说，也有与(2)，(3)相应的结论成立，但要复杂一些.

（4）如果把线段、射线和直线都看成是由其上的点组成的点集，那么，线段 AB 是射线 AB 的子集，射线 AB 是直线 AB 的子集，线段 AB 是射线 AB 与射线 BA 的交集，直线 AB 是射线 AB 与射线 BA 的并集.

（5）符合某个条件的点集，叫做符合这个条件的点的轨迹．例如，平面上与一个定点的距离等于定长的点组成的点集，是一个圆，因而圆就是平面上与一个定点的距离等于定长的点的轨迹.

7．在这一大节中，课本着重介绍了集合、子集、真子集、交集、并集与补集等基本概念，以及它们的表示方法与符号．例题与习题都是为理解基本概念服务的；提到的那些简单性质，其目的也是为了更好地理解概念．至于交、并、补运算及