

岩层与地表移动 数值分析新方法

成 枢 著

中国矿业大学出版社

岩层与地表移动数值分析新方法

成 枢 著

中国矿业大学出版社

前 言

岩层与地表移动数值分析是开采沉陷研究课题的重要内容。几十年来,由于地下开采引起的覆岩及地表移动变形破坏问题,已引起了各国学者的极大关注。人们为此付出了极为艰辛的努力,深入研究了岩层与地表移动的内在机理和发展过程,提出了各种计算模型和方法。每一种模型的建立,又在工程实际应用中不断得到修改、完善,使之趋于成熟。毋庸置疑,这些理论模型解决了许多工程实际问题。但到目前为止,尚没有一个公认的既完善又通用的方法。面对错综复杂的岩体系统,面对众说纷纭、各有特色的模型和方法,如何选择适用于具体地质采矿条件的计算模型?如何对模型进行结构优化?又如何确定使用模型的各种计算参数?研究者往往无所适从,经验的成分、人为的因素占据了主导地位。这是当今岩层与地表移动数值分析研究中最关键而又迫切需要解决的重大问题。

本书就是针对上述问题而著的。它所涉及的内容广,专业知识要求较深,不仅需要具有矿山测量专业知识,还要求有系统论、控制论方面的基础知识,以及最优化技术、弹性力学及概率论与数理统计等方面的知识。

全书共分十章。第一章主要介绍了岩层与地表移动数值分析的研究现状及发展趋势,强调实地观测研究仍是相当长一段时间内的重要基础手段,提出了岩层与地表移动数值分析计算的新方法。第二章在简要叙述线弹性力学的基本方法和有限单元的基本思想后,介绍了作者开发研制的岩移二维、三维有限元模拟计算程序。第三章着重介绍了模型识别的理论和方法,提出了等效模型和等价参数的基本概念。第四章探讨了参数识别的基本理论和方法以及用正交优化设计进行参数识别问题。第五章重点介绍了岩移有限元模拟的模型识别与参数识别研究。第六章从模型误差与参数误差、测量误差、岩体结构及识别误差等方面综合探讨研究了岩移参数识别的稳定性问题。第七章介绍了岩移模型识别与参数识别中的若干问题,特别是节理的处理。第八章探讨了矿山岩体控制工程力学及其在开采沉陷研究中的应用。第九章从声波测井获取力学参数的方法入手,介绍了声波测井资料在模型与参数识别中的应用。第十章通过几个工程实例,说明岩层与地表移动的模型识别与参数识别的应用问题。

本书把岩体看作一个系统,用系统论、控制论的方法对其进行研究,利用实地观测结果——系统的输入和输出,对系统的模型和参数进行识别。这对解决实际工程中的岩层与地表移动计算问题具有重要意义。

该书是在国家自然科学基金资助项目“岩层与地表移动的模型识别与参数识别”和煤炭科学基金资助项目“岩移三维模型及其参数识别研究”的理论和方法基础上撰写的。书中的内容包含了课题组成员的成果,特别是沈光寒教授、吴戈教授、李白英教授、蒋斌松副教授、于师建高工等,他们为项目的完成付出了艰辛劳动,并对作者学术思想的形成有重要影响。另外,书中摘用了国内其他专家如刘天泉院士、孙钧院士、林育梁、沈文德同志的部分研究成果。书稿的完成还得到了温兴林老师、丛爱岩、刘春同志的大力支持和帮助。在此,特致谢意。

由于作者水平有限,书中不当之处在所难免,敬请专家、读者批评指正。

作 者

1997. 12

目 录

第一章 岩层与地表移动的数值分析研究	1
第一节 岩移数值分析研究现状及发展趋势	1
第二节 岩层与地表移动计算的改进	4
第三节 地表移动计算的统一理论	10
第四节 岩层与地表移动的数值分析新途径	14
第二章 岩移二维、三维有限元模拟	19
第一节 线性弹性力学的基本方程	19
第二节 有限单元方法的基本思想	26
第三节 有限单元法在岩移研究中的应用	30
第四节 岩移二维、三维有限元模拟计算程序的研制与开发	32
第五节 有限元模拟计算时的模型建立	34
第三章 模型识别理论与方法	36
第一节 模型识别理论	36
第二节 模型识别方法与经典力学方法的区别	38
第三节 模型识别的方法步骤	39
第四节 模型识别计算实例	42
第四章 参数识别理论与方法	44
第一节 参数识别理论	44
第二节 参数识别的方法	48
第三节 参数识别的正交优化设计方法	51
第五章 岩移有限元模拟的模型识别与参数识别	53
第一节 岩石力学研究方法的发展	53
第二节 岩石力学逆问题及其应用进展	55
第三节 岩移有限元模拟的模型识别理论与方法	57
第四节 岩移有限元模拟的参数识别研究	60
第六章 岩移参数识别的稳定性研究	64
第一节 模型误差与参数误差对预计结果的稳定性影响	64
第二节 测量误差对参数识别稳定性影响的研究	65
第三节 岩体结构对地表移动变形的影响	69
第四节 岩体力学参数误差对地表移动变形值预计的影响	71
第七章 岩移模型识别与参数识别中的若干问题	72
第一节 节理岩体的有限元分析	72
第二节 节理力学模型识别及有关参数的确定	77
第三节 函数化有限元反分析的应用	81
第八章 矿山岩体控制工程力学在开采沉陷中的应用	82
第一节 矿山岩体采动影响理论研究的新进展	82

第二节 矿山岩体采动影响控制技术的发展水平 83

第三节 研究岩体采动影响与控制的重大意义 84

第四节 矿山岩体控制工程力学的研究 86

第五节 矿山岩体控制工程力学在开采沉陷中的应用 87

第九章 声速测井在模型识别与参数识别中的应用 89

第一节 声速测井在岩移模型识别与参数识别中的作用 90

第二节 声速测试结果求取力学参数的方法研究 92

第三节 声速测井在模型与参数识别中的应用 102

第十章 岩移模型识别与参数识别的工程应用举例 105

第一节 枣庄矿区岩移参数识别的研究 105

第二节 岩移模型识别与参数识别在岩移资料整理中的应用 112

第三节 动态模型识别与参数识别在软岩条件下的应用 117

附录 1 岩移二维有限元模拟计算程序清单 122

附录 2 岩移三维有限元模拟计算程序清单 131

参考文献 143

第一章 岩层与地表移动的数值分析研究

第一节 岩移数值分析研究现状及发展趋势

地下矿产不断地被开采,造成足够大的采动空间后,就会在岩体内部直到地表产生移动、变形,甚至破坏,使得地表的建(构)筑物以及农田的使用遭受损坏性影响。同时,引起地下岩体内的应力再分布,岩体的原始平衡状态遭受破坏,形成新的平衡,并有可能导致岩体内的各种变形、断裂和裂隙的形成,产生新的复杂的岩石力学问题。对这些现象的研究,形成了开采沉陷课题,引起人们的极大关注。

作为地下工程的附效应,开采沉陷课题的研究已有较长的历史了。在各种开采沉陷现象中,地下煤炭开采所引起地表沉陷占了大多数。人们经过不懈的努力,探索研究了其内在机理和发展过程,发展了各种研究理论和计算方法,并使之成为一个新的研究课题,不断地从基础理论入手,提出各种模型、计算方法,通过各种途径,使之修改完善。到目前为止,所取得的各种经验、理论成果已相当丰富。美国学者 R. E. Gray 在《开采沉陷的过去、现在和将来》一文中,以有关地下开采引起的沉陷问题研究历史的回顾为前提,分析了开采沉陷对地表建筑物、农田使用等所产生的一些严重影响,提出了具有相当理论基础的沉陷数学计算公式及各种抑制沉陷的开采措施,总结了以往各国学者在开采沉陷领域的研究成果,特别是该课题在 1890 年至 1990 年间的发展过程,认为:研究建立在实测资料基础上的各种预计模型是至关重要的;对开采沉陷的野外数据进行广泛收集、整理,建立完善的模型、正确选取参数以及精确的预计,是开采沉陷课题研究的重要内容。

几十年来,各国学者针对开采沉陷这一研究课题,提出了各种移动变形的预计理论和研究方法。有以实测资料为基础所建立的下沉剖面的经验公式方法,其中在我国广为使用的有负指数函数法、典型曲线法、双曲函数法等,它是以图形、表格或经验公式的形式给出地下开采后引起地表移动和变形曲线的;有以不同的力学模型为基础,用力学的方法进行研究的经典力学方法,所建立的力学模型主要有李特维尼申(J. Litwinisyn, Poland)的随机介质力学模型、萨武斯托维奇(Sawstovich, Poland)的弹性理论模型、沙乐蒙(M. G. D. Salamon, South African)的四种弹性介质模型以及我国学者李增琪教授用傅里叶变换解得的类似的四种弹性介质模型等,该方法是针对一些具体的地质采矿条件,依据力学知识建立各种移动和变形的求解方程,并通过计算来获得开采引起的移动和变形的。

计算机技术的突飞猛进,岩石力学的研究不断深入,有限单元等方法的引入,使得开采沉陷的数值模拟方法日趋成熟完善,并得到广泛的应用。由于经验方法研究仅是对开采沉陷现象的外观描述,且对岩体内部移动和变形规律的描述难以胜任,决定了目前乃至将来相当长的一段时间里,仍将利用力学方法来研究解决开采沉陷的数值模拟问题。

有关岩层与地表移动的经验公式研究方法的详细论述,在许多书籍中已作了较详细的阐述,在此不再赘述。有限单元法在岩移中的应用则在本书第二章简要介绍。下面着重介绍

岩移研究中经常使用的边界单元法等其他数值分析方法。

边界单元法(Boundary Element Method)是与有限单元法类似的一种数值分析方法,它与有限单元法不同的是:边界单元法只需对研究对象的边界进行离散和分析来解决问题,把所考虑问题的维数降低一维来处理。因此,边界单元法所需的单元数比有限单元法大为减少,相应的计算时所需的输入数据和计算时间也明显减少。近几年来,随着有限单元法程序系统的越来越大,边界单元法这一优点也越来越明显。因此,边界单元法近年来的发展很快,目前国内外许多学者都在研究用边界单元法解决开采沉陷的模拟计算问题。

目前,已有很多边界单元法程序可用于开采沉陷的分析。如 S. L. Crouch 等提供的 TWOFS、TWODD、TWODI 程序及 E. Hoek 等在 *Underground Excavation in Rock* 一书中所列的由 J. W. Bray 等完成的程序,均可用来计算二维线弹性问题。目前,已有应用边界单元法进行三维非线性问题、裂隙和蠕变岩体等问题研究的报导。应用边界单元法还能分析具有断层等大的、不连续面的岩体中的位移和应力分布问题。

离散单元法(Discrete Element Method)是从 70 年代初开始兴起的一种数值计算方法,特别适用于节理岩体的应力分析,在采矿工程、隧道工程、边坡工程以及放矿力学等方面都有重要的应用。在岩土力学中,一般是将岩土视作连续介质而赋予不同的本构方程,如弹性、塑性和粘弹性等。但是,岩体往往为众多的节理或结构面所切割,特别是开挖区附近的破碎岩体面具有明显的不连续性,很难用传统的有限单元法或边界单元法来处理,只能求助于离散单元法。

离散单元法于 80 年代中期被介绍到我国,引起国内岩土力学与工程界的浓厚兴趣和注意,已经在我国的采矿、隧道和大坝等工程的设计和研究中得到了应用。

我国学者王泳嘉教授所著的《离散单元法及其在岩土力学中的应用》一书中,详细论述了离散单元法的理论基础及其在采矿工程、隧道支护、颗粒介质力学、边坡稳定、冰雪力学、渗流、断裂力学、地震以及地下核废料处理等方面的应用。

离散单元法也像有限单元法那样,将区域划分成单元,因单元受节理等不连续面的控制,在以后的运动过程中,单元结点可以分离,即一个单元与其邻近单元可以接触,也可以分开。单元之间相互作用的力可以根据力和位移的关系求出,而个别单元的运动则完全根据单元所受的不平衡力和不平衡力矩的大小按牛顿运动定律确定,它是一种显式求解的数值方法。

与其他方法相比,有限单元法和边界单元法适合于解决连续介质问题,而离散单元法适合于解决为弱面所切割的非连续介质问题。把离散单元法与有限单元法和边界单元法等有机地耦合起来,便能充分发挥各自的长处,从而能够极大地扩展在岩土力学研究中使用数值方法的范围。如将开挖体附近的破碎岩体划分为离散元,而将较远处完整度较好的岩体视为连续体,可以用边界单元法或有限单元法等来模拟,以考虑远场应力的影响。

离散单元法与有限单元法的耦合计算比较容易,只要使界面上的有限单元结点与离散单元的角点或其他点重合,并保证它们的位移和力连续,就可以通过结点和位移的相互传递作用将离散单元与有限单元耦合起来。

当所研究的区域很大时,离散单元的数目要相应地增多,计算量也会随之增大。特别是对于无限域问题,离散单元不可能对整个区域都离散,因此离散单元的应用受到了限制。实测表明,在一般情况下,远离开挖边界一定距离时,岩体可以看成是连续体,完全可以利用边

界单元法模拟岩土工程中的无限域或半无限域的影响,以弥补离散单元计算的不足。在离散单元法与边界单元法的耦合中,要分别考虑到静、动边界单元法不同的耦合原理,特别是交界面的耦合条件的处理。

离散单元法在国内外的的发展比较迅速。从 1971 年 P. A. Cundall 提出后,逐步在许多工程中得到广泛应用。二维的离散单元法程序已很成熟,三维问题的离散单元法则尚处于发展阶段,但其算法已基本成熟,使用三维离散单元法解决工程实际问题的时刻也指日可待。我国的离散单元法的研究和应用起步较晚,但发展却非常迅速。目前已在我国的采矿工程、岩土工程以及水利水电工程等科研与设计中得到应用,特别是矿山压力、岩层与地表移动方面、边坡稳定性研究方面的数值模拟,均呈方兴未艾之势。

开采沉陷的研究在经历了相当长的历史阶段后,创造了各种预计理论,建立了各种预计模型,也提出了各种计算方法,特别是随着计算机的发展而开发的大量计算软件,使得其理论和算法日趋完善。美国西弗吉尼亚大学采矿系 S. S. Peng 教授发表的《开采沉陷的预计模型—CISPM 2.0 版本》一文中,为地下煤层开采引起的地表移动和变形的计算提供了一个程序包,其内容主要包括:地下开采后的最终地表移动和变形的预计;地下长壁开采过程中的动态地表移动和变形过程的预计;沉降观测数据的处理和记录;为无沉降数据利用的矿井提供沉降参数;利用收集的沉陷数据进行沉降参数的推断等。它主要侧重于经验公式法的研究,所提供的参数均为经验公式法中所使用。J. N. Van Der Merwe 还提出了地表沉降分析的表面元法,以研究地下开采引起的倾斜、曲率对结构的损害预计问题。我国学者杨硕在国家自然科学基金资助下所著的《采动损害空间变形力学预测》一书中,总结了作者 30 年来从事矿区沉陷观测和理论研究的成果,提出不少具有独创性的见解和结论;以主测的网状观测站为窗口,阐述了任意点法及空间变形法的建立、推广和实际应用,介绍了力学预测法在开采保护中的理论和应用。其中,立体变形法将变形计算从观测线演变为沉陷曲面,发现矩形采面拐点是椭圆;首次将立体变形与观测、预测公式统一,使立体变形具有可测和实用性;推导了立体变形是内蕴量,并将其引入开采沉陷分析中。该书的主要特点是把力学预测法用于解决生产实际问题,使开采保护和开采沉陷学进入力学时代,并解决了下沉与水平移动的关系这一难题。该书提出的地表移动变形任意点公式比当初单纯的主断面法前进了一大步,在我国有较大影响;从微分几何方法出发研究整个盆地空间变形,从而发展了一套立体变形理论,并导出了相应的实用变形计算公式,较之传统的主断面差分计算公式要合理和精确,这是开采沉陷理论和实践中的一项重要贡献,将力学预测法用于“三下”开采实际,对改变传统的单纯以经验统计法为基础的地表移动与变形计算是一个新的促进,并提供了一条可供实用的新途径;在实测资料分析中取得的可贵经验对开采沉陷的观测和理论研究具有指导和借鉴意义。

国内、外有关开采沉陷的数据库分析也随着计算机的不断发展而获得了较为科学、较为实用的数据库分析系统,特别是我国一些矿务局,结合所属生产矿井几十年来观测所获得的大量岩移资料及总结出的规律,开发使用了具有特点的岩移数据分析处理系统^[15,16],成功地解决了不少现场实际问题,并使岩移研究工作更快地向着科学化、自动化迈进。

此外,中国学者王家臣在其所著的《边坡工程随机分析原理》一书中,系统地阐述了边坡工程随机分析的基本原理和最新研究成果。事实上,在许多行业的生产和建设中,经常遇到岩土开挖边坡、填筑边坡或自然边坡,如何设计、施工和评价这些边坡,是有关岩土工程技术

人员所面临的基本问题之一。传统的方法是将影响边坡状态的诸因素看作确定量,用安全系数作为衡量边坡状态的指标。然而大量试验和工程实践证明,影响边坡状态的因素中有许多具有很大的随机性,如边坡岩石的强度参数、外界荷载、地下水、岩土内的各种不连续面等,因此用确定性方法加以计算评价会带来很大误差,甚至结果失真。为此,从60年代末以来,在世界范围内广泛开展了岩土不确定性的研究,其中边坡工程是岩土不确定性研究的一个主要应用方面,其研究成果也带动了岩土工程的其他方面。

在早期乃至目前的边坡随机分析中,绝大部分是直接引用了结构可靠性的计算方法,并在计算方法上做了许多努力,但对边坡自身问题的关注要少些。从本质上讲,无论是边坡的确定性分析还是随机分析,其研究重点应该在于边坡工程本身,而不是计算方法。因而,无论将真实客观的边坡问题过度简单化、理想化,也无论使用什么巧妙的计算方法,都不会得出真实的结果。所以应从边坡工程的客观实际入手,充分考虑边坡破坏所具有的三维性和渐进性,进行边坡的空间随机介质分析,同时与边坡工程中的不连续面的随机性相结合,全面系统地考虑各种因素,建立起相适应的随机分析模型和计算方法,才是岩土边坡工程随机研究的重点内容之一。

总之,地下开采引起的岩层与地表移动数值分析研究,在相当长的一段时期内,仍将以现场实地观测为基础,强调完善的模型建立、正确的选取参数,才是精确预计的关键和保证。

第二节 岩层与地表移动计算的改进

许多学者研究了矿物开采后地表移动的计算方法。其中,采用连续介质力学的方法进行研究是重要的途径。该方法具有两方面的优点:首先,由于是从力学机理上来研究的,所获得的结果具有普遍意义,并能够说明各岩层的力学性质对地表移动的影响情况;其次,可获得地表以下各岩层的变形规律及应力分布规律。但由于岩体介质十分复杂,目前采用连续介质力学的方法研究地表移动规律仅得到很少的成果,而且在分析中没有考虑煤层以下存在的半无限弹性介质,而是将煤层底板视为刚性体。

在采用傅里叶积分变换方法分析煤层开采后岩层及地表的移动规律中,不仅考虑岩层的层状特点,而且考虑煤层以下存在的半无限弹性介质,按平面弹性应变情形进行分析,认为各岩层是连续的、均匀的、各向同性的线弹性介质,以求解开挖引起的岩层与地表移动计算问题。

一、基本假设及定解条件

设有 $n+1$ 层岩层,各岩层都是水平的,第 i ($i=1,2,\dots,n$)层的厚度为 h_i ,第 $n+1$ 层为无限厚,且含有一水平煤层,开采宽度为 $2a$,煤层距第 n 层岩层的高度为 c (图1-1)。

假定 c 和 $2a$ 远大于煤层厚度,并假定煤层开采后顶、底板完全闭合,闭合量为 t 。

在下面的分析中,各岩层都选取一个局部坐标系 x_0z_i ,即 $z_i=0$, $z_i=h_i$,分别表示第 i 层的顶端和底端,如图1-1所示。对于第 i 层, x 方向与 z_i 方向的位移分别用 u_i 和 w_i 表示;应力分量分别用 σ'_i 、 σ''_i 、 τ'_{ix} 表示;弹性模量及泊松比分别用 E_i 和 μ_i 表示。

问题的边界条件为

$$z_1 = 0, \quad \sigma'_i = \tau'_{ix} = 0 \quad (1-1)$$

$$\begin{aligned} |x| &\leq a, \\ \lim_{z \rightarrow t^+} w_{n+1}(x, z) - \lim_{z \rightarrow t^-} w_{n+1}(x, z) &= -t \end{aligned} \quad (1-2)$$

煤层开挖后所产生的影响是有限的,即在无穷远处各应力分量均为零。

岩层层间接触条件考虑下列两种情形:

1. 层间滑动接触条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{iz}^1(x, h_1) = 0 \\ \tau_{iz}^{i+1}(x, 0) = \tau_{iz}^{i+1}(x, h_{i+1}) = 0 \\ \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ \sigma_i^-(x, h_i) = \sigma_i^{i+1}(x, 0) \\ w_i(x, h_i) = w_{i+1}(x, 0) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right. \quad (1-3)$$

2. 层间固结接触条件

$$\begin{cases} \tau_{ix}^j(x, h_i) = \tau_{xx}^{j+1}(x, 0) \\ \sigma_i^j(x, h_i) = \sigma_x^{j+1}(x, 0) \\ u_i(x, h_i) = u_{i+1}(x, 0) \\ w_i(x, h_i) = w_{i+1}(x, 0) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-4)$$

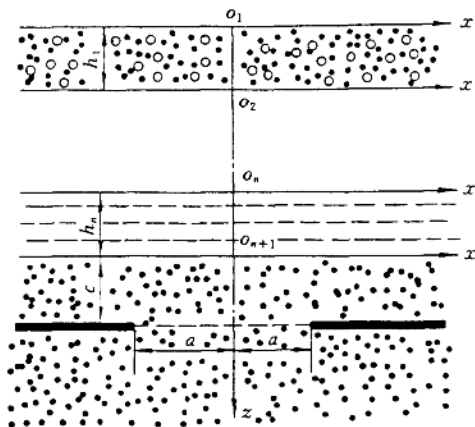


图 1-1 计算简图

二、问题的求解

煤层开采后,由于煤层顶、底板的闭合,各岩层将产生变形,因此各岩层间将有应力传递。设第 $n, n+1$ 层间的法向应力及切向应力分别为

$$\begin{cases} \sigma_i^n(x, h_n) = \sigma_i^{n+1}(x, 0) = p(x) \\ \tau_{ix}^n(x, h_n) = \tau_{ix}^{n+1}(x, 0) = q(x) \end{cases} \quad (1-5)$$

对于滑动接触,式(1-5)中 $q(x)=0$ 。

对于第 $n+1$ 层, 应力及位移分量可由两部分组成: 一部分是由煤层开采后顶、底板的闭合, 即由满足式 (1-2) 条件所产生的; 另一部分是在煤层顶、底板闭合后由与第 n 层的接触力 $p(x), q(x)$ 的作用所产生的。

在满足式(1-2)的条件时,应力及位移分量可表示为(省略了 z_{n+1} 的下标“ $n+1$ ”)

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_i &= 2G_{n+1}\gamma t[-F_4 + F'_4 - (z-c)F_6 + (z-3c)F'_6 - 2czF'_8] \\ \sigma'_z &= 2G_{n+1}\gamma t[-F_4 + F'_4 + (z-c)F_6 - (z+c)F'_6 + 2czF'_8] \\ \tau'_{iz} &= 2G_{n+1}\gamma t[(z-c)(F_5 - F'_5) + 2czF'_7] \\ u^* &= \gamma t\{(1-2\mu_{n+1})(F_1 - F'_1) + (z-c)F_3 - [z-c(3-4\mu_{n+1})]F'_3 + 2czF'_5\} \\ w^* &= \gamma t\{-2(1-\mu_{n+1})(F_2 - F'_2) + (z-c)F_4 - [z+c(3-4\mu_{n+1})]F'_4 + 2czF'_6\} \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

其中 $G_{n+1} = E_{n+1}/2(1 + \mu_{n+1})$, $\gamma = 1/4\pi(1 - \mu_{n+1})$

$$F_1 = \frac{1}{2} \ln f_1 - \frac{1}{2} \ln f_2$$

$$F_2 = \tan^{-1} \frac{x+a}{z-c} - \tan^{-1} \frac{x-a}{z-c}$$

$$F_3 = (z-c)(1/f_1 - 1/f_2)$$

$$F_4 = -(x+a)/f_1 + (x-a)/f_2$$

$$F_5 = [(x+a)^2 - (z-c)^2]/f_1^2 - [(x-a)^2 - (z-c)^2]/f_2^2$$

$$F_6 = 2(z-c)[(x+a)/f_1^2 - (x-a)/f_2^2]$$

$$F_7 = 2(z-c)\{[(z-c)^2 - 3(x+a)^2]/f_1^2 - [(z-c)^2 - 3(x-a)^2]/f_2^2\}$$

$$F_8 = 2(x+a)[(x+a)^2 - 3(z-c)^2]/f_1^2 - 2(x-a)[(x-a)^2 - 3(z-c)^2]/f_2^2$$

这里 $f_1 = (x+a)^2 + (z-c)^2$, $f_2 = (x-a)^2 + (z-c)^2$ 。

在 F_1 至 F_8 中, 将 $-c$ 换成 c 可得相应的 F'_1 至 F'_8 。

式(1-6)就是岩层为均匀各向同性的线弹性介质时开挖引起的应力及位移分布规律, 与 Berry 等的结果一致。

根据问题的性质, 接触力 $p(x)$ 及 $q(x)$ 是偶函数。利用傅里叶余弦积分变换方法, 可得煤层顶、底板闭合后 $p(x)$ 与 $q(x)$ 分别作用时应力及位移分量的傅里叶变换式为

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x^p &= \bar{p}(\xi)(1 - \xi z)e^{-\xi z} \\ \bar{\sigma}_z^p &= \bar{p}(\xi)(1 + \xi z)e^{-\xi z} \\ \bar{\tau}_{xz}^p &= -\bar{p}(\xi)\xi ze^{-\xi z} \\ \bar{u}^p &= \bar{p}(\xi)[1 - 2\mu_{n+1} - \xi z]e^{-\xi z}/2\xi G_{n+1} \\ \bar{w}^p &= -\bar{p}(\xi)[2(1 - \mu_{n+1}) + \xi z]e^{-\xi z}/2\xi G_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

及

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x^q &= -\bar{q}(\xi)(2 - \xi z)e^{-\xi z} \\ \bar{\sigma}_z^q &= -\bar{q}(\xi)\xi ze^{-\xi z} \\ \bar{\tau}_{xz}^q &= \bar{q}(\xi)(1 - \xi z)e^{-\xi z} \\ \bar{u}^q &= -\bar{q}(\xi)[2(1 - \mu_{n+1}) - \xi z]e^{-\xi z}/2\xi G_{n+1} \\ \bar{w}^q &= \bar{q}(\xi)(1 - 2\mu_{n+1} + \xi z)e^{-\xi z}/2\xi G_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

式(1-7)、式(1-8)中的 $\bar{p}(\xi)$ 与 $\bar{q}(\xi)$ 是傅里叶余弦变换式, 应通过层间接触条件确定。

这样, 第 $n+1$ 层的应力及位移可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{n+1} &= \sigma_x^* + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (\bar{\sigma}_x^p + \bar{\sigma}_x^q) \cos \xi x d\xi \\ \sigma_z^{n+1} &= \sigma_z^* + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (\bar{\sigma}_z^p + \bar{\sigma}_z^q) \cos \xi z d\xi \\ \tau_{xz}^{n+1} &= \tau_{xz}^* + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (\bar{\tau}_{xz}^p + \bar{\tau}_{xz}^q) \sin \xi z d\xi \\ u_{n+1} &= u^* + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (\bar{u}^p + \bar{u}^q) \sin \xi z d\xi \\ w_{n+1} &= w^* + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (\bar{w}^p + \bar{w}^q) \cos \xi z d\xi \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

对于第 $i(i=1, 2, \dots, n)$ 层, 可通过求解一双调和函数来确定其应力及位移(为了简便, 省略所有的上标或下标“ i ”), 即

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = 0 \quad (1-10)$$

应力分量与双调和函数 φ 的关系为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \quad (1-11)$$

问题的应力应变关系为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = [(1-\mu)\sigma_x - \mu\sigma_z]/2G \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = [(1-\mu)\sigma_z - \mu\sigma_x]/2G \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_{xz}/G \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

问题关于 z 轴是对称的,故对式(1-10)进行傅里叶余弦积分变换,有

$$\bar{\varphi} = A \operatorname{ch} \xi z + B \xi z \operatorname{ch} \xi z + C \operatorname{sh} \xi z + D \xi z \operatorname{sh} \xi z \quad (1-13)$$

式中 A, B, C, D ——待定积分常数,由问题的边界条件及层间接触条件确定。

对式(1-11)、(1-12)进行傅里叶余弦或正弦积分变换,并利用式(1-13),有

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \xi^2 [A \operatorname{ch} \xi z + B(2 \operatorname{sh} \xi z + \xi z \operatorname{ch} \xi z) + C \operatorname{sh} \xi z \\ &\quad + D(2 \operatorname{ch} \xi z + \xi z \operatorname{sh} \xi z)] \\ \bar{\sigma}_z &= -\xi^2 (A \operatorname{ch} \xi z + B \xi z \operatorname{ch} \xi z + C \operatorname{sh} \xi z + D \xi z \operatorname{sh} \xi z) \\ \bar{\tau}_{xz} &= \xi^2 [A \operatorname{sh} \xi z + B(\operatorname{ch} \xi z + \xi z \operatorname{sh} \xi z) + C \operatorname{ch} \xi z \\ &\quad + D(\operatorname{sh} \xi z + \xi z \operatorname{ch} \xi z)] \\ \bar{u} &= \{A \operatorname{ch} \xi z + B[2(1-\mu) \operatorname{sh} \xi z + \xi z \operatorname{ch} \xi z] + C \operatorname{sh} \xi z \\ &\quad + D[2(1-\mu) \operatorname{ch} \xi z + \xi z \operatorname{sh} \xi z]\}/2G \\ \bar{w} &= \{-A \operatorname{sh} \xi z + B[(1-2\mu) \operatorname{ch} \xi z - \xi z \operatorname{sh} \xi z] - C \operatorname{ch} \xi z \\ &\quad + D[(1-2\mu) \operatorname{sh} \xi z - \xi z \operatorname{ch} \xi z]\}/2G \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

下面分别就滑动接触和固结接触来确定各分层的待定积分常数 A, B, C, D 与 $\bar{p}(\xi)$ 、 $\bar{q}(\xi)$ 。

1. 滑动接触

对式(1-3)进行傅里叶变换,并将式(1-14)中相应式子代入,可得:

$$\left. \begin{aligned} A_{i+1} &= -B_i \operatorname{sh} \eta_i + D_i (\operatorname{ch} \eta_i + \eta_i \operatorname{ch} 2\eta_i / \operatorname{sh} \eta_i) \\ B_{i+1} &= \alpha_i (B_i \operatorname{ch} \eta_i + D_i \operatorname{sh} \eta_i) \\ C_{i+1} &= -B_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ D_{i+1} &= [B_i (\operatorname{sh} \eta_i - \alpha_i \eta_{i+1} \operatorname{ch} \eta_i) + D_i (\operatorname{ch} \eta_i + \eta_i \operatorname{ch} 2\eta_i / \operatorname{sh} \eta_i \\ &\quad - \alpha_i \eta_{i+1} \operatorname{sh} \eta_i)] / (1 + \eta_{i+1} \operatorname{ch} \eta_{i+1}) \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

式中 $\eta_{i+1} = \xi h_i$, $\alpha_i = G_{i+1}(1-\mu_i)/G_i(1-\mu_{i+1})$

根据边界条件式(1-1)及 $\tau_{xz}^1(x, h_1) = 0$, 可得:

$$A_1 = 0, \quad C_1 = -B_1, \quad D_1 = -\eta_1 B_1 / (1 + \eta_1 \operatorname{ch} \eta_1) \quad (1-16)$$

通过递推公式(1-15)及式(1-16),各分层的四个积分常数都可用 B_1 来表示。

再利用第 $n, n+1$ 层之间的滑动接触条件(法向应力和法向位移连续),有

$$\begin{aligned} (1-\mu_n) \xi (B_n \operatorname{ch} \eta_n + D_n \operatorname{sh} \eta_n) / 2G_n + \bar{w}^*(\xi, 0) &= \bar{w}^*(\xi, 0) \\ -\xi^2 [A_n \operatorname{ch} \eta_n + B_n (\eta_n \operatorname{ch} \eta_n - \operatorname{sh} \eta_n) + D_n \eta_n \operatorname{sh} \eta_n] - \bar{p}(\xi) &= 0 \end{aligned} \quad (1-17)$$

式中 $\bar{w}^*(\xi, 0) = -(1 - \mu_{n+1})\bar{p}(\xi)/G_{n+1}\xi$

$$\bar{w}^*(\xi, 0) = \int_0^\infty w^*(x, 0) \cos \xi x dx$$

这样, 通过式(1-17)可唯一确定 B_1 及 $\bar{p}(\xi)$ 。

2. 固结接触

类似滑动接触分析, 各分层四个积分常数的递推公式为:

$$\left. \begin{aligned} A_{i+1} &= A_i \operatorname{ch} \eta_i + B_i \eta_i \operatorname{ch} \eta_i + C_i \operatorname{sh} \eta_i + D_i \eta_i \operatorname{sh} \eta_i \\ B_{i+1} &= -A_i \beta_i \operatorname{sh} \eta_i + B_i [(\alpha_i - \beta_i) \operatorname{ch} \eta_i - \beta_i \eta_i \operatorname{sh} \eta_i] - C_i \beta_i \operatorname{ch} \eta_i \\ &\quad + D_i [(\alpha_i - \beta_i) \operatorname{sh} \eta_i - \beta_i \eta_i \operatorname{ch} \eta_i] \\ C_{i+1} &= A_i (\beta_i + 1) \operatorname{sh} \eta_i + B_i [(\beta_i + 1 - \alpha_i) \operatorname{ch} \eta_i + (\beta_i + 1) \eta_i \operatorname{sh} \eta_i] \\ &\quad + C_i (\beta_i + 1) \operatorname{ch} \eta_i + D_i [(\beta_i + 1 - \alpha_i) \operatorname{sh} \eta_i + (\beta_i + 1) \eta_i \operatorname{ch} \eta_i] \\ D_{i+1} &= A_i \beta_i \operatorname{ch} \eta_i + B_i (\alpha_i \operatorname{sh} \eta_i + \beta_i \eta_i \operatorname{ch} \eta_i) + C_i \beta_i \operatorname{sh} \eta_i \\ &\quad + D_i (\alpha_i \operatorname{ch} \eta_i + \beta_i \eta_i \operatorname{sh} \eta_i) \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (1-18)$$

式中 $\beta_i = (G_{i+1}/G_i - 1)/2(1 - \mu_{i+1})$

再由边界条件式(1-1), 可得:

$$A_1 = 0, \quad C_1 = -B_1 \quad (1-19)$$

通过递推公式(1-18)及式(1-19), 则各分层的积分常数都可以用 B_1, D_1 两个待定常数表示。

利用第 $n, n+1$ 层之间的固结接触条件(法向应力、法向位移及切向应力、切向位移连续), 可得:

$$\left. \begin{aligned} -\xi^2(A_n \operatorname{ch} \eta_n + B_n \eta_n \operatorname{ch} \eta_n + C_n \operatorname{sh} \eta_n + D_n \eta_n \operatorname{sh} \eta_n) - \bar{p}(\xi) &= 0 \\ \xi^2[A_n \operatorname{sh} \eta_n + B_n (\operatorname{ch} \eta_n + \eta_n \operatorname{sh} \eta_n) + C_n \operatorname{ch} \eta_n \\ &\quad + D_n (\operatorname{sh} \eta_n + \eta_n \operatorname{ch} \eta_n)] - \bar{q}(\xi) = 0 \\ \xi\{A_n \operatorname{ch} \eta_n + B_n [2(1 - \mu_n) \operatorname{sh} \eta_n + \eta_n \operatorname{ch} \eta_n] + C_n \operatorname{sh} \eta_n + D_n [2(1 - \mu_n) \operatorname{ch} \eta_n \\ &\quad + \eta_n \operatorname{sh} \eta_n]\} / 2G_n - \bar{u}^*(\xi, 0) - \bar{u}^q(\xi, 0) = \bar{u}^*(\xi, 0) \\ \xi\{-A_n \operatorname{sh} \eta_n + B_n [(1 - 2\mu_n) \operatorname{ch} \eta_n - \eta_n \operatorname{sh} \eta_n] - C_n \operatorname{ch} \eta_n + D_n [2(1 - \mu_n) \operatorname{sh} \eta_n \\ &\quad - \eta_n \operatorname{ch} \eta_n]\} / 2G_n - \bar{w}^*(\xi, 0) - \bar{w}^q(\xi, 0) = \bar{w}^*(\xi, 0) \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

式中 $\bar{u}^*(\xi, 0) = (1 - 2\mu_{n+1})\bar{p}(\xi)/2G_{n+1}\xi$

$$\bar{u}^q(\xi, 0) = -(1 - \mu_{n+1})\bar{q}(\xi)/G_{n+1}\xi$$

$$\bar{w}^q(\xi, 0) = (1 - 2\mu_{n+1})\bar{q}(\xi)/2G_{n+1}\xi$$

$$\bar{u}^*(\xi, 0) = \int_0^\infty u^*(x, 0) \sin \xi x dx$$

解方程式(1-20)可唯一确定待定常数 B_1, D_1 及 $\bar{p}(\xi), \bar{q}(\xi)$ 。 B_1, D_1 及 $\bar{p}(\xi), \bar{q}(\xi)$ 求出后, 可获得各分层应力及位移分量的傅里叶积分变换表达式, 通过求傅里叶逆变换可得到相应应力及位移分量的解析表达式。

三、算 例

以岩层为二层时($n=1$)开挖引起的地表移动的计算为例。

根据式(1-14),位移分量 u_1, w_1 (在地表)的傅里叶积分变换为

$$\begin{aligned}\bar{u}_1(\xi, 0) &= D_1(1 - \mu_1)/G_1 \\ \bar{w}_1(\xi, 0) &= B_1(1 - \mu_1)/G_1\end{aligned}\quad (1-21)$$

为了确定式(1-21)中的常数,需要利用式(1-17)(对应滑动接触)或式(1-20)(对应固结接触)。下面分别进行讨论。

由式(1-6)可得

$$\begin{aligned}u^*(x, 0) &= \frac{tc^2}{\pi} \left[\frac{1}{(x+a)^2 + c^2} - \frac{1}{(x-a)^2 + c^2} \right] \\ w^*(x, 0) &= \frac{t}{\pi} \left[\tan^{-1} \frac{x+a}{c} - \tan^{-1} \frac{x-a}{c} + \frac{c(x+a)}{(x+a)^2 + c^2} - \frac{c(x-a)}{(x-a)^2 + c^2} \right]\end{aligned}$$

容易得到:

$$\left. \begin{aligned}\bar{u}^*(\xi, 0) &= -tc e^{-\epsilon\xi} \sin \xi a \\ \bar{w}^*(\xi, 0) &= t(c + 1/\xi) e^{-\epsilon\xi} \sin \xi a\end{aligned}\right\} \quad (1-22)$$

1. 滑动接触情形

根据式(1-16)、式(1-17),可得

$$\left. \begin{aligned}B_1 &= (\text{sh} \xi h_1 + \xi h_1 \text{ch} \xi h_1) \bar{w}^*(\xi, 0) / \xi f(\xi h_1) \\ D_1 &= -h_1 \text{sh} \xi h_1 \bar{w}^*(\xi, 0) / \xi f(\xi h_1)\end{aligned}\right\} \quad (1-23)$$

这里 $f(\eta) = (\eta + \text{ch} \eta \text{sh} \eta)(1 - \mu_1)/G_1 + (\text{sh}^2 \eta - \eta^2)(1 - \mu_2)/G_2$

2. 固结接触情形

根据式(1-19)、式(1-20),可得

$$\left. \begin{aligned}B_1 &= [g_1(\xi h_1) \bar{u}^*(\xi, 0) + g_2(\xi h_1) \bar{w}^*(\xi, 0)] / 2G\xi g(\xi h_1) \\ D_1 &= [g_3(\xi h_1) \bar{u}^*(\xi, 0) + g_4(\xi h_1) \bar{w}^*(\xi, 0)] / 2G_1 \xi g(\xi h_1)\end{aligned}\right\} \quad (1-24)$$

其中

$$\begin{aligned}g_1(\eta) &= (1 - 2\mu_1) \text{sh} \eta - \eta \text{ch} \eta - \alpha [2(1 - \mu_2) \eta \text{sh} \eta + (1 - 2\mu_2)(\text{sh} \eta + \eta \text{ch} \eta)] \\ g_2(\eta) &= -\{2(1 - \mu_1) \text{ch} \eta + \eta \text{sh} \eta + \alpha [(1 - 2\mu_2) \eta \text{sh} \eta + 2(1 - \mu_2)(\text{sh} \eta + \eta \text{ch} \eta)]\} \\ g_3(\eta) &= -\{2(1 - \mu_1) \text{ch} \eta - \eta \text{sh} \eta - \alpha [(1 - 2\mu_2) \eta \text{sh} \eta + 2(1 - \mu_2)(\text{sh} \eta - \eta \text{ch} \eta)]\} \\ g_4(\eta) &= (1 - 2\mu_1) \text{sh} \eta + \eta \text{ch} \eta + \alpha [(1 - 2\mu_2) \eta \text{sh} \eta + 2(1 - \mu_2)(\text{sh} \eta + \eta \text{ch} \eta)] \\ g(\eta) &= (1 - 2\mu_1)^2 \text{sh} \eta - 4(1 - \mu_1)^2 \text{ch} \eta - \eta^2 + (3 - 4\mu_2) \alpha (\eta^2 - \text{sh}^2 \eta) \\ &\quad - 2\alpha [(1 - 2\mu_1)(1 - 2\mu_2) \text{sh}^2 \eta + 4(1 - \mu_1)(1 - \mu_2) \text{ch} \eta \text{sh} \eta + (1 - 2\mu_2) \eta^2]\end{aligned}$$

式中

$$\alpha = G_1/G_2$$

根据式(1-21),地表移动的解析表达式为

$$\left. \begin{aligned}u_1(x, 0) &= \frac{2(1 - \mu_1)}{\pi G_1} \int_0^\infty D_1 \sin \xi x d\xi \\ w_1(x, 0) &= \frac{2(1 - \mu_1)}{\pi G_1} \int_0^\infty B_1 \cos \xi x d\xi\end{aligned}\right\} \quad (1-25)$$

最后,对式(1-25)进行数值积分,即可得到开挖引起的地表移动规律。

从上述研究中可明显地看到:

(1) 不论滑动接触还是固结接触,地表移动和各岩层的弹模与第1层的弹模的比值有关。即由量测的地表移动值反算各岩层的弹模时,只能得到各岩层的弹模与第1层的弹模的

比值,而得不到各岩层的弹模的具体数值;另外,各岩层的泊松比都是可识别的。

(2) 根据地表移动的解析表达式(1-25),容易分析各岩层的力学性质对地表移动的影响;利用式(1-14)可分析各岩层的移动及应力分布情况;根据式(1-9)可分析煤层底板的变形及应力分布情况。

(3) 利用上述采用的方法,容易探讨倾斜煤层和岩层为横观各向同性的情况。

第三节 地表移动计算的统一理论

研究地下开采引起的地表移动问题在我国已经开展了 40 多年。在研究期间,先后引进和发展了前苏联的典型曲线法、剖面函数法,并由唐山煤炭科学研究分院发展为负指数函数法;德国和波兰、法国的影响函数法和随机介质理论,并由我国的留波学者和矿区的岩层移动研究者发展为概率积分法和积分网格法;英国下沉工程师手册上介绍的诺谟图方法。此外,尚有英国、南非、德国等国家学者基于力学方法得到的剖面函数或影响函数,均未在我国得到推广使用,但我国学者李增琪、杨硕等也进行了类似的研究。在 70 年代后期,各种数值计算方法(其中也包括反分析的方法)在岩层移动领域中得到了广泛的应用。这里主要研究各种经验方法,不涉及关于力学方法的讨论。

上述的各种方法尽管在不同矿区满足了生产的要求,但使用的计算公式并不相同,各种参数的定义也存在一定差异,彼此并不存在代换关系,这就造成在岩移理论上错综复杂。多年来,在国外文献介绍中国的方法时往往从属于国外的一些方法,不能反映我国学者在该领域中应有的领先地位。因此,建立我国固有的地表移动的理论及其参数显得十分迫切,总结出参数随地质采矿条件变化的规律是我国地表移动学者的首要任务。

一、观测得到的基本结论

多年来,在各种地质、采矿条件下设站观测总结出以下经验:

(1) 沿煤层走向或倾斜方向的下沉盆地的形状显著不同,这种差异在水平煤层中可以忽略,而在倾角变大时差异也随之加大。

(2) 在煤层上山方向或下山方向,下沉盆地的形状由于重复采动的情况不同而存在较大差异,故有不同的移动角和边界角参数;在走向方向上,开切眼一侧或工作面终止一侧下沉盆地也存在差异,但大多数情况下被认为是中心对称的。

(3) 在充分采动的条件下,下沉盆地的曲线近似于对拐点对称,拐点处的下沉等于 $W_{\max}/2$;但也有资料表明,存在对拐点非对称的情况。

(4) 由于煤层顶板岩性的变化和开采宽度的变化,采场顶板的下沉可能导致顶、底板完全闭合、部分闭合或不闭合,即存在不同的顶板下沉曲线。在完全闭合的条件下,一般将顶板下沉曲线简化成台阶形的闭合曲线。

(5) 最大下沉值与采出煤层厚度在初次采动时呈线性关系;在非充分采动条件下的最大下沉值与采动程度有一定关系,并可以通过叠加原理来计算。

(6) 下沉盆地扩展的范围与采深、倾角有关,一般认为扩展范围与采深成正比。

(7) 开采影响的传播方向与煤层倾角有关。

二、各种预计理论应满足的数学要求

不管使用哪个数学预计公式,必须满足下列要求:

(1) 在同一开采方向的范围内(走向或倾斜)应存在唯一的影响函数,该函数不随开采的煤层位置而变化,也就是说下山方向或上山方向,开切眼侧和终止侧的两组半盆地各有一个影响函数。这条原理称为影响函数唯一性原理。当然,在不同组间,开采的倾斜方向或走向方向上的影响函数可以不同。

(2) 影响函数和顶板下沉曲线函数的乘积在顶板下沉曲线区间内的积分应等于剖面函数。也就是说下沉盆地的剖面函数与影响函数、顶板下沉曲线函数间存在着固有的函数关系,三者不应孤立地考虑。影响函数法和剖面函数法可以统一起来。

(3) 当顶板下沉曲线严格满足台阶形时,叠加原理成立;相反,当顶板下沉曲线不满足台阶形时,从数学上严格来讲,叠加原理并不存在。当使用叠加原理的假设条件时,实际上已经改变了原有的影响函数和顶板下沉曲线函数,即将顶板下沉曲线简化成台阶形,并使某个新的影响函数在此台阶形的开采域内积分,使之等于剖面函数。这个新的影响函数包含了顶板下沉曲线函数和将积分区间改变为原开采区间,已不是原有的影响函数。为了区别起见,可把它叫做似影响函数。

(4) 为了消除开采深度对计算公式的影响,各种计算公式可以采用无因次形式,即将平面坐标化为与采深或与采深成正比量(例如影响半径 r)比值的形式。

(5) 当把开采简化成台阶形,下沉盆地空间各点的下沉可以由前述的两个似影响函数在开采区域内的积分得到。

三、基本函数关系

各种理论的影响函数与剖面函数存在下列函数关系(平面形式):

1. 积分形式

$$W(x) = \int_A^B \eta(s) f(x-s) ds \quad (1-26)$$

式中 x ——地面坐标,原点取在开采边界;

s ——开采处的横坐标,平行于 x ,原点与 x 相同;

$W(x)$ ——地面下沉剖面函数;

$\eta(s)$ ——顶板下沉曲线函数;

$f(x)$ ——影响函数。

2. 微分形式

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_A^B \eta(s) f(x-s) ds = \int_A^B [\eta(s) f(x-s)]'_x ds = \int_A^B [\eta(s) f'_x(x-s)] ds$$

$$\text{若令} \quad g'_x(x-s) = \eta(s) f'_x(x-s) \quad (1-27)$$

$$\text{则有} \quad g(x) = \int_A^B g'_x(x-s) ds \quad (1-28)$$

在式(1-28)中进行换元,即令 $u=(x-s)$,则有

$$g(x) = \int_{x-A}^{x-B} [-g'_x(x-s)] d(x-s) = g(x-A) - g(x-B) \quad (1-29)$$