群论基础教程

侯云智　编著

山　东　大　学　出　版　社

群论基础教程

侯云智　编著

责任编辑：孙秀英
封面设计：牛　钧
责任校对：张华芳

山东大学出版社出版
地址：山东省济南市山大南路27号
邮政编码：250100
山东省新华书店经销
济南市中印刷五厂印刷

850×1168毫米　32开
9.75印张　253千字
1997年6月　第1版
1997年6月第1次印刷
印数：1—2000
ISBN7—5607—1766—7/O·112
定价：16.00元

前 言

群论是对称性的一种抽象描述。从19世纪由法国数学家伽罗华（E·Galois）首次创立群的概念开始，至今已经历了一百多年。群论研究已取得很大进展，它不仅在近代物理各个学科中得到了广泛应用，甚至还波及到化学、生物学等诸多学科，并取得了许多非凡成就。它是现代物理学工作者必须系统了解的一种研究基础，许多高校已把群论列为物理系高年级学生的选修课和研究生必修基础课。

作者通过多年在山东大学物理系讲授群论课和多次举行的全国暑期群论讲习班，深切感受极需一本适合初学者的基础群论教材，把比较抽象的理论能深入浅出地介绍给初学者，并能尽快地应用群论方法做些研究。本书是在多次编写讲义的基础上，结合自身的教学和研究工作体会，并考虑到群论的一些新的发展和应用而编写的。

本书假定读者已具备了量子力学和线性代数的基础知识，在此基础上自成体系地介绍了物理学中常用的群论方法。为了便于学者了解和应用，不仅在各章之后都附有习题，读者可通过做习题加深对群论概念的理解；而且在第四章和第七章后面分别介绍了群论在量子力学和粒子物理应用方面的一些重要成果。由于篇幅所限和考虑到与群论并行的另一门研究生基础课（高等量子力学）已详细地介绍了旋转对称性的角动量理论，本书出版时略去了有关SO(3)群那一章。因为本书是针对物理学科的研究生和理论物理工作者而写的，因此尽可能避免数学上的抽象完整证明，而力求理论阐述准确清楚，内容安排上由浅入深，多举实例，力求

本书通俗易懂，便于灵活应用。本书前四章可作为物理系研究生的通用群论教材，而后三章讲述李群、李代数及其应用，可做为理论物理专业研究生的群论补充教材，也可供理论物理工作者参考。

由于作者水平和时间所限，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者予以指正。

最后作者衷心感谢余寿绵和王承瑞教授对本书的关心，并特别感谢山东大学教材基金委员会和山东大学出版社对该书面世的支持。

侯云智

1997 年 5 月于济南

目　　录

第一章 抽象群概论

物理学家要描述物质世界，往往要借助于数学。而群论正是在近代物理学的各个领域中获得了日益广泛应用的重要数学分支，如固体物理、原子物理、核物理及粒子物理，甚至极其复杂的各种临界现象所以能得到迅速发展，都与群论的美妙而成功地应用密切相关。目前在物理学和物理化学的许多学科中，群论已成为不可缺少的数学基础。

数学家往往对抽象群理论的形式发展有兴趣，而在各个物理学科及量子化学的研究中，群表示理论的直接应用更为重要。因此，本章只讨论对理解群表示论所需要的那些抽象群概念，它的发展已有 160 多年的历史。

§1.1 集合与映射

1—1 集 合

集合是若干（有限个或无限个）可相互区别的具有一定特征的事物的总体，或简称为集。若事物 a 包含在集 A 中，则称 a 是 A 的一个元素，记为 $a\in A$。若集合 A 不包含元素 b，则记为$b\notin A$ 或 $b\overline{\in} A$。

有限集合只包含有限个元素。如 n 个人、n 个点或 n 个操作；而可数无限集合含有无穷多个可数的客体。如所有的自然数集和奇、偶数集；一切实数、复数或沿圆周的连续转动等则是不可数无限集合。不包含任何元素的集合称之空集，通常记为$\varnothing$。

若 A 与 B 是两个集合，且 A 的任何元素又是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，或称 B 是 A 的包集，记为

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A$$

若 A 是 B 的子集，且 B 的某些元素不包含在 A 中，则称 A 是 B 的真（固有）子集，记为

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A$$

A 与 B 的并集是 A 和 B 的全部元素集 C，记为

$$C=A\cup B$$

$$C=\{X|X\in A \text{ 或 } B\}$$

A 与 B 的交集是由 A 与 B 共有元素所构成的集合 C，记为

$$C=A\cap B$$

$$C=\{X|X\in A \text{ 和 } X\in B\}$$

A 与 B 之差集是属于集合 A，但不属于集合 B 的元素集 C，记为

$$C=A-B$$

$$C=\{X|X\in A \text{ 和 } X\notin B\}$$

集合 A 与 B 的并集、交集和差集可由图 1.1 形象地表示出来。

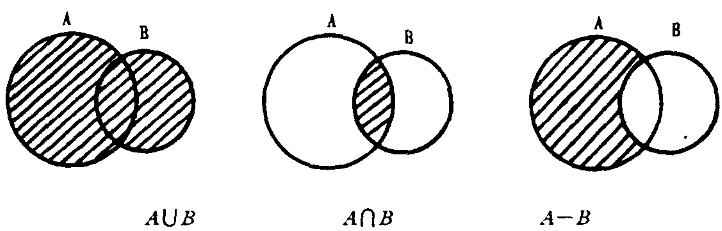

图 1.1　并集、交集和差集。

$A\cap B=\varnothing_0$，称之集合 A 与 B 不相交。若 $B\subset A$，则称 $A-B$ 为 B 的补集。

设 A，B 与 C 是三个任意集合，它们具有以下性质：

交换律　$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

吸收律　$(A\cup B)\cap A=A$

$(A\cap B)\cup A=A$

传递律　$A\subseteq B,B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$

反对称律　从 $A\subseteq B,B\subseteq A\Rightarrow A=B$

由两个集合 $A=\{a_i\}$和 $B=\{b_j\}$，可定义它们的直积集合，其元素以有序元素对(a_i,b_j)表示，并满足$(a,b)=(a',b')\rightleftharpoons a=a'$和 $b=b'$。直积集合记为

$$A\otimes B=\{(a_i,b_j)|a_i\in A,b_j\in B\}$$

若 A 和 B 分别包含 n 个和 m 个元素，则其直积集合将含有 $n\cdot m$ 个元素。图 1.2 可说明直积集合的含义。

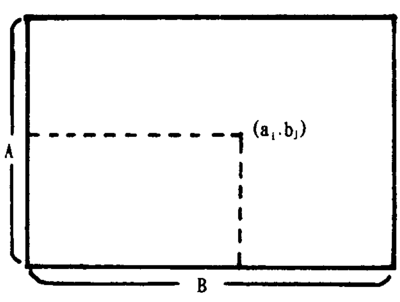

图 1.2　直积集合 $A\otimes B$

1—2　映　射

设有两个集合 A 与 B，如果存在一个对应法则 f，使之 A 中的任意元素 a 唯一地对应 B 中元素 b，则称 f 为从 A 到 B 的映

射，记为

$$f:A\longrightarrow B(\text{或 }A\xrightarrow{f}B)$$

就某个元素而言，可表示为 $b=f(a)$，$a\in A$，$b\in B$。称 A 为映射 f 的定义域，而 $f(A)=\{f(a)|a\in A\}$ 为 f 的值域。称 b 为 a 的像，a 为 b 的一个像源。

如果 f 和 g 是两个定义域相同的映射，对任意元素 $a\in A$ 都有 $f(a)=g(a)$ 则称映射 f 和 g 相等，记为 $f=g$。若 A 的全体元素都以 B 的某个固定元素 b_0 为像，$f(a)=b_0$，则称 f 为以 b_0 为值的常数映射。而对任一元素 $a\in A$，都有 $f(a)=a$，则称 f 为 A 的恒等映射。如果映射 $f:A\longrightarrow B$ 满足 $f(A)=B$，则称 f 为 A 到 B 的满映射。

若一个映射使 A 中的不同元素对应着 B 中的不同元素，则称它为一一映射。一一满映射存在逆映射，因此又可以将此映射称为可逆映射或双向映射。

设映射 $f:A\to B$，$g:B\to C$，则可定义映射 $h:A\to C$，其中 $h(a)=g(f(a))$，则称 h 为 g 和 f 的乘积映射，记为

$$h=g\cdot f \tag{1.1.1}$$

显然乘积映射满足结合律：$h\cdot(g\cdot f)=(h\cdot g)\cdot f$

设 f 是 A_1 和 A_2 的直积集合到 B 的映射，则称 f 为二变元映射，可表示为：

$$f(a_1,a_2)=b,(a_1\in A_1,a_2\in A_2,b\in B)$$

集合到其自身的映射称之该集合上的变换。例如，xy 平面绕 Z 轴旋转，将使平面上一点坐标 $(x,y)\to(x',y')$。

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad(x,y\in R;0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$$

这种旋转给出了直积集合 $R\otimes R$ 上的一个变换。

对于任意一个由 A 到 B 的双向映射 f 都有对应的逆映射 f^{-1}。若 I_A 和 I_B 分别代表 A 与 B 的恒等映射，不难证明

$$f\cdot f^{-1}=I_B,\quad f^{-1}\cdot f=I_A \tag{1.1.2}$$

两个双向映射 f 和 g 的乘积映射的逆映射满足所谓的靴袜关系：

$$(f\cdot g)^{-1}=g^{-1}\cdot f^{-1} \tag{1.1.3}$$

1—3　等价关系

集合 $A=\{a,b,c\cdots\cdots\}$上元素间的等价关系(以$\backsim$表示)满足以下条件：

1° 自反律：$a\backsim a$，$a\in A$ 的任意元素；

2° 对称律：若 $a\backsim b$，则 $b\backsim a$；

3° 传递律：若 $a\backsim b$，$b\backsim c$，则 $a\backsim c$。

例如，设 A 是平面上所有三角形的集合。显然，三角形的相似关系就是一种等价关系，因为全体相似三角形满足以上三个条件。同样，三角形的全等关系和面积相等关系也都是等价关系。

但是，并非任何关系都是等价关系。例如，实数集合中的大于关系"＞"或小于关系"＜"等就不是等价关系。因为这类关系不存在自反律和对称律。

按照等价关系可将集合 A 的全部元素分为若干个等价类，给定一种等价关系，那么就可以把全部与某一元素 a 等价的元素归并成一类 A_a，同类元素必互相等价，故每一类将由其中任一元素决定，但是，如果取一个不属于类 A_a 的元素 b，则它所相应的类 A_b 不可能与类 A_a 有共同的元素，因为若假设有共同元素 c，则有$c\backsim a$ 和 $c\backsim b$，由等价关系的传递律可知 $a\backsim b$，即 $b\in A_a$，这与前题矛盾，故不同类不相交。每个等价类都是 A 的一个子集，A 的每个元素必属于某个等价类。因此 A 被分成了两两不相交的等价类。

将各个等价类整体作为一个元素，这些新定义元素的集合称为商集合。例如，设 N 是整数集合，m 是个特定整数。若整数 a 与 b 之差能被 m 整除，则称 a 与 b 对于模 m 同余，记为 $a\equiv b(m)$。不

难看出，"≡"是等价关系，这时的等价类就是对于模 m 的同余类。显然，a 所在的类是所有整数 $a+km$（k 为任意整数）构成的集合，记作 $\bar{a}$，则 N 所分成的等价类如下：

$$\bar{0}=\{\cdots\cdots,-2m,-m,0,m,2m,\cdots\cdots\},$$
$$\bar{1}=\{\cdots\cdots,-2m+1,-m+1,1,m+1,2m+1,\cdots\cdots\},\cdots\cdots$$
$$\overline{m-1}=\{\cdots\cdots,-m-1,-1,m-1,2m-1,\cdots\cdots\}。$$

由这 m 个同余类构成的集合就是商集合。当 m 为 2 时，则将 N 分成为偶数和奇数两个等价类。

§1.2 群和实例

2—1 群的定义

抽象地说，群是一些不同元素的集合 $G=\{g_i\}$。而这些元素按着赋予的组合规则（通常称之群的乘法，它们可以是加法、乘法、操作变换和矩阵乘法等），满足下述四个条件：

1° 封闭性：对 G 的任意二个元素 g_i、$g_j\in G$，在定义的群乘法运算下，合成的新元素仍是 G 中的某个元素，即 $g_i\cdot g_j=g_k\in G$；

2° 结合律：G 中任意三个元素 g_i、g_j 和 g_k，都有 $(g_i\cdot g_j)\cdot g_k=g_i\cdot(g_j\cdot g_k)$；

3° 存在唯一的单位元素 $e\in G$，对任意元素 $g_i\in G$，则有

$$e\cdot g_i=g_i\cdot e=g_i;$$

4° 任意元素 $g_i\in G$，都有相应的逆元素 g_i^{-1}，满足

$$g_i\cdot g_i^{-1}=g_i^{-1}\cdot g_i=e。$$

以上四点必须同时得到满足的集合才能构成一个群。群元素的个数叫做群的阶。阶为有限数的称之有限群；反之叫做无限群。无限群又可分为离散群和连续群。若群元素是可数无限的，称之离散群；而群元素是不可数无限的，则称之连续群。如果对群 G 的任