

严士健
刘秀芳 著

测度与 概率

CEDU YU
GAILU

北京师范大学出版社

995791

卷081(学登报(京))

测度与概率

严士健 刘秀芳 著

北京师范学院出版社

严士健 刘秀芳 著

北京师范学院出版社

北京师范学院出版社

北京师范大学出版社

(京)新登字160号

责任编辑:潘淑琴

封面设计:任 凯

图书在版编目(CIP)数据

测变与概率/严士健,刘秀芳著.-北京:北京师范大学出版社,
1994.11

ISBN 7 - 303 - 03790 - X

I. 测… II. ①严… ②刘… III. ①测度论-基本知识②概率论-
基本知识 IV. ①0174.12②0211.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (94)第 15129 号

北京师范大学出版社出版发行

(100875 北京新街口外大街 19 号)

丰润印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本:850×1168 印张:12.5 字数:311 千

1994 年 11 月第 1 版 1994 年 11 月第 1 次印刷

印数:1—3000 册

定价:12.00 元

前 言

这是一本为统计与概率专业而写作的教材。考察概率论与数理统计发展过程，测度论不但已经成为概率论，特别是随机过程论的基础；而且对于数理统计来说，很多基本概念和问题，离开了测度论很难说清楚。这与三十年前的情况大不相同，从发展看，这种依赖测度论的趋势将在未来的世纪中大大加强。因此我们认为在统计与概率专业中应该学习以测度论为基础的概率论基础。为此只学经典的实变函数论是不够的，需要学习测度论。而在讲授测度论时，如果充分以经典的“长度”和概率概念为背景，是可以不必先修实变函数论的。本书就是在这种认识下编写的，其目的是希望它能够作为在不先修实变函数论的条件下，学习测度论基础和以测度论为基础的概率论的教材。所以我们在测度论的内容之前，编写了集合、势以及距离空间等题材。

介绍距离空间，更重要的是由于现代概率论以及某些数理统计的题材更适宜于以距离可测空间上的概率测度为框架。介绍这方面的必要知识，可以使测度和概率的一些性质在距离空间的基础上讲授，以使學生具有更广泛的基础，便于以后的学习和应用。当然如果學生在学习本书之前，已经学习过距离空间的知识，自然就可以越过这一段或作简单地复习。这种想法来自一个更广泛的考虑，即教材要适应学生的水平，同时也应该适应学科的现代发展。本书除了将测度与概率尽量建立在距离空间的框架上外，对于有关的题材也向这方面作了一些努力。例如，在书中介绍了 Hausdorff 维数的概念；证明了完备可分距离空间的无穷维乘积空间上的 Колмогоров 相容性定理等。

实际情况告诉我们：测度论虽然是概率论理论的必要基础，但是有时出现学了前者而不能很好地应用于后者的情况。因此我们认为在统计与概率专业的教学中，将二者结合讲授是适宜的。这种看法也许得到概率统计的许多同行的赞同，因为我们和王隽骧教授合著的《概率论基础》[YWL]曾经得到广泛的传播。本书仍然按照这种观点设计。但是上述著作有其不便之处，例如费了很多篇幅讲解多维分布的情形，作为参考材料可以，作为教材则一些技术细节容易分散学生理解方法的实质的努力。因此本书在分布函数决定测度，L-S 积分，特征函数等题材上，讲解一维情形，但注意方法的一般性。希望能收到举一反三的效果。

本书虽然是为统计与概率专业而写，但是如果只采用第一至第五章以及第六、七、八章的前一部分，也可作为其它专业的测度论或实变数函数论课的教材或参考书。将有关概率的一些概念作为一般测度的具体例子，也许对学生理解测度论的作用有帮助，而且还可以扩大学生的知识面。

本书经过我们先后在北京师范大学数学系的统计与概率专业试用四次。栗演兵和张余辉两位先后帮助部分地整理笔记，录入软盘，指出错误。对此我们表示深深的感谢；我们还要感谢那些对讲课提出意见的听课同学，他们的意见使得本书有可能更加适用；感谢潘淑琴，何青和韩丽娟对编辑工作的指导。最后我们要特别提出：没有北京师范大学原自然科学处，出版委员会和出版社的支持和慷慨资助，本书将难以出版。对此我们表示衷心地感谢！

作 者

1994 年 11 月于
北京师范大学数学系

目 录

第一章	集合, 映射与势	1
§1.	集合及其运算	1
§2.	映射与势	8
§3.	可数集	13
§4.	不可数集	17
第二章	距离空间	21
§1.	定义及例	21
§2.	开集, 闭集	29
§3.	完备性	36
§4.	可分性, 列紧性与紧性	43
§5.	距离空间上的映射与函数	53
第三章	测度空间与概率空间	59
§1.	集类	59
§2.	单调函数与测度的构造	70
§3.	测度空间的一些性质	94
第四章	可测函数与随机变量	105
§1.	可测函数与分布	105
§2.	可测函数的构造性质	116
第五章	积分与数学期望	125
§1.	积分的定义	125
§2.	积分的性质	132
§3.	期望的性质及 L-S 积分表示	141
§4.	积分收敛定理	163
第六章	乘积测度与无穷乘积概率空间	174
§1.	乘积测度与转移测度	174
§2.	Fubini 定理及其应用	195
§3.	无穷维乘积概率	205
第七章	不定积分与条件期望	221
§1.	符号测度的分解	221
§2.	Lebesgue 定理与 Radon-Nikodym 定理	231
§3.	条件期望的概念	245
§4.	条件期望的性质	252
§5.	条件概率分布	259

第八章	收敛概念	273
§1.	几乎处处收敛	273
§2.	依测度收敛	280
§3.	L^r 收敛	287
§4.	条件期望的进一步性质	298
§5.	概率测度的收敛	302
§6.	几个收敛之间的关系的注记	314
第九章	大数定律、随机级数	316
§1.	简单的极限定理及其应用	316
§2.	弱大数定律	324
§3.	随机级数的收敛	332
§4.	强大数律	341
§5.	应用	345
第十章	特征函数和中心极限定理	354
§1.	特征函数的定义及简单性质	354
§2.	逆转公式及连续性定理	361
§3.	中心极限定理	367
	参考文献	382
	名词索引	385

第一章 集合, 映射与势

§1. 集合及其运算

1. 一个给定的 **集合** (或称为 **集**) 是指具有某种性质的事物的全体. 组成集合的每个事物称为该集合的 **元素** (或称为 **元**).

设 A 是一个集合, a 是 A 的元素, 则记作 $a \in A$ (读作“ a 属于 A ”) 或 $A \ni a$ (读作“ A 包含 a ”). 若 a 不是 A 的元素, 则记成 $a \notin A$.

给出集合时, 一定要有明确规则判定一个事物是否是它的元素. 事实上, 这不算是定义, “元素”和“集合”是不定义的名词, 还有一个不定义的关系——“属于”. 这些是属于集合论的公理化问题. 有些如拓扑方面的书都设一附录说明, 这里就不再仔细推敲.

以后一般用大写字母 A, B, C, \dots 表示集合, 用小写字母 a, b, c, \dots 表示元素, 不够用时可加各种足码.

有时用描述法给出集合, 即用 $\{\dots:\dots\}$ (或 $\{\dots|\dots\}$) 表示集合. 括号中“:” (相应地“|”) 号之前表示元的记法, 之后表示该集合的元所具有的性质. 例如: 设 \mathbb{R} 为实数集, $\{x: x \in \mathbb{R}, 1 < |x| \leq 2\}$ 或 $\{x \in \mathbb{R}: 1 < |x| \leq 2\}$ 表示绝对值大于 1 而不超过 2 的全体实数作成的集合. 又例如, 设 \mathbb{C} 表示复数集, $\{x \in \mathbb{C}: 1 < |x| \leq 2\}$ 表示模大于 1 而不超过 2 的全体复数.

有时, 用列举法即用 $\{\dots\}$ 表示集. 括号中“ \dots ”列出了该集合的所有元, 例如: $\{2, 3, 4, 5, 8\}$ 表示由 2, 3, 4, 5, 8 组成的集合, $\{u, v\}$ 表示由 u, v 组成的集合.

若集合 A 的元只有有限多个, 则称 A 为 **有限集**, 否则称为 **无限集**. 不含任何元素的集合称为 **空集**, 例如 $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 0\}$, $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$ 都是空集.

以下用逻辑符号 “ \exists ” 表示存在, “ \forall ” 表示 “对一切” (或 “对任何”). 记自然数集 $\{1, 2, \dots\}$ 为 \mathbb{N} , 整数集为 \mathbb{Z} , 非负整数集为 \mathbb{Z}_+ .

2. 定义 设 A, B 是两个集合:

1) 集合 A **包含** 集合 B (记作 $B \subset A$ 或 $A \supset B$) 是指对一切 $x \in B$ 必有 $x \in A$.

2) 集合 A, B **相等** (记作 $A = B$) 是指: $A \subset B$ 且 $B \subset A$.

若 $A \subset B$, 则称 A 为 B 的 **子集**; 若还有 $A \neq B$ (即存在 $y \in B$ 使 $y \notin A$), 则称 A 为 B 的 **真子集**, 记作 $A \subsetneq B$. 约定空集 \emptyset 是任何集合的子集.

关系 “ \subset ” 具有 (i) 自反性: 对任何集合 $A \subset A$; (ii) 传递性: 若 $A \subset B, B \subset C$, 则 $A \subset C$; (iii) 反对称性: 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则 $A = B$.

(i), (ii), (iii) 表明集类对关系 “ \subset ” 作成一個偏序集.

3. 集合的运算

为了以后书写方便, 我们采用符号 $A := B$ 表示 A 用 B 定义.

设 A, B 是两个给定的集合, 定义

$A \cup B := \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}$, 称为 A, B 的 **并集**;

$A \cap B := \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}$, 称为 A, B 的 **交集**;

$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 称为 A, B 的 **差集**,

当 $B \subset A$ 时, $A \setminus B$ 也称为 B 对 A 的 **余集**; 如果只考虑某固定集合 Ω 的子集时, 将 $\Omega \setminus B = \{x \in \Omega : x \notin B\}$ 称为 B 的 **余集**, 记作 B^c .

$A\Delta B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B, \text{ 或 } x \in B \text{ 且 } x \notin A\}$, 称为 A, B 的 **对称差**. 实际上, $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : \exists \alpha \in I, \text{ 使 } x \in A_\alpha\};$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : \forall \alpha \in I, \text{ 均有 } x \in A_\alpha\},$$

其中 I 为一指标集.

例1 若 $A_n := (n, n+1]$, $B_n := (0, n]$, $C_n := (n, n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 则

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = (0, \infty); \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = (0, \infty);$$

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n = (0, \infty) \setminus \mathbb{N}; \quad \Omega = \bigcup_{x \in \Omega} \{x\}.$$

例2 若 $A_n := (0, 1 + \frac{1}{n})$, $B_n := (0, 1 - \frac{1}{n})$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 则

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = (0, 1], \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = (0, 1).$$

下列各定理的证明是容易的 (请读者作为习题自证).

4. 定理 集合的交、并运算具有下列性质:

$$1) A \cup A = A, \quad A \cap A = A; \quad (\text{幂等性})$$

$$2) A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A; \quad (\text{交换律})$$

$$3) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \quad (\text{结合律})$$

$$4) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \quad (\text{分配律})$$

5. 定理 集合的差运算具有下列性质:

$$1) (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C);$$

$$2) (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C);$$

3) 若 $A, B \subset \Omega$, 则 $A \setminus B = A \cap B^c$;

4) 设 Ω 是任意一个集合, $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 Ω 的一族子集, 则有

$$\Omega \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (\Omega \setminus A_\alpha).$$

$$\Omega \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (\Omega \setminus A_\alpha).$$

4) 称为 **de Morgan 法则**.

6. 定义 设 $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为一集序列, 称

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n := \{x : x \text{ 属于 } A_n, n \in \mathbb{N}, \text{ 中的无穷多个}\}$$

为此 **集序列的上极限**. 称

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n := \{x : x \text{ 不属于 } A_n, n \in \mathbb{N}, \text{ 中的有限多个}\}$$

为此 **集序列的下极限**. 若

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n,$$

则称 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 的极限存在, 而上式中的共同集合称为此 **集序列的极限**, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

若 $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, 则称 $\{A_n\}_1^\infty$ **单调增**, 记作 $A_n \uparrow$; 若 $A_n \supset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, 则称 $\{A_n\}_1^\infty$ **单调减**, 记作 $A_n \downarrow$. 单调增和单调减集序列统称为 **单调集列**.

7. 定理 设 $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为任一集序列,

1) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty A_k$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty A_k$;

2) 若 $\{A_n\}$ 单调, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 存在且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^\infty A_n, & \text{若 } \{A_n\} \text{ 单调增;} \\ \bigcap_{n=1}^\infty A_n, & \text{若 } \{A_n\} \text{ 单调减.} \end{cases}$$

只需注意:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \{ x : \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, \text{使 } x \in A_k \};$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \{ x : \exists n \in \mathbb{N}, \text{使 } \forall k \geq n, x \in A_k \}.$$

详细证明留作习题.

8. 例. 设

$$A_n = \begin{cases} B, & \text{当 } n \text{ 是偶数,} \\ C, & \text{当 } n \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

则由定理 7 知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = B \cup C;$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = B \cap C.$$

9. 定义 设 Ω 是一给定的非空集, $A \subset \Omega$, 则称函数

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

为 A 的示性函数, 有时也记成 χ_A .

对于 Ω 的一切子集来说, I_A 完全刻划 A , I_A 与 A 之间一一对应, 它是联系集合与函数的一个重要工具, 需要熟练运用, 它与集合的关系为下述定理所述.

10. 定理 给定不空集合 Ω , 设下述集合都是 Ω 的子集, 则

$$1) A = \Omega \iff I_A(x) \equiv 1, \quad A = \emptyset \iff I_A(x) \equiv 0;$$

$$2) A \subset B \iff I_A(x) \leq I_B(x), \quad \text{对一切 } x \in \Omega;$$

$$3) I_{\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha}(x) = \max_{\alpha \in J} I_{A_\alpha}(x),$$

$$I_{\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha}(x) = \min_{\alpha \in J} I_{A_\alpha}(x), \quad \text{对一切 } x \in \Omega;$$

$$4) I_{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n}(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(x), \quad I_{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n}(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(x).$$

因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 存在 $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}$ 存在 (即对任何 $x \in \Omega$, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(x)$ 存在), 且 $I_{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}$.

证明 1)、2)、3) 留作习题, 我们只证 4):

$$\begin{aligned} I_{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n}(x) &= I_{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}(x) = \min_{n \geq 1} I_{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}(x) \\ &= \min_{n \geq 1} \max_{k \geq n} I_{A_k}(x) = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} I_{A_k}(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(x), \\ I_{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n}(x) &= I_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k}(x) = \max_{n \geq 1} \min_{k \geq n} I_{A_k}(x) \\ &= \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} I_{A_k}(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_{A_n}(x). \quad \square \end{aligned}$$

习题

1. 证明: $(A \cup B) \setminus B = A \iff A \cap B = \emptyset$.
2. 证明: $(A \setminus B) \cup B = A \iff B \subset A$.
3. $(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \setminus C)$ 成立的充分必要条件是什么?
4. 证明下述等式:
 - 1) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$;
 - 2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
 - 3) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
 - 4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
 - 5) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$;
 - 6) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$;
 - 7) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$;
 - 8) $B \cap (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha)$;
 - 9) $B \cup (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$.
5. 下列等式是否成立? 若不成立, 有怎样的包含关系?
 - 1) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;

$$2) A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C);$$

$$3) A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

$$4) (A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B.$$

$$6. \text{ 试化简集合 } (A \cup B^c \cup C^c) \cap (A \cup (B \cup C^c)).$$

7. 设 $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ 为单调减集序列, 则有

$$A_1 = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1}) \right),$$

且右端各项互不相交.

8. 设 \mathfrak{A} 为 Ω 的一切子集组成的集类, 则 \mathfrak{A} 对集合的交 (看成乘法)、对称差 (看成加法) 运算作成环. Ω 是单位元, \emptyset 是零元.

9. 设 $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ 是一集序列, 令 $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus (\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k)$, 则 $B_n, n = 1, 2, \dots$ 两两不交, 且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

10. 试证明定理 7.

11. 试举一 $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ 不单调, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 存在的例.

12. 设

$$\begin{aligned} A_{2k+1} &= \left[0, 2 - \frac{1}{2k+1}\right], \\ A_{2k} &= \left[0, 1 + \frac{1}{2k}\right], \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots$$

试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, 和 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$.

13. 给定自然数 m 及 m 个集合 B_0, \dots, B_{m-1} , 设 $A_n = B_k$, 当 m 整除 $n - k$ 时, 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$.

14. 试证定理 10 的 1)、2)、3)。

15. 设 $A, B \subset \Omega$, 试将 $I_{A \setminus B}, I_{A^c}, I_{A \Delta B}$ 用 I_A, I_B 表示出来。

§2. 映射与势

1. **定义** 映射 $f: A \mapsto B$ 是指对一切 $x \in A$, 存在唯一的 $y \in B$, 使得 $f(x) = y$. 称 A 为 f 的 **定义域**; 对 $F \subset A$, 称 $f(F) := \{y \in B: \text{存在 } x \in F, \text{ 使得 } f(x) = y\}$ 为 F 在 f 之下的**象**, 而称 $f(A)$ 为 f 的**值域**(显然应有 $f(A) \subset B$). 若有 $f(A) = B$, 则称 f 是**满射**; 若由 $f(x_1) = f(x_2)$ 必得 $x_1 = x_2$, 则称 f 是**单射**; 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 是 A 到 B 上的**一一映射(双射)**.

设 f 是 A 到 B 的映射, g 是 B 到 C 的映射, 则把由等式

$$g \circ f(x) := g(f(x)), \quad \forall x \in A,$$

定义的映射 $g \circ f: A \mapsto C$ 称为 g, f 的**复合映射**.

注意: $g \circ f$ 与 $f \circ g$ 是不同的, 且在上述情形 $f \circ g$ 未必有定义.

设 $f: A \mapsto B$, 则

$$f^{-1}(\{y\}) := \{x \in A: f(x) = y\}, \quad y \in B;$$

$$f^{-1}(F) := \{x \in A: f(x) \in F\}, \quad F \subset B.$$

且称 $f^{-1}(F)$ 为 F 在 f 之下的**逆象**.

下面给出象与逆象的一些性质: 设 $A_0, A_1, A_2 \subset A, B_1, B_2 \subset B$.

- 1) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$;
- 2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
- 3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
- 4) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

$$5) f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2);$$

$$6) f^{-1}(f(A_0)) \supseteq A_0.$$

若 f 为 A 到 B 的单射, 则可定义 $f(A) \subset B$ 到 A 上的 **逆映射** $f^{-1}: f^{-1}(y) := x$. 若 $f(x) = y$, 对任何 $y \in f(A)$.

注意此时 $f^{-1}(y)$ 与上面的 $f^{-1}(\{y\})$ 的意义不同.

2. 定义 给定集合 A, B 若存在 A 到 B 的一一映射, 则称 A 与 B **对等**, 记作 $A \sim B$.

例1 $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N} := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$.

对等关系 “ \sim ” 满足:

(i) 自反性: 对任何集合 A 有 $A \sim A$;

(ii) 传递性: 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$;

(iii) 对称性: 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$.

因此对等关系是一个等价关系. 按对等关系组成的集类称为此类中的集合的 **势**. 对等集组成的类中集合的势相同. 集合 A 的势记作 \bar{A} . 设 $n \in \mathbb{N}$, 则具有 n 个元素的集合作成的类是一个等价类, 这类集合的共同标志是有 n 个元素, 因此可以认为此类集合的势为 n . 对于无限集的情形则不同, 请看下例.

例2 $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$. 取映射 $f(x) = \frac{x}{1-x^2}, x \in (-1, 1)$. 则 f 是 $(-1, 1)$ 到 \mathbb{R} 的一一映射.

例3 $(-1, 1] \sim (-1, 1)$.

注意到

$$(-1, 1] \setminus (\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}) = (-1, 1) \setminus \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\},$$

而

$$\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\} \sim \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$