

管 理 科 学 基 础

吴育华 杜 纲 编著

天 津 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书比较全面地介绍了管理科学的基本内容:规划技术、图与网络技术、决策技术、对策分析技术、随机运筹技术的概念、方法和模型,其中包括近年来的一些较新进展。书中内容深入浅出,每章后均附有习题,便于教学和自学。

本书可作为高等院校经济管理类和理工科各专业本科生、研究生的教材,也可作为经济管理及工程技术人员的自学参考书。

图书在版编目(C I P)数据

管理科学基础/吴育华,杜纲编著. —天津:天津大学出版社,2001.9(2002.10 重印)
ISBN 7-5618-1509-3

I. 管… II. ①吴…②杜… III. 管理学 IV. C93

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 061253 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印 刷 天津市宝坻县第二印刷厂
经 销 全国各地新华书店
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 20.75
字 数 539 千
版 次 2001 年 9 月第 1 版
印 次 2002 年 10 月第 4 次
印 数 10 001—14 000
定 价 25.00 元

前 言

管理科学是一门应用科学、定量的方法去分析和解决管理决策问题的技术科学,其目的是帮助管理者在有限的资源条件下最优地实现组织目标,并为决策提供依据。随着管理现代化和科学化进程的不断加快,管理科学这一现代管理理论体系中的重要分支正在发挥着更大作用和得到更广泛的重视。由于这门学科不仅能够提供管理决策的科学方法,而且能够培养整体优化的决策思维方式,因此,我国各高等院校的经济管理类专业均普遍把这门学科作为主干课程。

近年来,我国高等管理教育有了相当大的发展。这种发展不仅体现在纵向的多层次性(本科、硕士、博士等)和横向的多专业性(管理科学与工程、工商管理、技术经济等),而且体现在对管理类专业的社会需求(在职人员申请硕士学位、管理人员培训、非管理专业学生的管理选修课等)的大量增加。因此,编写一本适应面较宽的管理科学教材就成为十分现实的需求。本书就是为适应这种需求编写的。

本书比较全面地介绍了管理科学的基本内容,其中包括近年来的一些较新进展。书中内容深入浅出,便于教学和自学,同时强化了绪论的地位,有利于学生对这门学科及其在管理决策问题中的应用程序等的整体了解。

本书作者都是多年从事这门学科教学的教师。但由于时间比较仓促,书中难免出现一些不当之处,敬请读者批评指正。

在本书的编写和出版过程中,参考了一些国内外的相关文献,得到了天津大学教务处和天津大学管理学院的大力支持。管理学院的范贻昌教授对本书内容提出了宝贵意见,博士生曾祥云、刘喜华、魏隼、安利平、王初等同志做了大量工作,谨在此一并表示衷心的感谢。

作 者

2001年1月

目 录

I	引论	(1)
	第1章 绪论	(1)
	1.1 管理与科学	(1)
	1.2 科学的工作程序	(4)
	1.3 科学的主要内容及本书结构	(7)
II	规划技术	(10)
	第2章 线性规划	(10)
	2.1 线性规划的模型与图解法	(10)
	2.2 单纯形法	(16)
	2.3 对偶问题与灵敏度分析	(30)
	2.4 运输问题	(40)
	2.5 线性整数规划	(49)
	第3章 非线性规划	(64)
	3.1 基本概念	(64)
	3.2 无约束极值问题	(69)
	3.3 约束极值问题	(77)
	第4章 多目标规划	(87)
	4.1 多目标规划模型及其解的概念	(87)
	4.2 多目标规划的解法	(91)
III	图与网络技术	(111)
	第5章 图与网络分析	(111)
	5.1 基本概念	(111)
	5.2 最小支撑树问题	(113)
	5.3 最短路问题	(115)
	5.4 最大流问题	(119)
	第6章 网络计划	(129)
	6.1 网络计划图的绘制	(129)
	6.2 时间参数计算与关键路线确定	(134)
	6.3 网络图的调整及优化	(139)
IV	决策技术	(150)
	第7章 风险型决策	(150)
	7.1 决策问题的基本要素及分类	(150)
	7.2 风险型决策	(152)
	7.3 完全不确定情况下的决策	(172)
	第8章 库存决策	(178)
	8.1 库存决策的基本概念	(178)
	8.2 确定型库存模型	(179)

8.3 随机型库存模型	(186)
第9章 多阶段决策——动态规划	(197)
9.1 多阶段决策问题	(197)
9.2 动态规划的基本概念	(198)
9.3 最优性原理与递推方程	(200)
9.4 动态规划应用例解	(202)
第10章 多目标决策	(221)
10.1 特尔非法	(221)
10.2 层次分析法	(222)
10.3 数据包络分析法	(229)
V 对策分析技术	(241)
第11章 二人有限零和对策	(241)
11.1 基本概念	(241)
11.2 二人有限零和对策的纯策略对策模型	(243)
11.3 二人有限零和对策的混合策略对策模型	(246)
第12章 二人有限非零和对策	(253)
12.1 非合作的二人有限非零和对策	(253)
12.2 合作的二人有限非零和对策	(258)
VI 随机运筹技术	(262)
第13章 排队系统分析	(262)
13.1 基本概念	(262)
13.2 到达与服务的规律	(265)
13.3 M/M/1 排队模型	(268)
13.4 M/M/C 排队模型	(277)
13.5 一般服务时间的 M/G/1 排队模型	(282)
13.6 排队系统的优化	(284)
第14章 马尔可夫分析	(289)
14.1 引言	(289)
14.2 关于正规随机矩阵的一些知识	(291)
14.3 马尔可夫链	(293)
14.4 吸收马尔可夫链	(300)
第15章 随机模拟技术	(310)
15.1 模拟过程的主要步骤	(310)
15.2 一个人工模拟的例子	(312)
15.3 随机变量模拟数据的产生方法	(315)
15.4 模拟语言简介	(319)

I 引 论

第 1 章 绪 论

1.1 管理与管理科学

1.1.1 管理与决策

随着现代科学技术和社会经济的不断发展,各个领域对管理的重视程度及对管理科学化的要求越来越高,各种组织(如企业)面对日趋复杂的生存环境,也必须更加精心地处理各种管理问题。

那么,什么是管理?管理就是管理者运用各种资源达成某既定目标的过程。在这一过程中,管理者为了更有效地运用有限的资源以更高水平达到目标,必须不断地做出各种决策。可以说,管理的过程也就是不断地进行各种决策的过程。

尽管决策的正确性不仅依靠科学而且凭借经验与艺术,但随着决策的难度以及决策失误后造成的损失程度的不断增大,那种仅凭经验与艺术的决策情形越来越少,即使是以往认为主要靠经验和艺术的那些非程序化或高层次决策,也往往要先经过一系列基于科学方法的信息处理和可行性研究。管理科学正是为管理决策提供科学方法的一门学科。随着信息化时代的到来,它必将在管理科学化的进程中发挥出更大的作用。

1.1.2 管理科学及其发展简史

1. 管理科学及其在科学技术体系中的地位

关于管理科学,可以有广义和狭义两种理解。广义的理解,认为管理科学(Management Sciences)是一门应用多学科与多领域理论、方法、技术和知识的综合性交叉学科,其目的是研究人类利用有限资源实现组织目标的管理活动方面的动态、复杂和创新的社会行为及其规律。按照广义的理解,管理科学实际上可以包含多门学科,其中既有以定性分析为主的组织行为学和企业战略管理,又有以定量分析为主的运筹学和计量经济学。而狭义的理解,则主要涉及广义范畴中的运筹学等定量部分,认为管理科学(Management Science)是一门应用科学、定量的方法去分析和解决管理决策问题的技术科学,其目的是帮助管理者在有限的资源条件下最优地实现组织目标,并为决策提供依据。它在现代科学技术体系的四个层次中属于技术科学层次,和它相应的基础科学主要包括数学、管理学和经济学等,作为它的哲学指导观的主要是唯物论和系统观,而和它相应的工程技术主要是管理工程等,如图 1.1 所示。

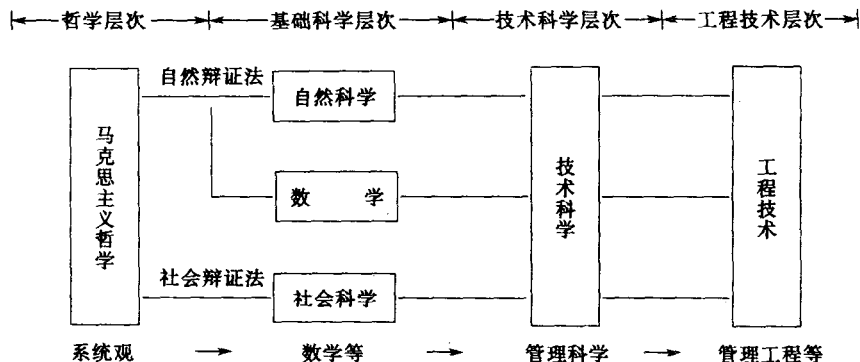


图1.1

本书是基于狭义的管理科学定义,定名为《管理科学基础》。这里面有两层含义:一是从狭义管理科学的角度,它包括了管理科学的基础内容;二是从广义管理科学的角度,它是基于系统观的整体优化思想和基于问题导向的科学方法论,以及基于数学模型的定量分析工具等一整套内容体系构成整个广义管理科学的重要基础。

2. 管理科学的发展简史

管理科学的萌芽,可以追溯到19世纪末至20世纪初。这一时期代表性的工作有二:一是泰勒(Taylor)提出了著名的科学管理理论;二是产生了若干将数学模型应用于管理的成果,如爱尔朗(Erlang)提出的排队模型和哈瑞斯(Harris)提出的EOQ存贮模型等。

作为一门独立的学科,管理科学产生于20世纪40年代。首先是在40年代初期的二次世界大战中,英国为了解决雷达站同整个防空作战系统的协调配合问题,成立了由多学科科学家组成的研究工作小组。工作小组卓有成效的工作使得在英军每个指挥部都成立了这样的小组。随后在美国军队中也建立了类似的组织。这些小组在确定扩建舰队规模、开展反潜艇战的侦察和组织有效的对敌轰炸等方面做了大量研究,为取得反法西斯战争的胜利及管理科学各有关分支的建立作出了贡献。对于这些小组的研究工作,英国称之为operational research,美国称之为operations research,即我国后来译成的“运筹学”。

二次大战以后,运筹学的研究和应用由军方扩展到民间,这门学科的理论体系也不断完善。1950年,英国伯明翰大学正式开设了运筹学课程,同年,第一本运筹学杂志《运筹学季刊》(O. R. Quarterly)于英国创刊。1951年,美国的莫尔斯(P. M. Morse)和金博尔(G. E. Kimball)合著的《运筹学方法》一书正式出版。1952年,美国运筹学会成立,并于同年出版了运筹学杂志(Journal of ORSA)。所有这些,标志着这门学科基本形成。

50年代以后,随着电子计算机技术的迅速发展,运筹学中的很多方法,如线性规划、动态规划等由于能够更加方便地求解而被进一步应用于实际管理系统的优化问题中。至50年代末,美国已有约半数的大公司在自己的经营管理中应用了运筹学,主要用于生产计划、物资储备、资源分配、设备更新等方面的管理决策。运筹学这门学科,也因其与管理决策的密切联系,以及在解决管理决策实际问题中逐渐形成了一整套系统、定量的科学方法,而被广泛称之为“管理科学”。管理科学的一些主要分支的产生年代如图1.2。

管理科学经过半个多世纪的发展历程,不仅在理论研究上具有了相当的深度和广度,而且其方法与信息技术相结合,形成了各种商业应用软件,使其具有更加广泛的应用。我国从50

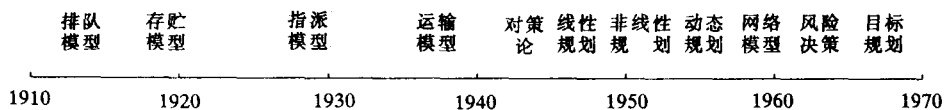


图1.2

年代中期开始研究这门学科以来,也取得了许多令世人瞩目的研究成果。全国各高等院校的经济管理类专业均普遍把这门学科作为主干课程列入教学计划,工商管理硕士(MBA)的教学计划中也把这门学科定为核心课程。我国还于1999年8月在北京成功地举办了第15届国际运筹学会联合会学术大会。相信这门学科必将在21世纪的知识经济与信息时代中进一步展现其生命力并不断得到发展。

1.1.3 管理科学的基本特性

管理科学具有以下的一些基本特性。

1. 以管理决策为基点

管理科学是一门为管理决策提供科学方法的学科。管理决策中的实际问题,既是管理科学产生的源泉,又是管理科学的应用对象。表1.1例举出管理科学方法直接应用于企业管理决策问题的例子。

表1.1

管理科学方法	应用于企业管理决策的典型例子
线性规划	生产结构优化
非线性规划	投资组合优化
0-1 规划	选址问题
动态规划	资源分配问题
网络计划	工程计划优化
排队论	服务系统优化
存贮论	订货库存管理
风险型决策	机会选择

2. 以科学方法论为依据

管理科学是一门将“科学”方法论应用于管理决策的学科。所谓科学方法论是指进行科学研究的一般程序与方法,一般步骤如图1.3。

明确问题→观察→提出假设→设计试验→完成试验→接受或拒绝假设

图1.3

应用管理科学方法解决管理决策中实际问题的一般程序也可分为类似的6个步骤,即明确问题、将问题归类、建立数学模型、求解模型、结果分析与模型检验、实施。这将在本章下一节详细阐述。

3. 以系统观点为指导

管理科学是以系统观为指导的一门技术科学。系统观对管理科学有两方面指导作用。一方面是用系统的观点看问题,将所研究的事物看做一个系统,看做一个具有特定目标、功能、结

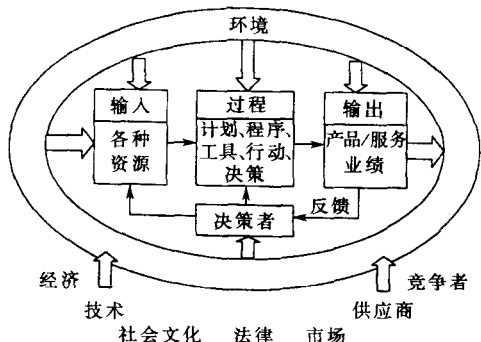


图1.4

构和环境的系统,且系统与环境之间还应有输入和输出。图 1.4 给出了一个企业系统的例子。另一方面是对系统的“整体优化”。如果把管理科学多分支的丰富内容体系比作一棵大树,那么大树的主干就是“最优化”,大树的分支就是最优化在各个角度上的表现,大树的树根扎根于基础科学的土壤,而大树的果实则表示在各管理决策领域中的应用成果。可以说,整个管理科学方法的核心思想就是“整体优化”,而这正是系统观的精髓之一。

4. 以数学模型为主要工具

管理科学是一门以定量分析为主、以各种数学模型为主要工具的学科。数学模型是现实系统的一种简明映象,以数学模型为主要工具的定量分析方式不仅能够使人们对系统的认识更加深刻,而且便于使用计算机,从而能够节约费用和时间。管理科学的每一个分支都有自己特定的数学模型和基于模型计算的分析方法。因此,学习管理科学方法以及学会运用管理科学方法去解决实际问题的一个关键是学会建立各种数学模型。这将在本章下一节中阐述。

1.2 管理科学的工作程序

应用管理科学方法去解决管理决策中实际问题的一般工作程序可分为 6 个步骤,如图 1.5 所示。

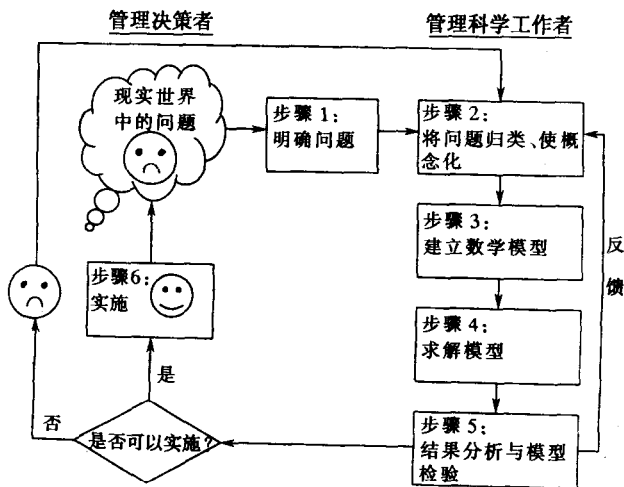


图1.5

1.2.1 步骤 1: 明确问题

运用管理科学方法去解决管理决策实际问题的首要步骤是明确“问题是什么”,从而正确

地定义问题。这就需要与管理决策者进行沟通,对他提供的问题状况进行认真研究和系统分析。要明确究竟解决什么事情?为此必须做出什么决策?最终要达到什么目标?有哪些不可控的重要影响因素等等。

1.2.2 步骤2:将问题归类、使概念化

问题明确以后,还要对其做类型判别,即先看它是否属于能用管理科学方法解决的问题。如果是,再看它是属于哪一类管理科学问题,或者说它适合于用哪一类管理科学方法解决。下面例举了一些典型的管理科学问题类型。

1)分配问题 这类问题产生于:①存在若干要完成的任务;②存在两个以上完成这些任务的方案;③为完成任务所需的资源是稀缺的。问题是寻求资源的最佳利用方案,以使总效益最大。

2)竞争问题 这类问题产生于:决策行动的结局不仅依赖于决策者自己,而且依赖于竞争对手的行动,每个竞争者都想取胜。问题是寻求使每个竞争者都能接受的总损失最小的行动方案。

3)运输与指派问题 运输问题产生于:将某种物品(如矿产品或粮食)由若干产地运往若干需求地,问题是寻求使总运输成本最小的调运方案。还有一些问题(如生产安排问题)也可归为运输问题。指派问题是一种特殊的运输问题。它产生于:将若干项任务分派给若干人,每项任务由一个人完成,每个人也只能完成一项任务,问题是寻求使总效率最高的分派方案。

4)库存控制问题 原材料、资金、成品、人才等的适当储存或储备水平,往往是许多组织中的一个主要问题。尽管储存需要付出成本,但却可以从防止缺货损失及大批量购买的价格折扣中获益。库存控制问题是确定适当的订货间隔和订货数量,以使总的费用最低。

5)网络与工程计划问题 网络问题的种类很多,如寻求网络中两点的最短路和合理安排网络上的流量使总的通过量最大。复杂工程项目的计划与控制也可化为网络问题,求得工程的最小工期和关键工序。

6)排队与服务系统优化问题 当顾客为寻求某种服务而到达服务系统时,往往会产生排队现象,服务系统为减少排队现象而提高服务速率或增加系统容量需付出各种成本,一旦系统空闲又将受到损失。问题是如何合理地设置系统的服务速率及容量,以兼顾系统与顾客双方的利益。

7)预测问题 这是管理中经常遇到的问题,即希望知道在不同条件下系统将产生怎样的行为状态。

每一类管理科学问题中都包含着十分丰富的内容或可再划分为各种类型。根据问题的类型,可选择适当的管理科学方法来解决。当方法选定后,还要将问题概念化,即用所选定方法中的术语重新描述问题,或者说将方法中的要素与问题对号,为建立数学模型做准备。

1.2.3 步骤3:建立数学模型

建立数学模型是管理科学方法的关键步骤,具体内容主要是在问题概念化的基础上进一步确定模型的构成要素以及它们之间的联系,用变量和数学关系式表达出来,形成数学模型。

1. 模型的构成要素

一般来说,模型的最基本构成要素由三部分组成,即结果变量、决策变量和不可控变量。

结果变量反映了系统达成目标的有效性程度,它依赖于决策变量的取值,是一种相依变量。决策变量描述了决策问题中必须作出选择的要素,是一种可控的独立变量。不可控变量是指系统环境中对决策有重要影响但不可控的因素,它也是独立变量。表 1.2 给出这三种变量的实际例子。

表 1.2

领 域	决策变量	结果变量	不可控变量
金融投资	投资数量 投资期限 投资时机	总利润 收益率 每股净利	通货膨胀率 贷款利率 竞争
市 场 生 产	广告预算 产量 库存水平	市场份额 总收入 质量水平	可支配收入 市场价格 技术
财 会	审计计划 计算机使用	数据处理成本 错误率	法规要求 计算机技术
运 输 服 务	装运量 服务员数量	运输总成本 顾客的满意度	运送距离规定 服务需求

2. 模型的结构

模型的基本构成要素由数学关系式联系在一起,便形成数学模型。模型的一般结构如图 1.6 所示。

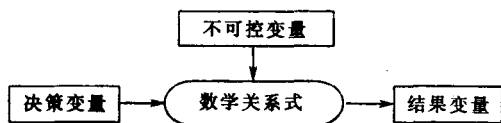


图1.6

管理科学的分支不同,模型的具体表现形式也不尽相同,其中最具有代表性的是数学规划模型。下面例举线性规划的例子说明数学模型的具体结构。

线性规划模型中的数学关系式有两种类型,即目标函数与约束条件。以一个生产结

构优化问题为例,它的目标函数表达式为

$$R = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

式中, R 表示生产总收入; x_1 和 x_2 表示两种产品的产量; p_1 、 p_2 表示两种产品的价格。目标是极大化总收入。为达成目标要受到来自各方面的约束,如市场需求量的约束,表示为

$$x_1 + x_2 \leq 50$$

这里,50 是两种产品的总需求量上限。此模型的结构如图 1.7 所示。

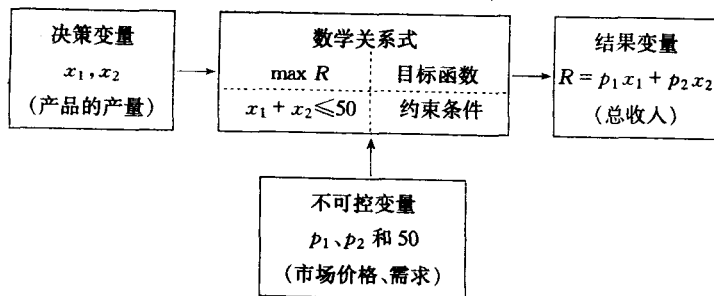


图1.7

1.2.4 步骤 4: 求解模型

管理科学的模型种类很多,解的性质及其求解方法各异。“最优解”是解的主流类型,它是在模型的所有可行解中寻找出最优的一个。除了“最优解”之外,还有其他一些解的类型,如“满意解”和“描述性的解”。“满意解”是指在模型的次优解或“各有所长”的一组解中使决策者满意的解;“描述性的解”相应于描述性的模型,该类模型的目的主要是描述系统在不同条件下的状态,可用于预测和分析系统的行为特征。相对于“最优解”,这些其他类型的解不妨称为“非最优的解”。

求解方法可分为“数值的”和“分析的”两种类型。数值方法一般是通过用某种模式一步一步搜寻并不断改进解的过程来求解,而分析方法是由数学公式一步求出解。图 1.8 给出管理科学主要分支模型的解及其解法的例子。

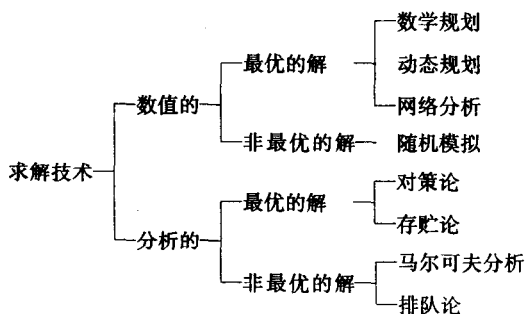


图1.8

1.2.5 步骤 5: 结果分析与模型检验

求得模型解以后,还要对它进行分析,同时要检验模型的正确性。分析和检验的内容首先是看结果与实际情况是否相符,模型是否能够正确地反映实际问题,具体方法是可将不同条件下的数据(如不同时期的数据)代入模型看相应的解是否符合实际。其次要分析模型中的参数发生小范围变化时对解的影响。这一分析称做灵敏度分析。如果解对参数变化的反应不过于灵敏,则在实际中可能会更容易应用。

经过结果分析与模型检验,如果认为模型不能很好地反映实际问题,则要重新对问题进行分析并适当修改模型。

1.2.6 步骤 6: 实施

对模型及其解分析和检验后,还要对其实际意义给以解释并将其提交给管理决策者。如果管理决策者认为可以实施,则管理科学的分析结果得以实现;如果认为仍不能实施,则要再次对问题进行分析并适当修改模型。

1.3 管理科学的主要内容及本书结构

1.3.1 管理科学的主要内容

管理科学是一门具有多分支内容的极其丰富的学科,主要内容可以归纳成下面的几大部

分。

1. 规划技术

规划技术主要是指数学规划技术,包括线性规划、非线性规划、整数规划和多目标规划等,是管理科学中最有代表性的主体内容。数学规划是在一定约束条件下寻求使目标极大化或极小化的最优解或满意解,其实际背景是在有限的资源条件下通过合理计划而实现总效益的最大化问题。

2. 图与网络技术

图与网络技术包括图与网络分析以及网络计划,是研究图与网络问题的分析与优化的管理科学分支。主要方法是基于图的基本理论对网络问题进行分析,求得使网络效益最大(如最短路、最大流、最短的项目工期、成本最低的项目工期)的最优解。

3. 决策技术

决策技术包括风险型决策、库存决策、多阶段决策和多目标决策等。其中风险型决策是研究在不确定条件下进行方案选择问题的管理科学分支,主要方法是基于收益或效用以及概率的基本理论,对方案的平均效益进行比较,求出最优方案。库存决策是研究库存计划与订货策略的管理科学分支,主要方法是建立各种类型的存贮模型,求得使总成本最少的最优解。多阶段决策又称动态规划,是研究多阶段决策问题的管理科学分支,主要方法是通过将问题划分阶段并逐段递推求解,最终求得使总效益最大的各阶段最优解。多目标决策是研究多准则评价与决策问题的管理科学分支,从各种不同的角度,采用定性与定量相结合的分析方法,对系统进行综合评价或排序。

4. 对策分析技术

对策分析技术是研究在对抗与竞争条件下的决策问题的管理科学分支,主要方法是建立各种类型的对策模型,求得使双方或多方达到平衡的最优解。其基本类型是二人有限零和对策及二人有限非零和对策。

5. 随机运筹技术

随机运筹技术包括排队系统分析、马尔可夫分析和随机模拟技术等。排队系统分析又称排队论,是研究随机服务系统的性能、状态及优化问题的管理科学分支,主要方法是建立各种类型的排队模型,求得在各种条件下反映系统性能的描述性的解。马尔可夫分析是研究由随机变量现时的运动状况来分析预测该变量未来运动状况的管理科学分支,主要方法是基于概率和随机过程的理论,通过系统状态和转移规律求得未来的状态。随机模拟技术又称系统仿真,是研究对静态离散的随机系统进行模拟分析的管理科学分支,主要方法是通过随机数和系统的有关概率分布对系统进行状态模拟。

1.3.2 本书的结构

本书由引论、规划技术、图与网络技术、决策技术、对策分析技术和随机运筹技术六部分组成,共 15 章,结构如图 1.9 所示。

从各部分内容的知识衔接关系来看,第一部分引论和第二部分规划技术是全书的基础内容,其他各部分内容大部分是并列的。图 1.10 给出本书的阅读顺序,其中的数字表示章的序号。

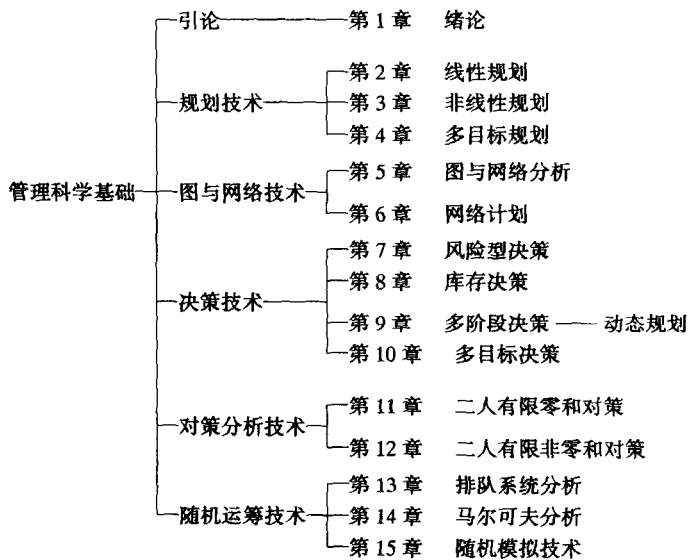


图1.9

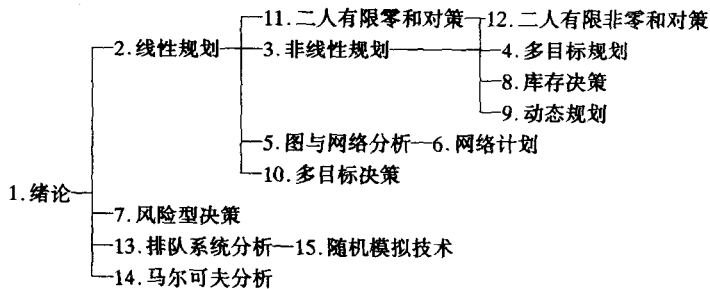


图1.10

II 规划技术

第2章 线性规划

2.1 线性规划的模型与图解法

2.1.1 问题的引入

要想在工农业生产、交通运输、商业贸易等各方面提高效益,有两种途径:一是革新技术;二是改进生产组织与计划,即合理安排有限的人力和物力资源,最合理地组织生产过程。数学规划能够为更好地配置资源、组织生产提供理论和方法,包括线性规划、非线性规划、整数规划、多目标规划等很多分支。其中线性规划是在现代管理中应用最广、理论比较完善的一个部分。随着电子计算机的发展,数学规划在现代化管理中的重要性日益明显。

问题1 某工厂计划生产甲、乙两种产品,生产1 kg 甲产品需耗煤9 t、电力4 kW·h、油3 t;生产1 kg 乙产品需耗煤4 t、电力5 kW·h、油10 t。该工厂现有煤360 t、电力200 kW·h、油300 t。已知甲产品每千克售价为7万元,乙产品每千克售价为12万元。在上述条件下决定生产方案,使总收入最大,具体数据如表2.1所示。

表 2.1

每 千 克 耗 量 资 源	产 品		资源限量
	甲	乙	
煤(t)	9	4	360
电(kW·h)	4	5	200
油(t)	3	10	300
单位价格(万元)	7	12	

为求解上述问题,设 x_1 为甲产品生产量, x_2 为乙产品生产量,称 x_1 和 x_2 为决策变量,向量 $[x_1 \ x_2]^T$ 表示一个生产方案,称之为决策变量向量,简称决策变量。由于煤、电、油资源的限制,生产方案 $[x_1 \ x_2]^T$ 的取值也必受到一定限制。例如,采取生产方案 $[x_1 \ x_2]^T$,耗煤总量为 $9x_1 + 4x_2$,它不能超过煤资源总量。这样所取的生产方案 $[x_1 \ x_2]^T$ 必须满足条件

$$9x_1 + 4x_2 \leq 360 \quad (\text{煤资源限制})$$

同样, $[x_1 \ x_2]^T$ 必须满足条件

$$4x_1 + 5x_2 \leq 200 \quad (\text{电资源限制})$$

$$3x_1 + 10x_2 \leq 300 \quad (\text{油资源限制})$$

同时, x_1 和 x_2 不能取负数, 即须满足

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (\text{非负限制})$$

所以, 一个可行生产方案 $[x_1 \ x_2]^T$ 必须满足条件

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \leq 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 300 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

式(2.1)称为一组约束条件。

对于每一个可行生产方案 $[x_1 \ x_2]^T$, 均有一个由这个方案产生的总收入 z 与之对应, 即有

$$[x_1 \ x_2]^T \rightarrow z = 7x_1 + 12x_2$$

称 $z = 7x_1 + 12x_2$ 为目标函数, 并由它衡量各生产方案的优劣。

综上所述, 对问题 1 求解最优方案的问题可由下列数学模型描述:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 7x_1 + 12x_2 \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \leq 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 300 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

式(2.2)表示在所有满足约束条件式(2.1)的可行方案 $[x_1 \ x_2]^T$ 中, 去寻找收入 z 最大的方案 $[x_1^* \ x_2^*]^T$ 。其中的 s. t. 是约束条件的符号, 也可以省略。式(2.2)称为线性规划模型, 它由三个基本要素组成: ①决策变量 $X = [x_1 \ x_2]^T$, 表示一个方案; ②约束条件式(2.1), 表示决策变量必须满足的条件; ③目标函数 $z = 7x_1 + 12x_2$, 表示决策变量 $[x_1 \ x_2]^T$ 优劣的数量指标。

由于式(2.2)中目标函数与约束条件均是线性的, 所以称此模型为线性规划模型。

例 2.1 某化学试剂公司生产两种显影液, 这两种产品每生产 1 L 的成本都为 3 元。根据订货合同, 在二周内化学试剂公司至少要生产出 30 L 的 A 产品和 20 L 的 B 产品。生产这两种显影液都需要一种易变质原料。这种原料现在库存量为 80 kg, 若两周内不使用则变质。每生产 1 L 的 A 产品需 1 kg 此原料; 每生产 1 L 的 B 产品需 2 kg 此原料。公司管理部门需要确定一个两周内成本最低的生产计划, 它至少要用尽库存 80 kg 的易变质原料, 必要时还可再订购此原料, 而且至少生产出 30 L 的 A 产品和 20 L 的 B 产品。

解 用线性规划模型求解。设 x_1 为生产 A 产品的数量; x_2 为生产 B 产品的数量。线性规划模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 + 3x_2 \quad (\text{成本}) \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 80 \\ x_1 \geq 30 \\ x_2 \geq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} & \begin{aligned} & (\text{原料}) \\ & (\text{A 产量}) \\ & (\text{B 产量}) \end{aligned} \end{aligned}$$

例 2.2 某大学计划早春时期在校园内草坪上施肥, 草坪需要的氮、磷、钾的最低数量以

及市场上销售的三种肥料的成份和价格如表 2.2 所示。

表 2.2

(每 1 000 kg)

元素	最低数量(kg)	肥料	氮含量(kg)	磷含量(kg)	钾含量(kg)	价格(元)
氮	10	I	25	10	5	10
磷	7	II	10	5	10	8
钾	5	III	5	10	5	7

这所大学可以根据需要不受限制地购买到各种肥料,混合后施放到草坪上,列出一个线性规划模型确定购买各种肥料的数量,使之总成本最低。

解 设 x_1 为购买肥料 I 的数量, x_2 为购买肥料 II 的数量, x_3 为购买肥料 III 的数量,则线性规划模型为

$$\begin{aligned} \min z &= \frac{10}{1\,000}x_1 + \frac{8}{1\,000}x_2 + \frac{7}{1\,000}x_3 \\ &\begin{cases} \frac{25}{1\,000}x_1 + \frac{10}{1\,000}x_2 + \frac{5}{1\,000}x_3 \geq 10 \\ \frac{10}{1\,000}x_1 + \frac{5}{1\,000}x_2 + \frac{10}{1\,000}x_3 \geq 7 \\ \frac{5}{1\,000}x_1 + \frac{10}{1\,000}x_2 + \frac{5}{1\,000}x_3 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.1.2 线性规划的一般模型与标准型

对于一般线性规划模型,目标函数可以求最大(如求利润最大),也可以求最小(如求成本最小),约束条件可以是“ $\leq$ ”,也可以是“ $\geq$ ”或“ $=$ ”型的。因此,一般线性规划模型可表示为

$$\begin{aligned} \max(\min) z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ &\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (\geq, =) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq (\geq, =) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (\geq, =) b_m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \end{aligned}$$

式中, $X = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ 为决策变量; $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 为目标函数; $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq (\geq, =) b_i$ 为资源约束条件($i = 1, 2, \cdots, m$); $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \cdots, n$) 为非负约束条件,称满足全部约束条件的决策变量为可行解,使目标函数为最大(或最小)的可行解称为最优解。

为了论述方便,把最大化、等式约束型的线性规划称为线性规划的标准型,即

$$\begin{aligned} \max z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ &\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$