

高等学校教材

边界层理论

东北电力学院 薛祖绳 主编

高等学校教材

边界层理论

东北电力学院 薛祖绳 主编

水利电力出版社

9c1
(京) 新登字115号

高等学校教材
边界层理论

东北电力学院 薛祖绳 主编

*

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
北京市地矿局印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 15.5印张 344千字

1995年5月第一版 1995年5月北京第一次印刷

印数 0001—1000册

ISBN7-120-02319-5/TK·322

定价8.85元

内 容 提 要

本书共六章，内容包括粘性流动的基本方程、边界层理论基础、层流边界层、紊流边界层以及边界层方程的数值解和应用实例。每章后附有一定数量的习题，并有答案，供读者练习。

本书可作为热能动力类专业和能源部门相近专业的本科生选修课教材和研究生的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

前 言

本书是根据能源部《1990~1992年高等学校教材编审出版计划》和1989年10月在重庆召开的高等学校热能动力类专业教学委员会流体力学及泵与风机教学组扩大会议上讨论的《边界层理论》编写大纲编写的,可用作热能动力类专业本科生选修课和研究生教材,也可供能源部门相近专业使用和工程技术人员参考。

全书共六章,第一章引言,介绍边界层理论的历史和发展,以及在能源、动力工程中的应用概述。第二章介绍粘性流体运动的基本方程组和一些层流问题的精确解例。第三章是边界层理论的基础,介绍边界层的基本概念、基本性质和基本方程。第四、五章分别介绍不可压缩流体和可压缩流体沿平板和有压强梯度的层流边界层和紊流边界层,并对温度边界层和浓度边界层也作了一定的介绍。第六章边界层方程的数值解,着重介绍边界层方程的有限差分法,并提供了应用实例。

读者在学习本书以前,除已学过工程流体力学、工程热力学和传热学外,在数学上要求已掌握微积分、微分方程、矢量和张量分析的基本知识,并对数值计算方法和算法语言有所了解。本书中对主要方程和公式都作了详细的推演。在边界层问题的解法上着重于实际工程上的应用。本书各章附有一定数量的习题,并有答案,有助于读者在解题过程中加深对基本内容的理解。

本书由东北电力学院薛祖绳教授主编,杨善让教授参编。其中第一章至第五章由薛祖绳编写,第六章由杨善让编写。山东工业大学裘烈钧教授任主审,提出许多宝贵意见和建议,在此表示衷心的感谢。

限于编者水平,本书中难免有缺点和错误,恳请读者批评指正。

编 者

1992年3月

主要符号一览表

一、拉丁字母

a	导温系数, 热扩散系数 (m^2/s)	l	长度 (m)
b	宽度 (m), 无量纲绝热壁温度	L	特征长度, 形状参数
Br	布林克曼数	m_i	化学组分 i 的质量份数
$B_x = \rho F_x$	沿 x 方向的单位体积内的质量力 (N/m^3)	Ma	马赫数
c	音速 (m/s)	$\vec{n}$	单位法向矢量
c_p	定压比热 [$\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$]	N_A	组分 A 的扩散通量 [$\text{kmol}/(\text{m}^2\cdot\text{s})$ 或 $\text{kg}/(\text{m}^2\cdot\text{s})$]
c_v	定容比热 ($\text{J}/\text{kg}\cdot\text{K}$)	Nu	努谢尔数
c	浓度 (kmol/m^3 或 kg/m^3)	p	压强 (N/m^2)
c_A	组分 A 的浓度 (kmol/m^3 或 kg/m^3)	P	无量纲压强梯度
c_f	壁面摩擦阻力系数	$[P]$	应力张量 (N/m^2)
c'_f	局部壁面摩擦阻力系数	Pe	贝克列数
c_M	力矩系数	Pr	普朗特数
D	壁面摩擦阻力 (N), 扩散强度 [$(\text{kg}/(\text{m}^2\cdot\text{s}))$]	Pr_i	紊流普朗特数
D_{AB}	组分 A 在组分 B 中的二元分子扩散系数 (m^2/s)	q	单位面积的热通量 (W/m^2)
e	内能 (J/kg)	q_1, q_2, q_3	正交曲线坐标系坐标
$\vec{e}_i$	正交曲线坐标系中的单位坐标矢量	Q	体积流量 (m^3/s), 对流换热量 (W)
Ec	埃克特数	r	半径 (m), 恢复因数
$[E]$	应变率张量 ($1/\text{s}$)	r, θ, z	圆柱面坐标系坐标
F	质量力 (N)	r, θ, φ	球面坐标系坐标
G	紊流能量产生率 ($\text{J}/\text{m}^3\cdot\text{s}$)	R	半径 (m), 气体常数
Gr	葛拉晓夫数	$Ra = GrPr$	雷利数
h	高度、距离 (m), 焓 (J/kg)	Re	雷诺数
h_1, h_2, h_3	拉梅系数	R_i	通过化学反应组分 i 的产生率 [$\text{kg}/(\text{m}^3\cdot\text{s})$]
H	形状系数, 总焓 (J/kg)	S	面积, 无量纲总焓, 无量纲温度函数, 源项
$H_{12} = \delta_1/\delta_2$	速度剖面的第一形状参数	Sh	单位体积内的热产生率 (W/m^3), 舍伍德数
$H_{32} = \delta_3/\delta_2$	速度剖面的第二形状参数	Sc	施米德数
$[I], I_{ij}$	单位张量	t	时间, 纵向弯曲参数
J	动量通量 ($\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}$)	T	温度 (K)
J_i	化学组分 i 的扩散通量 [$\text{kg}/(\text{m}^2\cdot\text{s})$]	u, V	速度 (m/s)
k	导热系数 [$\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$]	u_x, u_y, u_z	直角坐标轴方向的速度分量 (m/s)
k_i	紊流导热系数 [$\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$]	u_r, u_θ, u_z	圆柱面坐标轴方向的速度分量 (m/s)
k_c	对流质量系数 (m/s)	u_r, u_θ, u_φ	球面坐标轴方向的速度分量 (m/s)
K	边界层中速度剖面的形状参数, 紊流动能 (J/kg)	u_1, u_2, u_3	正交曲线坐标轴方向的速度分量 (m/s)
		V^*	切应力速度 (m/s)
		$\mathcal{V}$	体积 (m^3)
		x, y, z	直角坐标系坐标

二、希腊字母

α	放热系数 $[W/(m^2 \cdot K)]$, 松弛因子
β	热膨胀系数 $(1/K)$
$\gamma = c_p/c_v$	绝热 (等熵) 指数
γ_0	壁面上无量纲的总焓梯度
Γ	扩散系数 $[kg/(m \cdot s)]$, 形状参数, 物体边界
Γ_k	紊流动能扩散系数 $(kg/m \cdot s)$
Γ_ϵ	紊流能量耗散率扩散系数 $(kg/m \cdot s)$
δ	间隙, 边界层厚度 (m)
δ_1	位移厚度 (m)
$\delta_2 = \delta^*$	动量损失厚度 (m)
δ_3	能量损失厚度 (m)
δ_v	速度边界层厚度 (m)
δ_T	温度边界层厚度 (m)
δ_c	浓度边界层厚度 (m)
δ_H	焓厚度 (m)
δ_{ij}	单位张量
ϵ	应变率 $(1/s)$, 紊流能量耗散率 (W/kg)
ϵ_{ii}	法向应变率 $(1/s)$
ϵ_{ij}	切向应变率 $(1/s)$
ϵ_m	紊流粘性系数 (m^2/s)
η	无量纲距离, 福克纳-斯肯变换
θ	无量纲温度, 动量损失厚度
κ	紊流中的经验常数 $(l = \kappa y)$
A	层流边界层中速度剖面的波耳豪森形状参数
μ	动力粘性系数 $[kg/(m \cdot s)]$
μ_t	紊流动力粘性系数 $[kg/(m \cdot s)]$
ν	运动粘性系数 (m^2/s)
ρ	密度 (kg/m^3)

τ_{ij}	切向应力 (N/m^2)
$[\tau]$	粘性应力张量 (N/m^2)
Φ	粘性耗散函数 (W/m^3)
ϕ	无量纲函数, 通用形式因变量
ψ	流函数
ω	圆频率 $(1/s)$, 涡量, 粘性-温度关系的指数

三、下 标

a	绝热
ad	绝热
aw	绝热壁面
cr	临界
e,e	边界层外边界势流, 计算网格结点
l	层流
m	平均
n	法线方向, 计算网格结点
o	起始点, 驻点 (滞止点), 原点
S	分离点
s	计算网格结点
t	紊流
tr	转换点, 过渡点
w,w	壁面, 计算网格结点
∞	无穷远, 自由来流

四、上 标

—	时均 (时间平均)
~	坐标变换
'	微分, 相对于时均值的紊流脉动
*	参考温度, 无量纲量

目 录

前 言

主要符号一览表

第一章 引言	1
第一节 边界层理论的历史和发展	1
第二节 边界层理论在能源、动力工程中的应用	3
第二章 粘性流动的基本方程	5
第一节 连续性方程	5
第二节 纳维尔——斯托克斯方程	6
第三节 能量方程	17
第四节 纳维尔——斯托克斯方程的精确解例	20
习题	34
第三章 边界层理论的基础	37
第一节 边界层的基本概念	37
第二节 边界层的微分方程	40
第三节 边界层的动量积分方程	46
第四节 边界层的能量积分方程	47
第五节 边界层的分离和转捩	50
习题	54
第四章 层流边界层	56
第一节 沿平板的不可压缩层流边界层——布拉修斯解	56
第二节 有压强梯度的不可压缩层流边界层的近似解法	61
第三节 层流温度边界层的微分方程	68
第四节 强迫流动中的温度边界层	71
第五节 自由流动中的温度边界层	80
第六节 浓度边界层的扩散方程	84
第七节 沿平板的不可压缩层流浓度边界层	85
第八节 沿平板的可压缩层流边界层	87
第九节 有压强梯度的可压缩层流边界层	92
第十节 轴对称层流边界层	100
习题	105
第五章 紊流边界层	108
第一节 紊流的基本概念	108
第二节 紊流平均运动的微分方程	110
第三节 沿平板的不可压缩紊流边界层	113
第四节 有压强梯度的不可压缩紊流边界层	118
第五节 可压缩紊流边界层的微分方程	125

第六节 沿平板的可压缩紊流边界层	128
第七节 有压强梯度的可压缩紊流边界层	134
第八节 轴对称紊流边界层.....	136
习题	139
第六章 边界层方程的数值计算	141
第一节 边界层方程的数值计算方法	141
第二节 有限差分法基础	142
第三节 边界层方程的有限差分解	172
第四节 可压缩边界层流动解及其程序	194
第五节 边界层方程的有限元解	204
第六节 边界层方程的有限分析解	216
附录	220
附录一 紊动能方程(K 方程)的推导.....	220
附录二 耗散方程(ε 方程)的推导.....	222
附录三 求解二维层流和紊流边界层方程耦合解程序	225
参考文献	236

第一章 引言

第一节 边界层理论的历史和发展

1755年由欧拉(L. Euler 1707—1783)建立的理想流体的运动方程奠定了流体力学的基础,后经拉格朗日(J. L. Lagrange 1736—1813)、拉普拉斯(P. S. Laplace 1749—1827)等在数学解析方法上进一步的发展和完善,形成了流体力学的一个重要分支——理论流体力学。它是运用严密的数学工具研究无粘性的理想流体流动问题,但由于忽略了流体实际存在的粘性作用,所以根据理论流体力学纯数学分析得到的理论计算与实际结果不尽相符,甚至差别很大。例如与欧拉同一时期的达朗贝尔(D' Alembert 1717—1783)用理论确定物体在理想流体中运动的阻力等于零这个出乎意料的结果,被称为达朗贝尔疑题。由此可见,在研究阻力问题时,理想流体理论已无能为力。19世纪中随着航海、水利工程等的迅速发展,流体力学的另一个重要分支,研究不可压缩粘性流体流动的水力学得到很大的发展,它是建立在大量实验测量的基础上。当时如哈根(G. Hagen)、泊肃叶(J. Poiseuille)、雷诺(O. Reynolds)等用实验研究水和其他粘性流体在管道和槽渠中流动时的阻力和压强损失问题,得到的有关粘性流体的实验研究成果,有助于解决某些工程实际问题。但由于水力学在理论指导上的不足,由实验成果得出的经验公式和半经验理论公式有一定的局限性。于是在19世纪中叶产生了粘性流体运动的理论,1827年纳维尔(M. Navier)在欧拉运动微分方程中加上粘性项,第一个得到粘性流体运动微分方程,1846年斯托克斯(G. Stokes)严格地导出了这个方程,称为纳维尔—斯托克斯方程,简称N—S方程。虽然N—S方程对粘性流体流动问题的研究分析有所帮助,但对这个方程数学上的求解是十分复杂和困难的。1851年斯托克斯对N—S方程作了某些简化,略去方程中的惯性项,也就是在非常缓慢的流体流动条件下,计算出球体在流动的粘性流体中所受到的阻力。

到20世纪初,航空工业的发展,需要解决粘性流体中较大速度的物体运动问题,促使粘性流体运动的理论大大地向前推进。1904年普朗特(L. Prandtl 1875—1953)在德国海德堡(Heidelberg)第三届国际数学家学会上宣读题为“关于摩擦极小的流体运动”的论文,建立了边界层理论。他根据对水槽中水流实验的观测分析,提出了边界层的概念:粘性极小的流体绕物体流动时,在紧靠物体附近存在着一层极薄的边界层,其中粘性起着很大的影响。而在边界层外,流体中的粘性可以忽略不计,可认为是理想流体。由于边界层极薄,经简化N—S方程,得出普朗特边界层方程。对过去不可理解和难以解答的现象,如流体阻力问题,给予明确的解答。普朗特建立的边界层理论,改变了长期以来理论流体力学和水力学相互脱节的状况,将理论与实践紧密地联系在一起,形成了理论与实验并重的现代流体力学。

1907年布拉修斯(H. Blasius)成功地应用边界层理论计算在流体中运动物体的摩擦阻力。1921年卡门(Th. von Kármán)和波耳豪森(K. Pohlhausen)提出了边界层动能积分方程,以计算边界层问题,这个方程经霍尔斯坦—博伦(H. Holstein—T. Bohlen 1940)和瓦茨(A. Walz 1941)进行简化和改进,到现在还被广泛应用。另外边界层动能积分方程和热能积分方程分别由莱本森(L. S. Leibenson 1935)和弗兰克尔(F. I. Frankl 1934)提出。这三个边界层的近似计算方法使边界层理论在工程界中很快地推广开来。1925年普朗特提出的混合长度理论和1930年卡门提出的相似性理论,将边界层理论推广到紊流边界层、射流和物体后的尾迹流中去。从层流向紊流的转捩现象是流体动力学中的基本现象。早在19世纪末雷诺就首先对转捩现象进行了研究。1914年普朗特做了著名的圆球实验,正确地指出:边界层中的流动可以是层流的,也可以是紊流的。还指出边界层分离的问题,因此计算阻力的问题是受这种转捩支配的。从层流向紊流的转捩过程的理论研究,是以雷诺的假设为基础的,即承认紊流是由于层流边界层产生不稳定性的结果。1921年普朗特开始进行转捩的理论研究,1929年获得了成功。当时托尔明(W. Tollmien)从理论上算出了零冲角平板转捩的临界雷诺数,后被别人所进行非常仔细的实验所证实。稳定性理论能够考虑到对转捩有影响的压强梯度、抽吸、马赫数和传热等许多因素。这个理论已得到很多重要的应用,如设计阻力非常小的层流翼型(或叶型)。

1904年普朗特发表边界层理论,除解决了定常平面边界层问题外,还解决了最简单的旋转轴对称的空间边界层问题,而一般的空间三维边界层问题虽然列维—齐维他(T. Levi-Civita)在1929年早已提出,但长期以来,还是靠实验方法进行研究。塞尔斯(W. R. Sears 1954)、莫尔(F. K. Moore 1956)、施里希廷(H. Schlichting 1961)、柯克—哈尔(J. C. Cooke—M. G. Hall 1962)相继发表了关于三维边界层的综述文章,柯姆普斯迪—海特(N. A. Cumpsty—M. R. Head 1967)研究了三维紊流边界层的问题,但由于许多三维边界层流动的图象和物理特性太复杂,长期以来难以进行数值处理。目前所有的三维边界层的理论方法距离实际应用还很远。

在20世纪的初期和中期,随着航空用涡轮机械制造以及现代的火箭和人造卫星喷气推进技术发展,可压缩流动中的边界层理论也得到了迅速的发展。在可压缩流边界层中除速度边界层外,还有温度边界层。1910年普朗特把边界层的概念应用于热传递,1921年波耳豪森首先求得平板层流温度边界层的近似解,后来奥斯特勒克(S. Ostrach 1953)作出更精确的计算。由于可压缩流边界层方程组是非线性偏微分方程,求解仍很困难。密塞斯(R. von Mises 1927)、卡门—钱学森(1938)、克罗柯(L. Crocco 1942)等设法通过坐标变换,把可压缩层流边界层方程变换成为与不可压缩层流边界层相近似的形式,以后伊林沃思(C. R. Illingworth 1946)、霍华斯(L. Howarth 1948)和史土瓦逊(K. Stewartson 1949)作了某些改进,致使可压缩层流边界层问题较易进行数值计算。而对于可压缩紊流边界层的研究还限制在象普朗特混合长度理论等的半经验理论基础上,并对压缩性的影响作某些假设,德律斯特(E. R. Driest 1951)首先在这方面作了研究。以上这些研究工作对可压缩边界层理论的进一步发展起了很大的推动作用。

第二节 边界层理论在能源、动力工程中的应用

在石油、煤炭和动力工程中，到处都存在着粘性流体的流动。研究边界层理论的目的，在于研讨分析产生阻力损失的机理，计算阻力损失量和减少阻力损失的措施，以及计算热传递，研究加强、减弱和改善热传递的问题。从而设计出压强损失小的管道网和阻力小的流体机械，以达到节约能源，提高经济效益的目的。因此，边界层理论是研究内流（管道内和流体机械内的流动）和外流（绕机翼、叶栅等物体的流动）的一个有力工具。

粘性流体在管道中流动，在管壁上有一层与层流边界层相类似的层流底层，为了减少管道阻力损失可用改变层流底层的内部结构，如减少层流底层内的速度梯度和增大层流底层的厚度等，以减少壁面切应力，从而达到减阻的目的。这两个措施对层流边界层同样适用。

理论研究和风洞试验结果指出涡轮叶栅流动损失的主要部分是由于真实流体具有粘性，在叶片表面和环形通道的端壁上形成边界层，因而引起叶型损失和端部损失，这两项损失占叶栅总损失的70%~80%。叶型损失（二维平面叶栅）包括：

- （1）叶型表面边界层的摩擦阻力损失；
- （2）叶型上边界层分离的压差损失；
- （3）出口边后的尾迹损失。

端部损失（三维空间叶栅）包括：

- （1）叶片环形通道上下端壁面边界层的摩擦阻力损失；
- （2）上下端壁面附近二次流动，使边界层分离的涡流损失。另外叶栅损失还包括在局部超音速区域内由于激波及其与边界层相互干涉作用而产生的波阻损失等。

叶型损失可应用边界层理论进行数值计算，若单独求叶型的摩擦阻力损失可以通过对叶型表面边界层的厚度的求解而得到。叶型上边界层分离的分离点和压强分布可通过边界层的动量积分方程来确定。

叶轮机械中三维、不对称、可压缩流和紊流边界层的计算问题是边界层理论中最困难的课题。环形边界层是一个三维问题，目前所用的计算方法是把它作为二维问题处理，应用边界层动量积分方程来求解；即使这样，其计算方法还是十分复杂，因此在保证一定精确度的前提下加以简化，以便实际使用。由于叶栅中流动的复杂性，理论方法还不足以精确计算叶栅的端部损失。叶栅的波阻损失可以用边界层理论研究其物理机理，但目前对激波的理论计算还不完善，因此从理论上计算激波区域中边界层内的极其复杂的流动过程是十分困难的。这部分损失的确定，是结合边界层理论的近似分析，以叶栅风洞试验为基础，研究粘性流体在叶栅中的空间流动，通过对大量叶栅试验数据的分析而求得。

减少叶型阻力损失可采用控制边界层的方法，其中有采用层流叶型保持层流边界层，以减少摩擦阻力损失；采用流线形叶型防止边界层发生分离以减少压差阻力损失，以及改变边界层性质的抽吸、吹除等控制边界层措施。

为适应经济地开发和利用能源以及节约能量消耗的需要，强化传热技术从本世纪60年

代以来,在动力工程中也得到推广应用,以设计和制造出各类高性能的换热设备。例如由于燃气轮机功率的不断提高,进入涡轮前的燃气工作温度也大幅度地提高。为了保证燃气轮机有足够长的工作寿命和在高热效率下安全运行,就需要采用先进的冷却技术,进行强化冷却,以降低叶片和其他高温部件的壁面温度。对于评价冷却中强化传热措施的性能,往往用强化与无强化的努谢尔数比 (Nu/Nu_0) 作为准则。在边界层中,由于努谢尔数与壁面摩擦阻力系数之比同雷诺数成正比 (称为雷诺比拟),因此可把传热问题化为壁面摩擦问题来处理。

在强化传热技术中,有利用人工粗糙表面以增强传热,这是由于粗糙表面可以增加紊流边界层中的紊流度、减少层流底层的厚度,以降低对流换热的热阻,从而大大提高紊流状态下的换热强度。

第二章 粘性流动的基本方程

第一节 连续性方程

在流场中任取一控制体,其控制体积为 $\mathcal{V}$ 、控制封闭面积为 S ,如图2-1所示。若控制体内没有源或汇,则根据质量守恒定律,在单位时间内从控制面流出和流入控制体的流体质量之差等于在同一时间内控制体内由于密度的变化引起流体质量的变化率。写成

$$\iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} \quad (2-1)$$

式中负号表示:当流出大于流入,则等式左端为正,这时随着控制体内质量流量的减少,密度必定随之减小,

即 $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}$ 为负;反之为正。根据高斯定理

$$\iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) d\mathcal{V}$$

又由于控制体在流场中的位置固定不变,且不随时间而变,所以

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}$$

于是式(2-1)可写成

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] d\mathcal{V} = 0$$

而控制体是任意选取的,因此得连续性方程的微分形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2-2)$$

或

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2-3)$$

对于直角坐标系,连续性方程可写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (2-4)$$

或

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = x, y, z) \quad (2-5)$$

或

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (2-6)$$

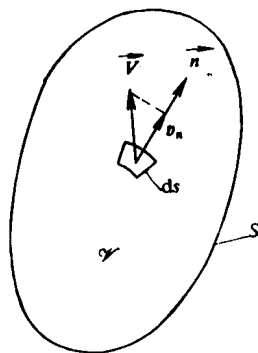


图 2-1 控制体

式中 v_x, v_y, v_z 是速度 $\vec{V}$ 在 x, y, z 轴上的分量。

对于圆柱面坐标系, 连续性方程可写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (2-7)$$

式中 v_r, v_θ, v_z 是速度 $\vec{V}$ 在圆柱面坐标 r, θ, z 轴上的分量。

对于球面坐标系, 连续性方程可写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho \sin \theta \cdot v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (2-8)$$

式中 v_r, v_θ, v_ϕ 是速度 $\vec{V}$ 在球面坐标 r, θ, ϕ 轴上的分量。

对于定常流动, $\partial \rho / \partial t = 0$, 式 (2-2)、(2-4) 和 (2-5) 可写成

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2-9)$$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (2-10)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = x, y, z) \quad (2-11)$$

对于不可压缩流体, $\rho = \text{常数}$, 则式 (2-3)、(2-6) 和 (2-5) 可写成

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2-12)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2-13)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = x, y, z) \quad (2-14)$$

很显然, 以上三式对不可压缩流体的定常流动和不定常流动都适用。

第二节 纳维尔——斯托克斯方程

一、应力张量和应变率张量的关系式 (本构关系式)

在直角坐标系中作用在粘性流体微元体表面上的应力如图2-2所示。每个作用面上有一个法向应力 σ_{ii} ($i = x, y, z$), 两个切向应力 τ_{ij} ($i, j = x, y, z, i \neq j$)。两个下标, 第一个表示应力所在作用面的外法线方向, 第二个表示应力作用的方向。于是应力在 x, y, z 方向的分量有 3 个法向应力和 6 个切向应力, 这 9 个分量构成一个二阶张量 $[P]$, 称为应力张量, 记以

$$[P] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

根据微元体的力矩平衡条件, 略去高阶微量, 可以证明

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2-16)$$

所以应力张量是对称张量。

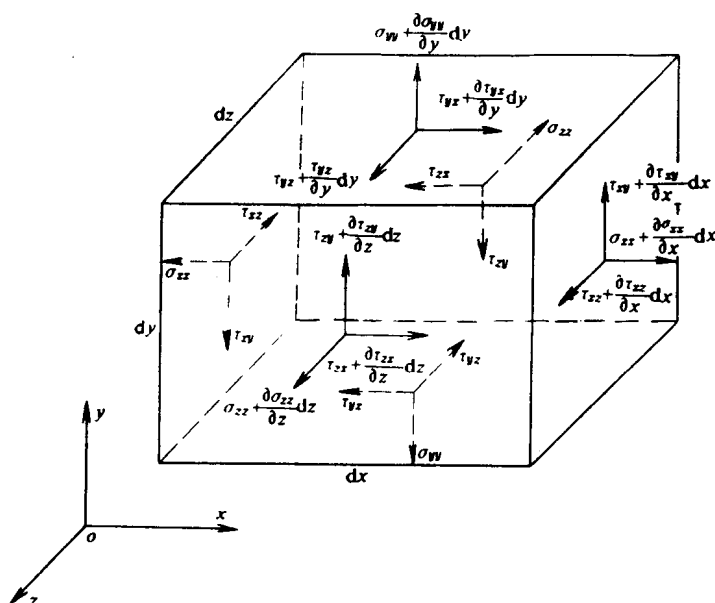


图 2-2 作用在流体微元体表面上的应力

对流体微元体变形运动的分析可知，微元体的变形由线变形和剪切变形组成，线变形用法向应变率 ε_{ii} ($i = x, y, z$) 表示，剪切变形用剪切应变率 ε_{ij} ($i, j = x, y, z, i \neq j$) 表示，共有 9 个分量，组成一个二阶张量 $[E]$ ，称为应变率张量，记以

$$[E] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

由式 (2-17) 可知，应变率张量也是一个对称张量。

下面我们只限于讨论牛顿流体内的应力张量与应变率张量之间的关系式。牛顿粘性内摩擦定律指出，流体作简单剪切运动时，两层粘性流体之间的摩擦切向应力与沿运动方向法线上的速度梯度成正比，如图 2-3 所示，即

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy} \quad (2-18)$$

由于流体平行于 x 轴作简单剪切流时，即 $v_y = v_z = 0$ ，则

$$\varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{dv_x}{dy}$$

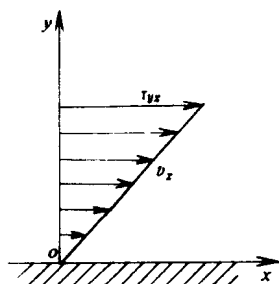


图 2-3 简单剪切流动

则式 (2-18) 改写成

$$\tau_{yx} = 2\mu \varepsilon_{yx} \quad (2-19)$$

在粘性流体作三维运动的情况下, 应力张量与应变率张量之间的关系显然要比式 (2-19) 要复杂得多。对于牛顿流体来说, 可根据早在 1845 年斯托克斯提出的以下三个假设来建立它们之间的关系。

(1) 流体是连续的, 其应力张量和应变率张量成线性关系;

(2) 流体是各向同性的, 即流体的性质与方向无关, 因此应力张量和应变率张量的关系与坐标系位置的选取无关;

(3) 当流体静止时, 即应变率为零时, 流体中的应力就是流体静压强。

大量的实验证明, 对于大多数粘性流体来说, 以上三个假设是正确的。人们称满足这些假设的流体为牛顿流体, 如水、空气、蒸汽等都属于牛顿流体。

根据第一和第二条假设, 可以将应力张量和应变率张量的线性关系写成

$$[P] = a[E] + b[I] \quad (2-20)$$

式中的 a 和 b 都是标量, $[I]$ 是二阶单位张量, 即

$$I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } i = j \text{ 时} \end{cases} \quad (2-21)$$

由于关系式是线性的, 标量 a 不可能与张量 $[P]$ 和 $[E]$ 的分量有关, 因此它是一个与流体运动形态无关的物理常数, 参照式 (2-19), 可令

$$a = 2\mu$$

标量 b , 对坐标系的任何转动来说是不变量, 对二阶张量来说, 主对角线上三个分量之和是张量的线性不变量。因此 b 只能是由应力张量和应变率张量的线性不变量所组成的线性关系式。应力张量和应变率张量的线性不变量分别为 $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ 和 $\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y + \partial v_z / \partial z = \nabla \cdot \vec{V}$, 于是 b 的关系式可写成

$$\begin{aligned} b &= b'(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + b''(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + b''' \\ &= b'(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + b''\nabla \cdot \vec{V} + b''' \end{aligned}$$

式中 b' 、 b'' 和 b''' 是待定常数。将 a 和 b 代入式 (2-20), 得

$$[P] = 2\mu[E] + [b'(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + b''\nabla \cdot \vec{V} + b'''] [I] \quad (2-22)$$

取式 (2-22) 两端主对角线上三个分量之和, 则得

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 2\mu\nabla \cdot \vec{V} + 3[b'(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + b''\nabla \cdot \vec{V} + b''']$$

并项后, 得

$$(1 - 3b')(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = (2\mu + 3b'')\nabla \cdot \vec{V} + 3b''' \quad (2-23)$$

根据第三个假设, 当流体静止时, $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, 而流体中的法向应力就是静压强 p_0 , 即

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -3p_0 \quad (2-24)$$

这样式 (2-23) 就变成

$$(1 - 3b')p_0 = -b'''$$