学会学习

中学生学习方法丛书

实用高中数学学习方法

丁世贤 主编

shu xue

明出版社

编者的话

亲爱的中学生朋友，你有过这样的苦恼吗？

你身边那些学习成绩出类拔萃的佼佼者经常出现在绿茵场上、图书馆里，而自己却总是在为做不完的习题冥思苦想……

同是学习，为什么自己花了并不逊于别人、甚至远远超过别人的时间和精力，而效果却并不理想？是自己的智力不如别人吗？

非也，非也！

很大程度上是因为学习不得法。

你在紧张学习的间歇，可曾思考过一个问题：你是真的在学习吗？

不要觉得这是个非常可笑的问题。实际上，有不少同学每天都伏案苦读、挑灯夜战，貌似在刻苦地学习，其实学习效率很低，大部分时间，他们是在做无效劳动，而不是在学习！

试图从根本上解决这一问题，正是我们编写此书的初衷。

虽然素质教育正呼声日高，但很多人并没有认识到让学生学会怎样学习和学会怎样思考将是我们教育的主要任务。在教学实践中，对学习方法和学习技巧的提倡仍停留在口头上。“题海战术”仍是压倒一切的“方法”。

为了使中学生轻松愉快而又高效地完成中学学业，将广大同学从沉重的学习负担中解脱出来，我们设计了这套《“学会学习”中学生学习方法丛书》，旨在推动中学生学习方法的研究，深入探讨学习规律，建立系统的中学各科学习法。

本套丛书力图站在“学会学习”的高度，以学习法为中心，把学习法和中学各科学习内容紧密结合起来，具有实用性（对学生学习确有明显帮助）、趣味性（使学生读得轻松、有味）、系统性（有较明确的理论体系）等特点。

本丛书由北师大、江西师大、江西教育学院、北京四中既有理论修养，又有实践经验的教研人员具体编写。

编者

1999年3月

目 录

热爱是最好的老师

——谈数学学习兴趣的激发

美国《科学美国人》杂志上曾刊登过一则有趣的故事：世界著名的魔术家兰迪先生有一块长宽都是13分米的地毯，他想把它改成8分米宽，21分米长的地毯。

他拿着这块地毯去找地毯匠奥马尔，并对他说："我的朋友，我想请您把这块地毯分成四块，再把它们缝在一起，成为一块8分米×21分米的地毯。"奥马尔听了以后对他讲："很遗憾，兰迪先生。您是伟大的魔术家，可是您的算术竟这样差！13×13=169，而8×21=168，这怎么能办得到呢？"兰迪说："我亲爱的奥马尔，伟大的兰迪是从来不会错的。劳您的驾把这块地毯裁成这样的四块。"

奥马尔照他说的那样做了，尔后，兰迪先生把这四块重新摆一下，再让奥马尔把它们缝在一起，这样就得到了一块8分米×21分米的地毯。

奥马尔想："这怎么可能呢？地毯面积由169平方分米缩小到168平方分米。那1平方分米到哪里去了呢？"

兰迪究竟是如何设计的呢？我们暂且把这个问题放一放，先来看看著名的裴波那契数列。

从裴波那契数列看美妙的数学

裴波那契是中世纪西方最伟大的数学家之一。在裴波那契1202年的成名之作《算法之书》中，记载了大量的算术和代数问题及其解答。其中有一个非常著名的数列问题：

有个人想知道，一年之内1对兔子能繁殖成多少对。于是筑起了一道围墙把一对兔子关在里面。已知1对大兔子每个月可生1对小兔子，而1对小兔子生下后第2个月就开始生小兔子。假如一年内没有发生死亡，那么1对兔子一年内繁殖成多少对？

在解决这个有趣的代数问题过程中，裴波那契得到一个数列：

1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，…

人们为了纪念他的这一发现，将这个数列前面增加一项“1”后得到的数列：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，…

叫做“裴波那契数列”这个数列的任意一次都叫做“裴波那契数”。

这个数列可以由下面的递推关系来确定：

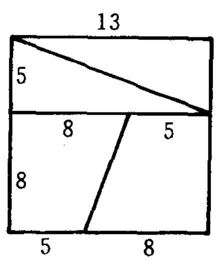
$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} (n \geqslant 3) \end{cases}$$

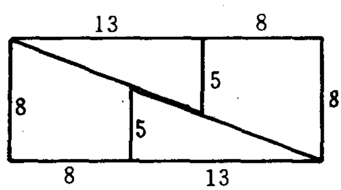
另外，我们还可以利用等比数列的性质，推导裴波那契数列的一个外观比较漂亮的通项公式：

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

裴波那契数具有许多奇妙的性质，我们在文章开始提到的故事就与裴波那契数有关。现在我们就来看看魔术家兰迪的设计。兰迪将那块13分米×13分米的地毯，让地毯匠奥马尔裁成如图(1)的四块，并拼成图(2)的形状，于是得到了8分米×21分米的地毯。

我们仔细观察兰迪先生的两个图形，不难发现，将四个小块拼





成长方形时，在对角线中段附近发生了微小的重叠。正是沿着对角线的这点叠合，导致了丢失一个单位的面积。读者不妨自己用纸试试。

上面两个图形中涉及到的四个长度数 5，8，13，21 都是裴波那契数，并且 $13^2=8\times21+1$，$8^2=5\times13-1$。多做几次上述的试验，就可以发现裴波那契数列的一个有趣而重要的性质：

$$a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}\pm1\quad(n\geqslant2)$$

除此之外，裴波那契数列还有一些有趣的性质，例如：

$$a_{m+n}^2-a_{m-n}^2=a_{2m}\cdot a_{2n}$$

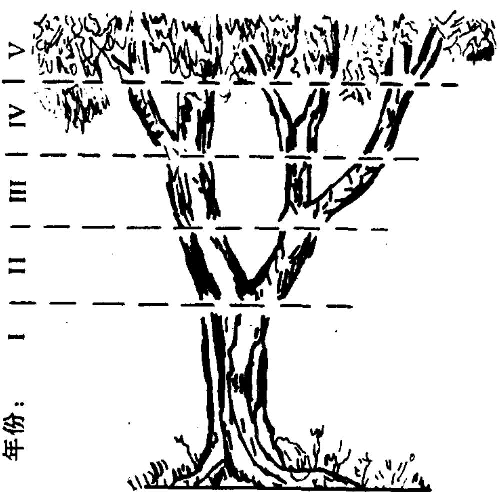
裴波那契数列的前 n 项和 S_n 为：

$$S_n=a_{n+2}-1$$

或
$$S_n=\sum_{x=0}^{[\frac{n}{2}]}C_{n-i}^{i}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

其中$[\frac{n}{2}]$表示不大于$\frac{n}{2}$的最大非负整数，$C_{n-i}^{n}=0(i=1,2,\cdots)$。

裴波那契数列在实际生活中有着广泛而有趣的应用。除了动物的繁殖外，植物的生长也与裴波那契数有关。数学家泽林斯基在一次国际数学会议上提出树木生长的问题：如果一棵树苗在一年以后长出一条新枝，然后休息一年。再在下一年又长出一条新枝，并且每一条枝都按照这个规律长出新枝（如图）。那么，第一年它只有主干，第 2 年有两枝，第三年有 3 枝，然后是 5 枝，8 枝，13 枝等



等，每年的分枝数正好是裴波那契数。

生物学中所谓的“鲁德维格定律”，实际上就是裴波那契数列在植物学中的应用。

古希腊的毕达哥拉斯学派从数的比例中发现了美的形式——“黄金比” $\lambda=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，运用“黄金比”将一条线段的一个分割就曾被著名的大艺术家达·芬奇称为“黄金分割”。这种黄金分割从古至今都认为在造型艺术中有美学价值。符合黄金分割律的矩形，被认为是最和谐悦目的矩形，并适用于门窗、书本的设计；爱神维纳斯雕像之所以令人心荡神迷，是因为其躯干部分宽与高的比，身体下肢与整个身长的比都是符合黄金分割的。到了 20 世纪 50 年代，黄金分割方法竟成为最优的选择实验法，在最优化理论中仍然焕发异彩，更显示了它的内在美。这种美妙的“黄金比”就和裴波那契数列有密切关系。实际上，$\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$。

数学中存在美，数学美是一种理论的美，一种真实的美，它不像自然美或艺术美那样外显，它需要我们凭心眼去体会，凭理性去发掘。正如著名的数理哲学家罗素所说：“数学，如果正确地看它，不但拥有真理，而且也有至高的美，正像雕刻的美，是一种冷而严格的美。这种美不是投合我们天性的微弱的方面，这种美没有绘画或音乐那些华丽的装饰，它可以纯净到崇高的地步，能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的那种完美的境地。”

数学美不仅在于数学本身，更根本的是它**呈现了人的本质力量**，即呈现了人在数学创造活动中所显示的对数学产生的那种炽热的情感，克服困难的伟大意志和坚强的性格。如非欧几何的创始人罗巴切夫斯基受尽了冷嘲热讽而带来的艰辛，创造了其精湛的理论；牛顿和莱布尼兹以他们超人的想象力和洞察力，从不同的角度在同一时期、基本用同一种思想方法，即无穷小量方法创立了微积分，不但使数学有了飞跃的发展，而且加速了整个人类进步的里

程；陈景润身居六尺陋室，为摘取数学皇冠上的明珠而做出了常人难以想象的工作；著名数学家华罗庚先生在异国讲坛上溘然长逝……这些人类的精英对数学这么执着地追求，正是数学美的强烈吸引力，使他们产生对数学的热爱，产生克服困难的伟大意志。这正如居里夫人所说："科学的探讨研究，其本身就含有至美，其本身给人的愉快就是报酬。"

在数学学习中，通过一些生动的学习材料，或从了解数学发展史以及古今中外数学家们以锲而不舍的钻研精神，勤奋严谨的治学态度而创造出的卓越成就，以数学美的魅力去拨动我们的心弦，则我们必然会在享受与鉴赏数学美的愉悦中，激发数学兴趣，增长知识，受到教益。

创造数学美，激发成就感

对数学美的鉴赏无疑能给人们以极大的精神享受，从而激发学习数学的兴趣。**学习材料及内容的生趣和审美价值，是学习的最佳刺激**。同时，由于对数学美的追求以及对数学美的热切信念，而引起的强烈的创造活动所带来的美的愉快和享受又是对学习的最好报偿，这种报偿反过来又激励推动着学习。

在任何学习或发现过程中，对美的感受最灵敏，最强烈。任何的发现活动往往都开始于对现存知识结构美的缺陷的认识。在学习新的数学内容时，若能从分析现存的知识结构，发现其缺陷（美中不足之处）入手，往往能产生一种强烈的求知欲。例如在学习对数概念时，可考虑由等式 $a^b=N$ 所定义的几种运算：已知 a、b，求 N（乘方运算）；已知 N、b，求 a（开方运算）。从数学和谐美的特征考虑，我们自然要研究已知 a、N，求 b 的运算，这样就从弥补原有知识结构的不对称的缺陷开始，带着一种强烈的求知欲进入了主动的学习。

学习以兴趣为动力，以质疑为关键。学贵有疑，学习中不满足

老师或教科书中对某些问题的描述和解释，敢于质疑问难的优良思维品质难能可贵。敢于质疑，善于质疑是创造能力强的表现。通过质疑，特别是经过深思熟虑后的质疑和解疑，能提高我们对事物的规律和本质的理解水平，能在普通的、简单的、已经为人所知的现象中发现问题，并能从中揭露出最主要的规律。这种敢于质疑的探索精神常表现在不依常规，不循规蹈矩，用新颖的求异思想和方法解答问题。当一个解法尚未达到数学美的境界时，力求去改进它，寻求具有数学美特征的方法。例如，为求 $p=\sin10°\sin30°\sin50°\sin70°$ 的值而巧设 $q=\cos10°\cos30°\cos50°\cos70°$，

则

$$\begin{aligned}pq&=\frac{1}{2}\sin20°\cdot\frac{1}{2}\sin60°\cdot\frac{1}{2}\sin100°\cdot\frac{1}{2}\sin140°\\&=\frac{1}{16}\cos70°\cos30°\cos10°\cos50°\\&=\frac{1}{16}q\end{aligned}$$

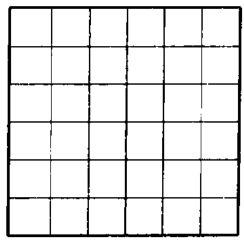
$\because\ q\neq0$，$\therefore\ p=\frac{1}{16}$，解法巧妙，具有美感，令人愉快。

在数学学习中，应通过自己的学习创造活动，去激发学习动机中的成就情感。有时对一个问题苦思冥想，总不得要领，理不出头绪，一旦豁然想通，尤其是在陈法之外，别开生面地想出一些新法来，就会产生一种成功的喜悦，并能从成功中看到自己的力量，增强学习兴趣和信心，从而越发乐此不疲地去学习，去创造。

例如，求自然数平方和 $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+\cdots+n^2$。若我们从观察和式 $\sum_{k=1}^{n}k^2$ 与自然数 n 项和 $\sum_{k=1}^{n}k$ 之间的关系入手，分析 $\sum_{k=1}^{n}k^2/\sum_{k=1}^{n}k$ 当 $n=1,2,3,4,5,\cdots$ 时，其比值依次为 $\frac{3}{3}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{7}{3}$，$\frac{9}{3}$，$\frac{11}{3}$，… 发现比值呈现出井然有序的形式美，并得到猜想：

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{\sum_{k=1}^{n}k}=\frac{2n+1}{3},\text{亦即}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{2n+1}{3}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

此时所产生的出人意料的数学美令人陶醉，再通过数学归纳法证明该猜想的正确性。这里通过自然数平方和与自然数前 n 项和之间的优美联系，使人感到的不单是一种方法美，更重要的是感受到了创造的喜悦和成功的乐趣。我们若再能对这一结果赋于某种几何解释：把边长为 n 的正方形的邻边分别 n 等分，从各分点作各邻边的平行线(如图)，则还会发现图中边长为 n 的正方形有 1^2 个；边长为 $(n-1)$ 的正方形有 2^2 个；边长为 $(n-2)$ 的正方形有 3^2 个；……；边长为 1 的正方形有 n^2 个。图中正方形的个数总共有 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)\times(2n+1)$ 个。此时，创造的喜悦和成功的乐趣会得到进一步的升华，这种在创造活动中所体会到的数学内在美的神韵和成功的情感将会更激发浓厚的学习兴趣，激励我们去进行新的学习，新的创造。



以数学的广泛应用培养学习兴趣

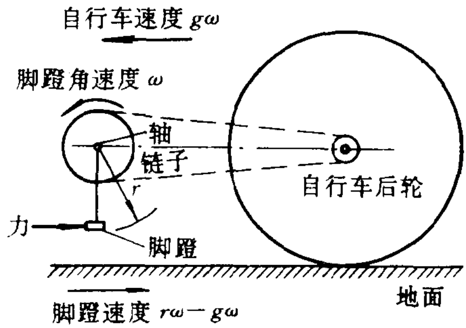
华罗庚先生说过：“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用到数学。”

把所学到的知识应用于实际，解决实际中的数学问题，是提高学习兴趣的重要方法。尤其是解决了那些与我们有直接关系的数学问题，更能引起和培养学习数学的兴趣，并从中享受到学以致用的乐趣，从而对数学学习产生愉快情绪。

下面的自行车问题是很有启迪性的：

设静置自行车的脚蹬曲柄处于铅直位置，如果底部的脚蹬被轻轻地向后推动，问自行车将向哪个方向运动？

力的作用所引起的脚蹬转动，与我们骑车时的情形是一致的，因而大多数人会回答："当然向前！"但只要亲自试验一下，就会发现自行车是向后运动的。这就有趣了。这种现象如何解释呢？

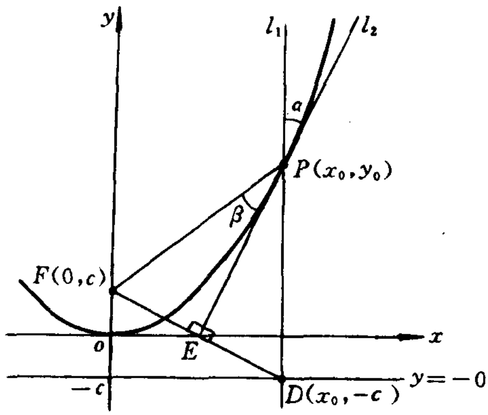


如图所示，设力引起脚蹬绕中轴旋转的角速度为 ω，如果自行车的传动比为 g，那么自行车相对于地面前进的速度为 $g\omega$。此外，如果 r 是脚蹬的旋转半径，由于脚蹬是在它的最低位置，所以脚蹬相对于地面向后的速度是 $r\omega-g\omega$。既然脚蹬是力的作用点，其运动不会与力反向。如果脚蹬运动是 $(r-g)\omega\geqslant 0$，那么运动就是向后的。因此或者 $r>g$ 且 $\omega\geqslant 0$，或者 $r<g$ 且 $\omega\leqslant 0$，或者 $r=g$。但前面已指出自行车的速度是 $g\omega$，并且 $g>0$，所以当 $\omega>0$ 时，自行车向前运动；当 $\omega<0$ 时，自行车向后运动。普通自行车 $r<g$，自行车向后运动。

在现行高级中学课本《平面解析几何》(甲种本)中提到圆锥曲线在光学上的一些应用。例如："放在抛物镜焦点处的光源发出的光线投射到曲面上，经曲面反射后便成为平行于轴的光线。利用这个光学性质就可以制作探照灯和汽车前灯等。"

对于课本中提到的这一光学性质，我们可先抽象成与其等价的

数学问题："设 P 是抛物线上的任意一点。用直线连接抛物线的焦点 F 和点 P，并过 P 作平行于抛物线轴的直线 l_1，则它们与抛物线在 P 点的切线 l_2 所夹的角 α 和角 β 相等(如图)。"



设抛物线的方程为 $x^2=4cy$，焦点 $F(0, c)$，准线为 $y=-c$，$P(x_0, y_0)$是抛物线上一点。$D(x_0, -c)$是 l_1 与准线的交点，E 是 l_2 与直线 FD 的交点，容易验证 E 点在 x 轴上。可以求得切线 l_2 的斜率是$\frac{x_0}{2c}$，而 FD 的斜率是$-\frac{2c}{x_0}$，因此它们互相垂直。因为$|FP|=|PD|$，故直角三角形 FEP 和 DEP 全等。从而有

$$\beta=\angle FPE=\angle DPE=\alpha$$

数学的内容是抽象的，但表达它们的方式以及它们在生活和其他学科中的实际应用却是生动的，多彩的，人们从中可以发现数学并不只是"定义、定理、公式、证明"的刻板叙述，而是生动活泼、引人入胜的思维训练，由此而激发的数学学习兴趣是一种强烈而持久的学习动机。

唯有热爱数学，才能有积极持久的求学劲头。正如爱因斯坦说过的："**热爱是最好的老师**。"

思维训练题

(1)从一楼到二楼有 12 级楼梯，如果规定每步只能跨上一级或两级，问欲上二楼，共有几种不同的走法？

(2)求和 $S_n=1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\cdots+n(n+1)^2$，对于这个问题，你能想出几种不同的解法？这些解法可求哪些数列的和？

(3)设过椭圆上两点 P_1、P_2 的切线相交于 T，F_1、F_2 是椭圆的焦点，试证：F_1T 与 F_2T 分别是$\angle P_1F_1P_2$ 与$\angle P_1F_2P_2$ 的平分线。

答案与提示

(1)设到达第 n 级楼梯的走法有 a_n 种，则 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$，所以 $a_n=F_{n+1}$(裴波那契数列)。共有 $F_{13}=233$ 种走法。

(2)①待定系数法：

试设 $S_n=A+Bn+Cn^2+Dn^3+En^4$

由 $S_{n+1}=S_n+(n+1)(n+2)$展开比较系数可得 S_n。

②拆项法：

利用 $k(k+1)^2=k^3+2k^2+k$

或 $k(k+1)^2=(k+1)^3-(k+1)^2$

或 $k(k+1)^2=k(k+1)(k+2)-(k+1)$

……

求和。

运用这些方法，我们至少还可求如下数列的和：

①$S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$；

②$S_n=1^3+2^3+\cdots+n^3$；

③$S_n=1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)$；

④$S_n=1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)$。

(3)利用二次曲线的光学性质证明。

特点·思想·方法

——谈学习数学

在《爱因斯坦》这部传记中，对爱因斯坦在研究引力问题时遇到困难有这样一段描绘：他仿佛在攀登雪山，脚下滑溜溜的，没有一点可攀附的地方。顶峰在阳光下闪耀着明灿灿的光，在向他招手，可是这崎岖的路，这陡峭的坡，刚走了几步，又滑下来，回到原来的老地方。他沿着一条小路绕到背后，重新开始攀登，还是老样子，刚走几步，又滑了下来。他知道了：自己缺少一双登山鞋，缺少一根登山棒。数学就是这登山鞋和登山棒，后来他请教格罗斯曼教授，教授告诉他要解开引力之谜有现成的数学公式——黎曼几何和张量分析。

数学是研究数与形的科学，数学问题无处不在。人们要掌握一门技术，要学习数学，要想攀登科学高峰，更要学好数学。

数学与别的学科相比有哪些特点?它有什么相应的思想方法?它客观要求我们应具备什么样的主观条件和学习方法？本章将对科学数学和高中数学的特点，数学思想以及学习数学的方法作简要的阐述。

抓住两个特点

这里所说两个特点，是指数学的三大特点和高中数学的特点。

（一） 数学的三大特点

众所周知，**严谨性、抽象性和广泛的应用性**是数学三个基本特点。

所谓数学的严谨性，是指数学具有很强的逻辑性和较高的精确性，一般是以公理化体系来体现的。

而公理化体系，就是选用少数几个不定义的概念和不加逻辑证明的命题作为基础，推出一些定理，使之成为一个数学体系，哪怕是最基本的常用的原始概念也不允许直观描述，而要用公理加以确定。但中学教材的数学与科学数学在严谨性上还是有所区别。如，从非负有理数至有理数、至实数、至复数，它们所满足的运算律，实际并未随着概念的扩充而逐个地给予严密的推证，而是采取默认的方法。又如，“任一直线段必有且仅有一个中点”。虽然如此，但中学数学不能丝毫放松其严谨性的要求，必须保证内容的科学性。要求做到：**言必有据，语言精确，思考缜密，思路清晰**。

如，学习三棱锥体积是同底等高的三棱柱体积的$\frac{1}{3}$的定理时，不能只用倒沙、倒水的方式来验证，还必须严格证明。

数学的抽象，是对空间形式和数量关系这一特性的抽象。它在抽象过程中抛开较多的事物的具体的特性，因而具有十分抽象的形式。也即具有高度的抽象性。数学抽象表现为高度概括性，抽象再抽象，抽象性的符号化。但它又必须以具体作为基础。

如，“对应”，它是一个抽象数学概念，也是一种重要的数学思想。

请看：下面两个数列的对应

$$\begin{array}{ccccccc} A=\{ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\cdots & \} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ B=\{ & 2 & 4 & 6 & 8 & 10\cdots & \} \end{array}$$

正整数集 A 与其子集偶数集 B 关系，通过用箭头符号表示，使人们放弃了元素个数前者比后者多的想法，而承认二者“一样多”。正是无穷量的特点，使“部分可以等于整体”。

数学的广泛应用性，也是众所周知的，真是无处不用，难怪有人用“数学是科学之母”的语句来描述，中学里的数学也自然成为