

gangjiegou sheji de
ruogan lilun

钢结构设计的若干理论

胡春农 黄剑源 曹治杰 编

中国铁道出版社

钢结构设计的若干理论

胡春农 黄剑源 曹治杰 编

中 国 铁 道 出 版 社

1984年·北京

钢结构设计的若干理论

胡春农 黄剑源 曹治杰 编

中国铁道出版社出版

责任编辑 王能远 封面设计 翟 达

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本: 787×1092 1/32 印张: 8.5 字数: 202千

1984年1月第1版 1984年3月第1次印刷

印数: 0001—10,000册 定价: 1.10元

前 言

近年来,桥梁结构日益朝着大跨、轻型及整体受力的方向发展,斜桥及曲线桥等型式正在增多;薄板或板梁组合的结构也正在推广。随着电子计算机的广泛使用,有关钢结构内力计算方面的基本原理与方法,也正深入地发展着。

作者深感工程专业的大学生们在学习统编教材《结构设计原理》钢结构部分和写作毕业论文过程中,有必要阅读一些有关新型结构部件分析方面的基本原理的参考资料,如薄壁结构的扭转、薄板屈曲等。因此,作者将指导大学生写作毕业论文和研究生学习专业课程所编写的讲义,整理成此书出版,以供高年级大学生使用。

此书亦可供技术人员与研究生参考。

本书承上海铁道学院胡匡璋同志审校,谨此致谢。

在编写第五、六、七、八章的过程中,尚有张哲、陈蓓薇二同志参加工作。

作者

于兰州铁道学院

1983.2

内 容 简 介

本书阐述有关新型钢结构部件分析方面的基本原理，包括正交异性板、剪力滞后、弹性屈曲、腹板稳定、压弯杆件、薄壁杆件的弯扭屈曲与梁的稳定性等。

读者对象：大专院校结构专业师生、研究生及设计单位有关人员。

目 录

第一章 正交异性钢板	1
一、线性弯曲理论	1
二、构造性正交异性板的弹性刚度的确定	10
三、用有限差分法和等效梁格体系解正交异性板	11
第二章 剪力滞后与有效宽度	24
一、加劲板或宽翼缘梁的有效宽度计算	24
二、箱形梁翼缘板的有效宽度	30
三、箱形梁上纵向应力分布的实用计算公式	33
四、连续箱形梁的有效宽度与有效宽比	35
第三章 薄板的弹性屈曲	36
一、薄板受纵横荷载的共同作用	36
二、薄板的屈曲及临界力	37
三、用静力法求临界力	37
四、用能量法求临界力	38
五、用有限元法及有限条带法解板的屈曲	43
六、有效宽度	50
七、板的有限挠度理论及受压板的极限强度	50
八、斜板屈曲	54
第四章 钢梁腹板稳定	57
一、薄板箱梁的承载能力	57
二、腹板稳定验算的内容与公式	57
三、算 例	67
第五章 压弯杆件	71
一、压弯杆件的平衡微分方程	71
二、近似解法	77
三、放大系数及最大弯矩方程的应用	82
四、压弯杆件的转角位移方程	84
五、相互作用方程	87
第六章 开口薄壁杆件的弯曲和扭转	89
一、引言	89
二、基本关系式	90
三、截面中应力	93
四、扭转微分方程及解	96
五、弯曲和扭转时的应变能	99

第七章 开口薄壁杆件的弯扭屈曲与梁的侧向稳定性	101
一、引言	101
二、中心受压杆的弯扭屈曲	101
三、偏心受压杆的弯扭屈曲	106
四、梁的侧向稳定性	110
第八章 闭口薄壁杆件的弯曲与扭转	116
一、闭口薄壁截面的弯曲	116
二、闭口薄壁截面的纯扭转	117
三、单室闭口截面的翘曲扭转	120
四、薄壁截面的扭转几何特性	123

第一章 正交异性钢板

桥梁、飞机、船舶、水工结构及自然界的许多受力构造物的承重结果证明，正交异性板具有许多优越性，近年来呈现了一种广泛采用它的趋势。这是因为：

(一) 结构物经常是在互相垂直的方向承受不同的载荷，或者是传递载荷。

(二) 在某些结构物中，带肋的加劲板常常较之实体的高梁或薄板更加有效而经济。

(三) 正交异性板易于或有效于组成空间受力的整体结构物，从而减轻重量，增加抗扭刚性和节约养护费用等。

通常所称的正交异性板是指那些在互相垂直的两个方向的刚性（如 EI ）不相同的板件。如果其板厚及截面相同，但材质的 E 或泊松比在互相垂直的方向不同，则称之为材质性的正交异性板。反之，如果材质性能相同，但其截面特性如惯性矩 I 等并不相同，则称之为构造性正交异性板，像带有较密的纵肋（或另有横肋）的钢桥面板就是属于这种类型（图1-1）。本章讨论正交异性板的计算方法，而且只讨论弹性范围内的小变形的线性理论。

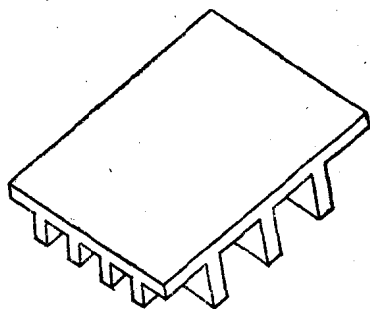


图 1-1

一、线性弯曲理论

(一) 平衡微分方程及其解

如图 1-2 的正交异性板上受有横向分布载荷，周边简支。

它的平衡微分方程式为^[1]：

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(xy) \quad (1-1)$$

式中 H ——有效扭转刚度，对于材质性正交异性板为

$$2H = D_x \mu_y + D_y \mu_x + 4D_{xy}$$

其中 D_{xy} ——板的扭转刚度。

在材质性正交异性板中，还可取

$$2D_{xy} = (1 - \sqrt{\mu_x \cdot \mu_y}) \sqrt{D_x \cdot D_y}$$

故 $2H = D_x \mu_y + D_y \mu_x + 2(1 - \sqrt{\mu_x \mu_y}) \sqrt{D_x D_y}$

(1-2)

其它符号的涵义可参见一般弹性力学著作。

上述微分方程的解，基本上与同性板相同，只是弹性常数不同而已。

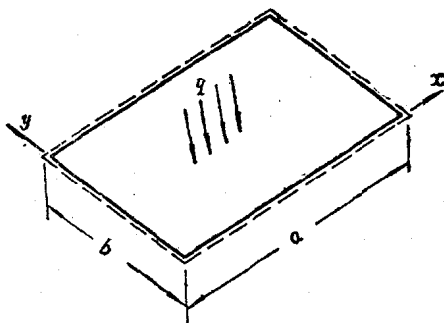


图 1-2

求解正交异性板的方法很多,除了用钢格梁体系的近似方法以外,各种求解办法都是基于上述微分方程而推导的。当然,把带肋的构造性正交异性板的内力平衡用上述微分方程来抽象,则常要注意下面几点:

1. 加劲肋要相对地密布一些,而且是均匀地布置着。这里没有一个明显的、固定的尺寸规定,但是,可以认为,当肋间板受弯曲时的有效宽度能很好地多搭接起来就好些。

2. 加劲肋常常是布置于中面的底侧,因此,中面与中性轴并不重合,分析内力时将存在剪力影响,或者称作二次影响,故肋高不能太大。

3. 方程中弹性常数的决定,虽然可以搬用一些下文将要述及的公式,但不能认为是精确办法,相反地,有时可能因此带来较多的误差,因此,试验研究是必要的。

4. 板的两个边界条件,也要根据桥梁构造的实际情况而定,譬如宽翼缘箱形梁的桥面板的纵边可以视作简支,而横向则可视作弹性支承等。

关于微分方程的求解,此处就双重三角级数解加以介绍。

假定板是四边简支的如图 1-2, 则,

$$x=0, x=a \text{ 时, } w=M_x=0$$

$$y=0, y=b \text{ 时, } w=M_y=0$$

满足上述边界条件的解,可以假定为:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

假定:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

则,

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

将上述 w 与 q 的表达式同时代入微分方程式 (1-1) 中, 可得:

$$a_{mn} = \frac{q_{mn}}{\pi^4 \left[D_x \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2H \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + D_y \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right]}$$

(1) 均布荷载 q ,

$$q_{mn} = \frac{16q}{\pi^2} \cdot \frac{1}{mn} \quad (m, n \text{ 为 } 1, 3, 5, \dots)$$

(2) 集中荷载 P 在 (ξ, η) ,

$$q_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \quad (m, n \text{ 为 } 1, 2, 3, \dots)$$

单重三角级数解:

铁路桥梁是通过钢轨承受荷载的,节间的长度较小,故可近似地假定荷载沿着 x 方向是不变化的(图 1-3),而在 y 方向是变化的。

同时,还可假定顺着 x 方向的两边为简支的,而其余两边为任意支承。如用单重三角级数解,可把解分成两部分:

$$w = w_0(y) + w_1(x, y)$$

选择 $w_0(y)$ 满足方程及边界条件

$$D_y \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q(y)$$

$$w_0(0) = w_0(b) = w_0''(0) = w_0''(b) = 0$$

故可知 $w_0(y)$ 是长度为 b ，刚度为 D_y 的简支梁在荷载 $q(y)$ 作用下的挠度。即

$$w_0 = \frac{b^4}{D_y \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^4} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$a_n = \frac{2}{b} \int_0^b q(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

w_0 可以求出来，故余下的 $w_1(y)$ 就必须是下述齐次方程的解：

$$D_x \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = 0$$

(1-3)

其解还要满足 $y=0$ 与 $y=b$ 的边界条件，故可假定

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

代入式 (1-3)，得

$$D_x x_n'''' - 2H \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 x_n'' + D_y \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 x_n = 0$$

函数 x_n 依下述特征方程的根而定：

$$D_x S^4 - 2H \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 S^2 + D_y \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 = 0 \quad (1-4)$$

$$S^2 = \frac{2H \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \pm \sqrt{4H^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - 4 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 D_x D_y}}{2D_x}$$

$$= \frac{H \pm \sqrt{H^2 - D_x D_y} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{D_x}$$

下面分三种情况讨论此根：

情况 I： $H > \sqrt{D_x D_y}$ ，方程 (1-4) 为不等的实数根。

情况 II： $H = \sqrt{D_x D_y}$ ，方程 (1-4) 为相等的实数根，如 $S = \pm \frac{n\pi}{b} S_1$ 则

$$S_1 = \sqrt{\frac{1}{D_x} (H + \sqrt{H^2 - D_x D_y})}$$

$$x_n = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{n\pi S_1}{b} x} + (C_3 + C_4 x) e^{-\frac{n\pi S_1}{b} x}$$

或

$$x_n = (A_n + B_n x) \operatorname{ch} \frac{n\pi S_1}{b} x + (C_n + D_n x) \operatorname{sh} \frac{n\pi S_1}{b} x$$

情况 III： $H < \sqrt{D_x D_y}$ ，方程 (1-4) 的根是复数，这一情况在钢桥面板常常碰到。

如令

$$S = \pm \frac{n\pi}{b} (S_1 + t_i)$$

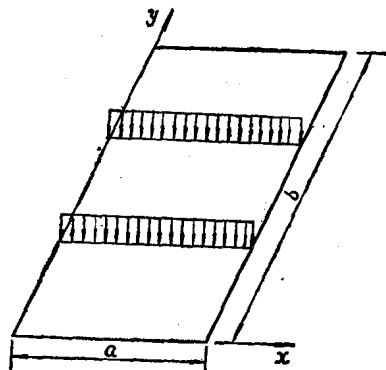


图 1-3

$$x_s = \operatorname{ch} \frac{n\pi S_1}{b} x \left(A'_n \cos \frac{n\pi t}{b} x + B'_n \sin \frac{n\pi t}{b} x \right) \\ + \operatorname{sh} \frac{n\pi S_1}{b} x \left(C'_n \cos \frac{n\pi t}{b} x + D'_n \sin \frac{n\pi t}{b} x \right)$$

故可得到三种情况下的挠度式, 如情况 III 的 w 是:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sigma_n b^4}{D_y \pi^4 n^4} + \left(A'_n \cos \frac{n\pi t}{b} x + B'_n \sin \frac{n\pi t}{b} x \right) \cdot \operatorname{ch} \frac{n\pi S_1}{b} x \right. \\ \left. + \left(C'_n \cos \frac{n\pi t}{b} x + D'_n \sin \frac{n\pi t}{b} x \right) \cdot \operatorname{sh} \frac{n\pi t}{b} x \right] \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

四个常数可以按 $x = \pm \frac{a}{2}$ 的四个边界条件来决定, 从而求解内力。

(二) 斜板的线性弯曲理论

近年来, 由于城市交通、高速公路及立体交叉的发展, 斜板、正交异性斜板及斜交异性斜板已逐渐地运用于斜的箱形梁桥、斜的箱涵及斜板桥中。

1. 斜板的弯曲微分方程

如图 1-4 a 的周边简支的同性斜板的平衡微分方程可按下述步骤进行推导之。

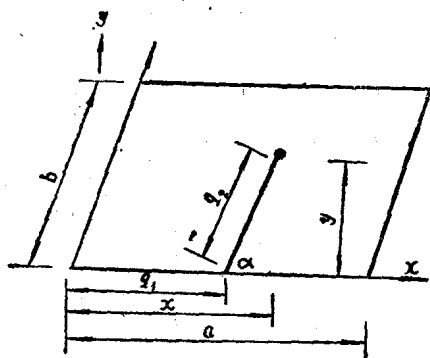


图 1-4 a

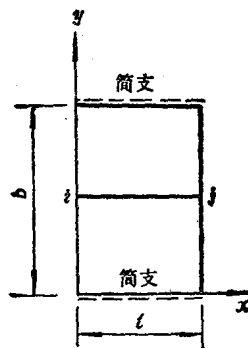


图 1-4 b

(1) 微分方程的简化

人所共知, 同性直板的微分方程是:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{P}{D}$$

或者,

$$\nabla^4 w = P/D$$

式中,

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

已知,

$$M_x + M_y = -D(1+\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

或写作,

$$\nabla^2 w = \frac{M}{D}$$

式中,

$$M = -\frac{M_x + M_y}{(1+\mu)}$$

又得,

$$\nabla^2 \frac{M}{D} = P/D$$

亦即,

$$\nabla^2 M = P$$

至此可知, 原来的四阶微分方程, 可降阶分两次求解二阶微分方程即先求 M 再求 w 。

(2) $w(x, y)$ 的各阶导数的差分表达式

因为差分法是求解斜板的有效方法, 故在此插入一段差分法的求导概念。

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{w(x+\Delta x, y) - w(x-\Delta x, y)}{\Delta x} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\frac{w(x+\Delta x, y) - w(x, y)}{\Delta x} - \frac{w(x, y) - w(x-\Delta x, y)}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{w(x+\Delta x, y) - 2w(x, y) + w(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

同理,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{w(x, y+\Delta y) - 2w(x, y) + w(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{1}{2\Delta x^3} [w(x+2\Delta x, y) - 2w(x+\Delta x, y) + 2w(x-\Delta x, y) - w(x-2\Delta x, y)]$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \frac{1}{2\Delta y^3} [w(x, y+2\Delta y) - 2w(x, y+\Delta y) + 2w(x, y-\Delta y) - w(x, y-2\Delta y)]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{\Delta x^4} [w(x+2\Delta x, y) - 4w(x+\Delta x, y) \\ &\quad + 6w(x, y) - 4w(x-\Delta x, y) + w(x-2\Delta x, y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{1}{\Delta y^4} [w(x, y+2\Delta y) - 4w(x, y+\Delta y) + 6w(x, y) \\ &\quad - 4w(x, y-\Delta y) + w(x, y-2\Delta y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{1}{\Delta x^2 \Delta y^2} [w(x+\Delta x, y+\Delta y) - 2w(x, y+\Delta y) + w(x-\Delta x, y+\Delta y) \\ &\quad - 2w(x+\Delta x, y) + 4w(x, y) - 2w(x-\Delta x, y) + w(x+\Delta x, y-\Delta y) \\ &\quad - 2w(x, y-\Delta y) + w(x-\Delta x, y-\Delta y)] \end{aligned}$$

(3) 斜板的平衡微分方程式。

既然是斜板, 求解时宜运用斜坐标中的平衡微分方程式, 以便最后代入斜的边界条件, 定出积分常数而可求得位移与内力来供设计采用。

下文按图 1-4 a 作坐标变换。

$$x = q_1 + q_2 \cos \alpha \quad y = q_2 \sin \alpha$$

$$q_1 = x - y \operatorname{tg} \alpha \quad q_2 = \frac{y}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial q_1}{\partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial q_2}{\partial y} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

可进一步得,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial q_1} \times \frac{\partial q_1}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial q_1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial q_1} \times \frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial q_2} \times \frac{\partial q_2}{\partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial w}{\partial q_1} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial q_2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial w}{\partial q_1} \right) \times \frac{\partial q_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial q_1^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial w}{\partial q_1} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial q_2} \right) \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial q_1^2} \right) - \frac{2}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial q_2^2} \right) \\ &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial q_1^2} - \frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial q_2^2}\end{aligned}$$

将前两式相加, 可得:

$$\nabla^2 w = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial q_1^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial q_1 \partial q_2} \times \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial q_2^2} \right) = \frac{M}{D}$$

这就是板在斜坐标中降了阶的平衡微分方程式。

(4) 斜板的平衡微分方程的差分表达式

如果将前述的, 斜坐标中降了阶的平衡微分方程式中的各导数, 用差分表达式代入之, 则此方程式变换为:

$$\nabla^2 w = \frac{M}{D} \quad \nabla^2 M = P$$

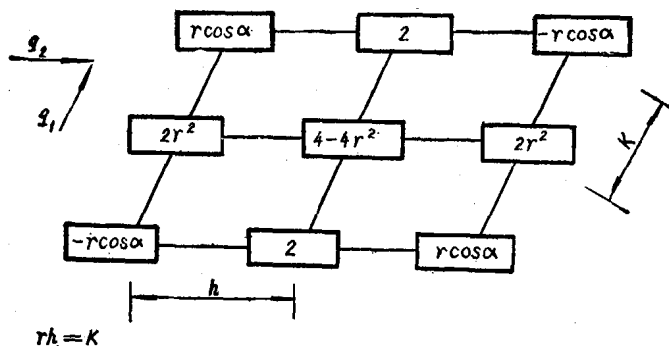
式中

$$\nabla^2 = \frac{1}{2r^2 h^2 \sin^2 \alpha} \{ \}$$

其中,

{ } 如表 1-1

表 1-1



至此可解无肋的同性斜钢板桥面的内力。

2. 用于正交异性矩形板的有限条带法〔2〕〔3〕

已经有不少文献讨论过正交异性板的有限条带法, 故此处不再作重复的论证。

但是, 为了讨论斜板的计算, 此处仍有必要列出有关的公式。如图 1-4 b 的直板桥, 下面列出它受弯曲时的有关公式。

(1) 位移函数

$$\begin{aligned}w &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right) w_{im} + \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) \theta_{im} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) w_{im} + \left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \right) \theta_{im} \right] \times \sin \frac{m\pi}{b} y\end{aligned}$$

(2) 节点位移参数与内力参数

有限条带法与有限单元法不同, 不是取单元四个角点的位移与内力, 而是取节线中部的幅值, 即正弦曲线前面的常数数值作节点位移与内力, 即

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} P_i \\ M_i \\ P_i \\ M_i \end{Bmatrix}$$

(3) 应力与应变矩阵

既然已知位移函数, 就可求出

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ +2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [B_{bm}]\{\delta_i\} \quad (1-5)$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \mu \right) \\ -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \mu \right) \\ +2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

$$=[D]\{\chi\}=[D][B_{bm}]\{\delta_i\}$$

(4) 矩形板单元的挠曲刚度矩阵

根据弹性力学有限元法的普遍公式可知矩形板条单元的挠曲刚度矩阵为

$$[K_{bm}] = \int_0^b \int_0^b [B_{bm}]^T [D] [B_{bm}] dx dy \quad (1-6)$$

式中

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & \mu D_x & 0 \\ \mu D_y & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$$

将式(1-5)中的 $[B_{bm}]$ 所表示的多项式矩阵代入式(1-6), 可得板条单元的挠曲刚度矩阵 $[K_{bm}]$, 其各元素列于式(1-7)中, 见第8页。

此式是关于两端为简支的板条的单元挠曲刚度矩阵, 其中 $K_m = \frac{m\pi}{b}$, m 的取值为 1, 3, 5 ……等。先用 $m=1$ 代入刚度矩阵中, 然后组集结构刚度矩阵, 解线性代数方程组求位移; 再用 $m=3, 5 \dots$ 重复全过程, 各求每次的位移, 最后叠加各次所得, 才是真实位移。

3. 用于斜板的有限条带法^[2]

如图 1-5 中的斜板, 其 ξ 轴与 x 轴重合, 但 η 轴与 y 轴相交成 β' 角, 斜板桥为平行四边形, 本身成 β 角。

对		称
$\frac{13lb}{70} k_m^4 D_y + \frac{12l}{5b} k_m^2 D_{zy}$		
$+\frac{6l}{5b} k_m^2 D_1 + \frac{6l}{b^3} D_z$		
$+\frac{3l}{5} k_m^2 D_1 + \frac{l}{5} k_m^2 D_{zy}$	$\frac{lb^3}{210} k_m^4 D_y + \frac{4lb}{15} k_m^2 D_{zy}$	
$+\frac{3l}{b^2} D_z + \frac{11lb^2}{420} k_m^4 D_y$	$+\frac{2lb}{15} k_m^2 D_1 + \frac{2l}{b} D_z$	
$\frac{9lb}{140} k_m^4 D_y - \frac{12l}{5b} k_m^2 D_{zy}$	$\frac{13lb}{70} k_m^4 D_y + \frac{12l}{5b} k_m^2 D_{zy}$	
$-\frac{6l}{5b} k_m^2 D_1 - \frac{6l}{b^3} D_z$	$+\frac{6l}{5b} k_m^2 D_1 + \frac{6l}{b^3} D_z$	
$-\frac{13lb^2}{840} k_m^4 D_y + \frac{l}{5} k_m^2 D_{zy}$	$-\frac{11lb^2}{420} k_m^4 D_y - \frac{l}{5} k_m^2 D_{zy}$	$\frac{lb^3}{210} k_m^2 D_y + \frac{4lb}{15} k_m^2 D_{zy}$
$+\frac{l}{10} k_m^2 D_1 + \frac{3l}{b^2} D_z$	$-\frac{lb}{30} k_m^2 D_1 + \frac{l}{b} D_z$	$+\frac{2lb}{15} k_m^2 D_1 + \frac{2l}{b} D_z$

$[K_{om}] =$

板长为 b ，板宽为 l 。如果板上布置有纵肋，则为平行于 η 轴布置的肋，故计算刚度时都分别按平行四边形的两个边长方向计。如果引用前文有关直板的公式，则刚度值可以直接替换。因为它只是一个物理量，而不是矩阵，故不要引用坐标变换矩阵来替换公式中的刚度值，即 $[D]$ 矩阵仍与直正交异性板相同。

从图 1—5 可知两个坐标体系的变换矩阵如下：

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cot\beta \\ 0 & \csc\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1-8)$$

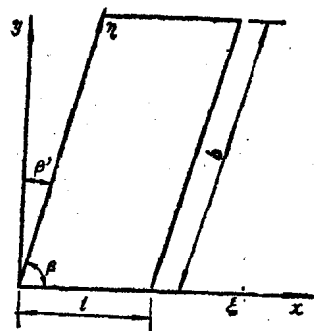


图 1—5

如果引用微分的变换式如

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

则可求得

$$\{x\} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = [C] \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{pmatrix} = [C] [\bar{B}] \{\delta\}$$

故

$$[B_{bm}] = [C][\bar{B}_{bm}]$$

(1—9)

式中 $\bar{B}$ ——像式 (1—5) 那样的含 ξ, η 的多项式矩阵。

又知式 (1—8) 中所示的两个坐标的关系为：

$$d\xi = dx, \quad d\eta = \frac{1}{\sin\beta} dy$$

从式 (1—9) 可得

$$[C] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tan^2\beta} & \frac{1}{\sin^2\beta} & \frac{1}{\sin\beta \tan\beta} \\ \frac{2}{\tan\beta} & 0 & \frac{1}{\sin\beta} \end{pmatrix}$$

至此从式 (1—6) 可得

$$[\bar{K}_{bm}] = \iint [\bar{B}_{bm}]^T [C]^T [D] [C] [\bar{B}_{bm}] \sin\beta d\xi d\eta$$

由上式可求得斜板的单元刚度矩阵，荷载也可同样地移置到节线上去，但要引用坐标转换。

当 β 角大于 45° 时，此法的解则不及差分法、三角级数法及有限单元法的解那样令人满意。

二、构造性正交异性板的弹性刚度的确定^[4]

如图(1—6)为构造性正交异性板, 如果其肋布置较密, 同时忽略肋的偏心布置(即肋的重心偏离板的中面的距离较小)的影响, 则其刚度值可按下列式子计算:

$$D_x = \frac{E I_x}{b}$$

$$D_y = \frac{E I_y}{a}$$

$$D_{xy} = \frac{G}{3} \left(\frac{h_1 d_1^3}{a} + \frac{h_2 d_2^3}{b} \right)$$

$$H = \frac{E t^3}{12(1 - \mu^2)} + D_{xy}$$

上面的 I_x 及 I_y 分别为顺 x 方向及 y 方向的肋的惯性矩, 这些肋是T形肋, 即应包括一部分盖板(如图1—7)的宽度, 而这宽度称为有效宽度 a_0 。

开口截面肋的有效宽度, 将于第二章论及。闭合截面纵肋的有效宽, 可参照第二章的原理从有关资料查得, 兹不赘述。^[4]

下面就图1—8的闭合肋讨论其有效抗扭刚度的计算。

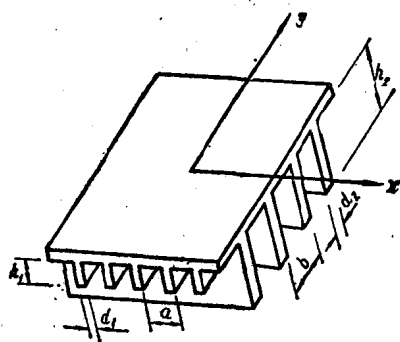


图 1—6

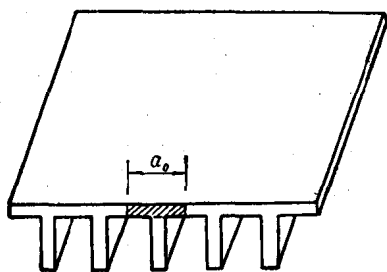


图 1—7

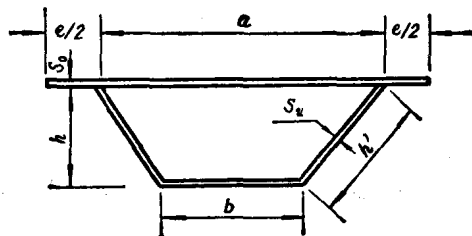


图 1—8

闭合肋的抗扭刚度和它的形状及板厚有关, 在钢桥面板中因为肋间盖板和肋上盖板产生弹性变形的缘故, 有效抗扭刚度 H 将小于肋的理论抗扭刚度, 其 H 值按下式计算:

$$H = \frac{1}{2} \frac{\mu G T}{a + e}$$

式中 G ——钢的剪切弹性模量;

T ——闭口截面肋的抗扭惯性矩 $= \frac{4F^2}{\sum \frac{u}{s}}$

F ——一个闭口肋包围的面积;

$$F = \frac{h(a+b)}{2},$$

u ——闭合肋的周长;

a ——闭合肋顶部宽度;

e ——肋间盖板净宽;