配合人教社新教材的新概念教辅

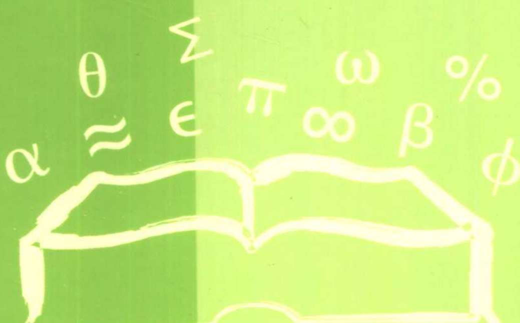
新高中数学

知识·思想·能力

高二年级 上

ZHISHI
SIXIANG
NENGLI

陈振宣
杨象富
主编



上海教育出版社
SHANGHAI
JIAOYU
CHUBANSHE

图书在版编目（CIP）数据

新高中数学. 高二. 上 / 陈振宣，杨象富主编. —上海：上海教育出版社，2002.9
（知识·思想·能力）
ISBN 7-5320-8286-5

Ⅰ.新... Ⅱ.①陈...②杨... Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第067222号

新高中数学
知识·思想·能力
高二(上)
陈振宣 杨象富 主编
上海世纪出版集团
上 海 教 育 出 版 社 出版发行
易文网：www.ewen.cc
(上海永福路123号 邮政编码：200031)
各地新华书店经销 上海华成印刷装帧有限公司印刷
开本 890×1240 1/32 印张 12.75 插页 4 字数 321,000
2002年8月第1版 2002年8月第1次印刷
印数 1-6,100本
ISBN 7-5320-8286-5/G·8336 定价：17.00元

陈振宣，1922年10月出生，杭州市人。大学数学系本科毕业，历任中学、中专数学老师、教研组长。文革前中教一级教师，曾于1982年-1992年任上海市数学会理事、上海市数学中心组成员。1981年被评为上海市先进教师，长期从事数学教育科研和思维科学研究。首先提出数学思维能力结构的猜想：

$\boxed{\text{数学知识与数学语言}} \times \boxed{\text{数学思维方法}} \times \boxed{\text{情感智力}} = \boxed{\text{数学思维能力}}$

曾主持教育部九五规划“脑潜能开发研究”分课组的研究，取得可喜的成果。1994年被中国管理科学研究院思维科学研究所评定为研究教授，应邀去全国六十处地区讲学。

已发表论文百余篇，著作四十种，代表作是《培养数学思维能力的探索》（上海教育丛书）

责任编辑 韩希塘
封面设计 陆 弦

杨象富，1934年8月出生，浙江宁海县人。1952年起在浙江省宁海中学（省一级重点中学）连续执教42年，曾任教学副校长，是浙江省第五、第六届人民代表。1981年被评为特级教师，1989年被授予中国数学奥林匹克高级教练称号。曾受聘参加全国高考和全国高中数学联赛命题工作，应邀到复旦大学、杭州大学、宁波大学、浙江教育学院以及天津、西安等地报告讲学百余场。

已发表教研论文80余篇（多篇获省市一等奖），科普文章40余篇，已在京、沪、浙、台出版著作（独著、主编或合编）37种，代表作为《杨象富数学教学经验》，苏步青教授为该书题写“春华秋实杨象富数学经验苏步青题”。

ISBN 7-5320-8286-5
9 787532 082865 >
易文网：www.ewen.cc
定 价：17.00元

前言

屈指算来，自英国工程师培利(J, Perry, 1854—1920)于 1901 年打响数学教改第一枪至今已越百年. 一百年来，各国的改革从未间断. 其间尤以席卷全球的“新数运动”为甚. 我国在 1960 年也曾有一个改革的高潮. “新数运动”虽以失败告终，却给人留下了难忘的启迪. 以近代数学观点重新认识和处理传统内容，吐故纳新成了改革的必由之路. 到 20 世纪末，逐步形成了改革的共识：

1. 改革是时代发展的需要，改革的迫切性、重要性，似已为所有国家所认识.

2. 获取数学知识与形成技能的过程，也是逐步构建数学思维能力空间和开发人脑潜能的过程. “它(数学教育)在培养和提高思维能力方面发挥着特有的作用”已是举世公认的真理. 因而提高思维能力成了数学教育的根本目的.

3. 数学应用日益广泛. 数学读、写、交流应用能力的高低影响个人前途与竞争能力，而培养数学高精尖人才的质量、数量更是关乎综合国力的重要因素之一.

在当今世界竞争日趋激烈之际，人人都应关心数学教育的未来.

我们作为数学教师，俩人教龄合计已近 110 年. 亲身经历多次变革和长期的数学教育科研的实践，无时不思为改革奉献绵薄以报效国家民族. 在前辈指引下，在反复科学实验探索中，初步摸索到数学思维能力空间的结构：

$$\boxed{\text{数学知识与数学语言}}\times\boxed{\text{数学思维方法}}\times\boxed{\text{情感智力}}$$

$$=\boxed{\text{数学思维能力空间}}$$

在教育中时时事事抓住这三个基,就能不断引发思维能力上的飞跃.

经过数年的深思、策划,在上海教育出版社韩希塘等同志支持下,编写《新高中数学　知识·思想·能力》,全书配合人教社的新教材,以知识语言为经,以方法、思想、文化为纬.每章都配有阅读材料,如数学家小传和言论、探究创新、应用实践、名题欣赏、数苑奇葩、趣题妙解等.重视科学性、趣味性、实用性、启迪性.全力拓展思维能力空间以提高学生的素质与创新意识.范例中既有原创性的新题,也有注入新意和新解的改编题,还采纳了高考与流行的好题,以提高学生学习兴趣和信心,使学生感受数学的奇美与魅力,随时引导读者从方法论的角度作概括,作反思,以收“以少御多”之效和减免“题海”之苦.

这是我俩一次新的尝试.我们唯一的希望是对读者有所启发,有所帮助.但限于我们的水平,谬误之处,热诚希望读者、专家指正,以利再版改正.

参加全书编写的除两位主编外,还有王永利、柴盛楣、贝跃敏、胡庆彪、潘亚奎、陈承灿、项宁、胡明华、王春丽、金飞龙、应瑞国、张晓方、范妙红、陈永箴、方兆进、唐惠康、张文娟、钟群、章志强、陈永莉、范人伊、张莉萍.

陈振宣、杨象富

2002.6

目录

第八章 圆锥曲线的方程

第六章　不等式

技巧是数学知识中最有价值的部分，比仅仅获得信息还要有价值得多．但是，我们应该怎样教技巧呢？学生只有通过模仿和实践才能学到技巧．

波利亚

一个正确的证明，即使没有画出图形，也仍然保持其论证的力量．

罗　素

数量关系中既有相等关系，也有不等关系．在现实问题中，根据相等关系通过建立方程(组)，从已知探索未知；在更多的实际问题中，为了探索多快好省的解决方案，那就离不开不等式的研究或混合组(既有不等式也有等式)的研究．例如

水果运输方式的选择

某果园欲将一批易坏的水果从产地运往 A 市，有汽车、火车、飞机三种运输工具可供选择．经过调查，已知的有关数据如下：

运输工具	运输速度(千米/时)	运输费用(元/千米)	装卸时间(小时)	总装卸费用(元)
汽车	50	8	2	1 000
火车	100	4	4	2 000
飞机	200	16	2	1 000

若这批水果运输途中的损耗为 300 元/时，试问选择哪种运输方式比较好，即运输过程中费用与损耗之和最小．

机器人工作的流水线

n 个机器人在一条流水线上加工某道工序，加工后，需送检验台检验合格后再送下一道工序．问检验台设置在流水线上什么位

置时，才能使机器人送验所走的距离之和最短？亦即耗时最少？

当我们学习了本章的知识之后，上述两个问题就不难解决了.

本章将从不等式的性质开始，进而学习不等式的证明、不等式的解法、含有绝对值的不等式以及丰富多彩的不等式的应用.

6.1 不等式的性质

以数轴为背景，按实数集的有序性，可得不等式的核心——“三一律”

$$\boxed{a-b>0\Leftrightarrow a>b,\ a-b=0\Leftrightarrow a=b,\ a-b<0\Leftrightarrow a<b}$$

从此出发可推演出不等式的所有性质. 课本已作了概括，这里从略.

⇨⇨⇨⇨⇨⇨ ⇦⇦⇦⇦⇦⇦

范　　例

例 1　试判断下列命题的正误，如果正确，给出证明；如果不正确，说明理由.

(1) 如 $a, b, c\in \mathbf{R}$，且 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；

(2) 如 $a, b, c\in \mathbf{R}$，且 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$；

(3) 如 $a>b$，n 为大于 1 的正奇数，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

[解]　(1) 不正确. 当 $c=0$ 时，$c^2=0$，$ac^2=bc^2$，因此本题结论不正确.

(2) 正确. 证明如下：

$\because ac^2>bc^2$，$\therefore c^2\neq 0$. 又因 $c\in \mathbf{R}$，

运用不等式的性质，必须考虑成立的条件.

$\therefore c^2>0$，$\frac{1}{c^2}>0$. 根据不等式性质4，

由 $ac^2>bc^2$ 得 $ac^2\cdot\frac{1}{c^2}>bc^2\cdot\frac{1}{c^2}$，

$\therefore a>b$.

(3) 正确. 证明如下：

若 $a>b>0$，则按不等式性质5，有 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（n 为大于1的正奇数）；

若 $a>0\geqslant b$，n 为大于1的正奇数，按根式的意义有　$\sqrt[n]{a}>0\geqslant\sqrt[n]{b}$；

若 $0\geqslant a>b$，则 $-b>-a\geqslant0$，从而按不等式的性质，有 $\sqrt[n]{-b}>\sqrt[n]{-a}$（$n$ 为大于1的奇数）. 因为 n 是大于1的正奇数，所以 $-\sqrt[n]{b}>-\sqrt[n]{a}$，再按不等式性质有　$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

综上所述，本题结论正确.

[说明]　在不等式性质的运用中，如果忽视成立的前提，上述3个命题，常易误判，应引起注意.

分三种情形，逐一证明.

例2　已知 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，求 $2\alpha-\frac{\beta}{2}$ 的取值范围.

不等式的运算要注意同向不等式才能相加.

[解]　$\because -\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，$2>0$，

$$\therefore\quad -\pi\leqslant2\alpha\leqslant\pi. \qquad ①$$

$\because 0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$-\frac{1}{2}<0$，

$\therefore 0\geqslant-\frac{\beta}{2}\geqslant-\frac{1}{2}\pi$，即

$$-\frac{1}{2}\pi\leqslant-\frac{\beta}{2}\leqslant0. \qquad ②$$

由①、②相加,可得

$$-\frac{3}{2}\pi\leqslant 2\alpha-\frac{\beta}{2}\leqslant\pi.$$

例 3 已知 $1\leqslant a-b\leqslant 2$, $13\leqslant 2a-\frac{b}{2}\leqslant 20$,求 $y=3a-\frac{b}{3}$ 的值域.

注意等号能否成立.

[分析] 令 $f_1=a-b$, $f_2=2a-\frac{b}{2}$,从此解出 a 与 b,代入 $y=3a-\frac{b}{3}$,得 $y=\frac{16}{9}f_2-\frac{5}{9}f_1$ 然后可按例 2 的方法,求出 y 的变化范围.

[解] 记 $f_1=a-b$, $f_2=2a-\frac{b}{2}$. 解得

$$a=-\frac{1}{3}f_1+\frac{2}{3}f_2,\ b=\frac{2}{3}f_2-\frac{4}{3}f_1.$$

$$\therefore y=3a-\frac{1}{3}b=\frac{16}{9}f_2-\frac{5}{9}f_1.$$

$$\because 1\leqslant f_1\leqslant 2,\ 13\leqslant f_2\leqslant 20,$$

$$\therefore -\frac{10}{9}\leqslant-\frac{5}{9}f_1\leqslant-\frac{5}{9},$$

$$\frac{208}{9}\leqslant\frac{16}{9}f_2\leqslant\frac{320}{9}.$$

也可设 $y=3a-\frac{1}{3}b=\alpha f_1+\beta f_2$,用待定系数法求 α, β.

两式相加:$22\leqslant\frac{16}{9}f_2-\frac{5}{9}f_1\leqslant 35$.

$$\therefore y\in[22,35].$$

[说明] 如果直接由 $1\leqslant a-b\leqslant 2$ 与 $13\leqslant 2a-\frac{b}{2}\leqslant 20$,解得 $7\leqslant a\leqslant 14$, $6\leqslant b\leqslant 12$,然后有 $21\leqslant 3a\leqslant 42$, $-4\leqslant-\frac{1}{3}b\leqslant-2$. 两式相加,得 $17\leqslant 3a-\frac{1}{3}b\leqslant 40$.

由于 $a=7$ 与 $b=6$ 不能同时成立,又 $a=14$ 与 $b=12$ 也不能同时成立,因而所得 $y\in[17,40]$ 是不精确的,是错误的.

比较 P^2+Q^2 与 x^2+y^2 的大小,可研究差 $x^2+y^2-(P^2+Q^2)$ 的正、负.

例 4　已知 $a>0$, $b>0$, $a+b=1$, x, y 为实数, $P=ax+by$, $Q=bx+ay$, 试比较 P^2+Q^2 与 x^2+y^2 的大小.

[解]

$$\begin{aligned}P^2+Q^2&=(ax+by)^2+(bx+ay)^2\\&=(a^2+b^2)(x^2+y^2)+4abxy\\&=[(a+b)^2-2ab](x^2+y^2)+4abxy\\&=(1-2ab)(x^2+y^2)+4abxy.\end{aligned}$$

$$\because\ x^2+y^2-(P^2+Q^2)=2ab(x^2+y^2)-4abxy$$
$$=2ab(x-y)^2\geqslant 0,$$

$\therefore\ x^2+y^2\geqslant P^2+Q^2$, 当且仅当 $x=y$ 时,等号成立.

指数式的大小比较.

例 5　若 $m>0$, 比较 m^m 与 2^m 的大小.

[分析]　注意到 $m^m>0$, $2^m>0$, 可作商进行比较.

[解]　当 $m=2$ 时, $m^m:2^m=\left(\dfrac{m}{2}\right)^m=1$,

此时, $$2^m=m^m;$$

当 $m<2$ 时, $m^m:2^m=\left(\dfrac{m}{2}\right)^m<1$,

此时, $$m^m<2^m;$$

当 $m>2$ 时, $m^m:2^m=\left(\dfrac{m}{2}\right)^m>1$,

此时, $$m^m>2^m.$$

[说明]　分类讨论是常用的思维方法,分类应不重,不漏,不空.这里分成 $m<2$, $m=2$, $m>2$ 三种情形,分别获得不同的结论.

例 6 已知 $1<a<b<a^2$，比较 $\log_a b$、$\log_b a$、$\log_a \frac{a}{b}$、$\log_b \frac{b}{a}$、$\frac{1}{2}$的大小.

对数式的大小比较.

[分析] 对数的大小比较，应联想对数函数的单调性，正负值区间，对数换底与运算.

[解] $\because 1<a<b$，

$\therefore \log_a b>\log_a a=1$，

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}<1.$$

由 $\log_a x(a>1)$是增函数.

换底公式.

$\because \frac{a}{b}<1$，$\therefore \log_a \frac{a}{b}<0$，

当 $x\in(0,1)$时，$\log_a x<0$.

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}>\frac{1}{\log_a a^2}=\frac{1}{2}, (\because 1<b<a^2)$$

对数运算法则.

$$0<\log_b \frac{b}{a}=1-\log_b a<1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

综上所述，可得

$$\log_a \frac{a}{b}<\log_b \frac{b}{a}<\frac{1}{2}<\log_b a<\log_a b.$$

例 7 已知 $0<\alpha<\pi$，试比较 $2\sin 2\alpha$ 与 $\cot \frac{\alpha}{2}$的大小.

三角函数的大小比较.

[分析] 先将自变量化为同角三角函数再作差比较.

[解] $2\sin 2\alpha-\cot \frac{\alpha}{2}$

$$=2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{4\sin^2\alpha\cos\alpha-(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{4\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)-(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{(1+\cos\alpha)[4\cos\alpha(1-\cos\alpha)-1]}{\sin\alpha}$$

$\because$

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$$=\frac{-4(1+\cos\alpha)\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2}{\sin\alpha},$$

$\because\ 0<\alpha<\pi,$

$\therefore\ \sin\alpha>0,\ 1+\cos\alpha>0,\ \left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0.$

当且仅当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，等号成立.

所以，$2\sin 2\alpha-\cot\frac{\alpha}{2}\leqslant 0.$

即 $$2\sin 2\alpha\leqslant\cot\frac{\alpha}{2}.$$

当且仅当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，等号成立.

例 8 设

$$A=\frac{2.012\,345\,678\,9}{(1.012\,345\,678\,9)^2+2.012\,345\,678\,9},$$

$$B=\frac{2.012\,345\,678}{(1.012\,345\,678)^2+2.012\,345\,678},$$

试比较 A 与 B 的大小.

A、B 难以直接比大小，不妨考虑比较其倒数的大小.

[解] 记 $a=2.012\,345\,678\,9,$

$b=2.012\,345\,678,$

则 $a>b>2$，并且

$$A=\frac{a}{(a-1)^2+a},\ B=\frac{b}{(b-1)^2+b}.$$

从而，有

$$\frac{1}{A}=\frac{a^2-2a+1+a}{a}=a+\frac{1}{a}-1,$$

$$\frac{1}{B}=\frac{b^2-2b+1+b}{b}=b+\frac{1}{b}-1.$$

$$\therefore\ \frac{1}{A}-\frac{1}{B}=a-b+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

$\because\ a>b>2,$

$\therefore\ a-b>0,$

$1-\frac{1}{ab}>0.$

$$= (a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right) > 0.$$

所以 $$\frac{1}{A} > \frac{1}{B} > 0.$$

故 $$A < B.$$

例 9 用水清洗一堆蔬菜上残留的农药. 对用一定量的水清洗一次的效果作如下假定：用 1 个单位量的水可洗掉蔬菜上残留农药的 $\frac{1}{2}$，用水越多洗掉的农药也越多，但总还有农药残留在蔬菜上. 设有 x 单位量的水清洗一次以后，蔬菜上残留的农药量与本次清洗前残留的农药量之比为函数 $f(x)$.

2001 年上海市高考试题，联系环境保护意识，贴近生活.

注意 $f(x)$ 的意义与用水量 x 之间的联系.

(1) 试规定 $f(0)$的值，并解释其实际意义；

(2) 试根据假定写出 $f(x)$应该满足的条件和具有的性质；

(3) 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，现有 $a(a>0)$单位量的水，可清洗一次，也可以把水平均分成 2 份清洗两次. 试问用哪种方案清洗后蔬菜上残留的农药量比较少？说明理由.

[解] (1) 规定 $f(0)=1$，表示未用水清洗时，蔬菜上的残留农药量保持原样.

(2) $f(x)$应满足

$$f(0)=1,\ f(1)=\frac{1}{2}，且在[0,\ +\infty)上，$$

$f(x)$是递减的，且 $0<f(x)\leqslant 1$.

(3) 用 a 个单位量的水清洗一次，残留的农药量为 $f_1=\frac{1}{1+a^2}$.