高等工科院校适用

高等数学学习方法指导

张爱国　杨逢建　主编

机械工业出版社

高等工科院校适用

高等数学学习方法指导

张爱国　杨逢建　主编

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据全国高等工程专科学校高等数学课程基本要求及教学大纲编写的高等数学辅助教材。主要内容有：高等数学每章的基本要求和难点、学习方法指导及典型例题分析。

该书对每部分内容作了核心内容与解题方法的归纳总结，指出了学习和应用时应注意的问题，例题的选择注意了内容和方法的典型性与代表性。本书既是高等院校工科学生学习高等数学的良师益友，也可作为高等院校数学教师的教学参考资料。

高等数学学习方法指导
张爱国　杨逢建　主编
*
责任编辑：高文龙　孙淑卿　版式设计：霍永明
封面设计：姚　毅　责任校对：姚培新
责任印制：卢子祥
*
机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
邮政编码：100037
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
机械工业出版社京丰印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售
*
开本 $787\times1092^{1}/_{32}$· 印张 11.75·字数 260 千字
1997 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
印数　0 001—6 000·定价：15.00 元
*
ISBN 7-111-05673-6/O.139（课）

ISBN 7-111-05673-6
9 787111 056737 >

前　　言

高等数学作为理工科学生的一门重要的基础课，其教学质量直接影响学生在校几年的学习和将来的发展。但由于近年来学时的减少，许多内容在课内来不及详细讲解，习题课也很少上，学生很难在课内学懂弄通需要掌握的全部内容和提高解题的技能技巧。本书是为解决这一矛盾而编写的，目的是使读者深入理解基本知识、抓住重点、突破难点、掌握必要的解[redacted]基础上得到适当的提高，以提高高等数学课程的[redacted]

本书每[redacted]本要求和该章难点（基本要求对概念理解的[redacted]"理解"、"了解"、"知道"三级区分；对[redacted]从高到低用"熟练掌握"、"掌握"、"会"或"能"三级区分）。对每部分内容作了核心内容与解题方法的归纳总结，指出了学习和应[redacted]要注意的问题，例题的选择注意了内容[redacted]方法的典型性与代表性。

参加本书编写的有：张爱国（编写第二、四、五章），杨逢建（编写第三、十、十二章），黄景干（编写第一章），陈大学（编写第七、十三章），刘洁纯（编写第六、十一章），蒋红艳（编写第八章），罗毅平（编写第九章），由张爱国、杨逢建任主编，陈大学、刘洁纯、黄景干任副主编。

钱必胜、周述洪老师审阅了本书全稿，并提出了许多宝贵意见，在此向他们表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，加之出书仓促，错误和遗漏的地方难免，恳请读者批评指正。

编者

1997年2月

目　　录

前言

第一章　矢量代数与空间解析几何 …………………………… 1

基本要求……………………………………………………… 1

难点…………………………………………………………… 1

第一部分　空间直角坐标系、矢量及其运算…………………… 2

第二部分　平面与直线 ……………………………………… 11

第三部分　曲面与曲线 ……………………………………… 24

第二章　极限与连续…………………………………………… 31

基本要求 …………………………………………………… 31

难点 ………………………………………………………… 31

第一部分　函数 ……………………………………………… 32

第二部分　极限……………………………………………… 38

第三部分　函数的连续性 …………………………………… 54

第三章　导数与微分…………………………………………… 63

基本要求 …………………………………………………… 63

难点 ………………………………………………………… 63

第一部分　导数的概念 ……………………………………… 64

第二部分　初等函数的导数 ………………………………… 73

第三部分　微分 ……………………………………………… 82

第四部分　罗必塔法则 ……………………………………… 90

第四章　不定积分……………………………………………… 96

基本要求 …………………………………………………… 96

难点 ………………………………………………………… 96

第一部分　原函数与不定积分 ……………………………… 96

第二部分　换元积分法………………………………………………… 104
第三部分　分部积分法………………………………………………… 117
第四部分　有理函数的积分…………………………………………… 125
第五章　定积分及其应用 ………………………………………… 134
基本要求………………………………………………………………… 134
难点……………………………………………………………………… 134
第一部分　定积分概念与性质………………………………………… 134
第二部分　换元法与分部积分法……………………………………… 141
第三部分　广义积分…………………………………………………… 150
第四部分　定积分的应用……………………………………………… 156
第六章　多元函数微分学 ………………………………………… 168
基本要求………………………………………………………………… 168
难点……………………………………………………………………… 168
第一部分　多元函数、极限与连续…………………………………… 168
第二部分　偏导数与全微分…………………………………………… 172
第三部分　复合函数微分法与隐函数微分法………………………… 180
第七章　重积分 …………………………………………………… 188
基本要求………………………………………………………………… 188
难点……………………………………………………………………… 188
第一部分　二重积分…………………………………………………… 188
第二部分　三重积分…………………………………………………… 203
第三部分　重积分的应用……………………………………………… 211
第八章　曲线积分与曲面积分 …………………………………… 214
基本要求………………………………………………………………… 214
难点……………………………………………………………………… 214
第一部分　对坐标的曲线积分………………………………………… 214
第二部分　曲面积分…………………………………………………… 230
第九章　常微分方程 ……………………………………………… 239
基本要求………………………………………………………………… 239

难点 …… 239
第一部分　微分方程的基本概念，一阶方程 …… 240
第二部分　二阶微分方程与可降阶微分方程 …… 255
第十章　数值计算 …… 270
第十一章　导数的应用 …… 287
基本要求 …… 287
难点 …… 287
第一部分　微分中值定理 …… 287
第二部分　利用导数研究函数的性质，作函数的图形 …… 293
第三部分　多元函数微分学的应用 …… 311
第十二章　数学模型 …… 322
第十三章　无穷级数 …… 336
基本要求 …… 336
难点 …… 336
第一部分　常数项级数 …… 337
第二部分　幂级数 …… 348
第三部分　傅里叶级数 …… 358
第四部分　级数的应用 …… 365
参考文献 …… 370

第一章　矢量代数与空间解析几何

基本要求

1）理解空间直角坐标系。

2）理解矢量的概念。

3）掌握矢量的运算（线性运算，点乘与叉乘）。会求两矢量的夹角。掌握两矢量平行与垂直的充要条件。

4）熟悉单位矢量、方向余弦及矢量的坐标表示式，掌握用坐标表示式进行矢量的运算。

5）了解平面方程与直线方程，会根据已知条件求它们的方程。

6）了解曲面方程的概念。知道常用二次曲面的方程及其图形（不包含双曲抛物面）。知道以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面的方程及其图形。

7）知道空间曲线的一般方程与参数方程。

8）会求简单空间曲线在坐标平面上的投影。

难点

1）矢量积的概念、计算及其在求平面、直线方程中的应用。

2）空间曲面的方程与图形的对应关系。

3）由空间曲面包围的空间图形的画法。

第一部分　空间直角坐标系、矢量及其运算

一、学习方法指导

空间解析几何是用代数方法研究空间几何图形问题，利用点的坐标和矢量的大小与方向，来确定空间点的方位；利用点的变化来确定空间图形的形状。因此，点的坐标与矢量及其运算对研究空间几何问题至关重要，必须很好地掌握。

1. 空间直角坐标系，点的坐标

（1）**关于坐标系的说明**　三条相互垂直地交于原点的数轴构成一个空间直角坐标系，它可以是右手系，也可以是左手系，但应用时常采用右手系。一般教材中的有关方程都是在右手系中建立的，若采用左手系，许多图形的标准方程都会有所变化。明确这一点，对空间作图非常重要。当空间图形不好画，或画出来的图形立体感不强时，常可通过将三坐标轴的位置作适当调整来化难为易，增强图形的立体感。但应注意，调整坐标轴后的坐标系仍应为右手系，否则可能画出错图来，如图 1-1 所示。

（2）**点的坐标及其特点**　设 $Oxyz$ 是空间直角坐标系，M 是空间的一个点。利用点 M 在三坐标轴上的投影，可以得到唯一的有序数组（x，y，z）与点 M 相对应，称此有序数组为点 M 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标。特殊位置上的点的坐标有一定的特点，记住这些特点，对想象空间图形和作图有益。

某一坐标轴上的点其坐标中另两个坐标变量取值为 0，如 y 轴上的点的坐标为（0，y，0）；某一坐标面上的点其坐

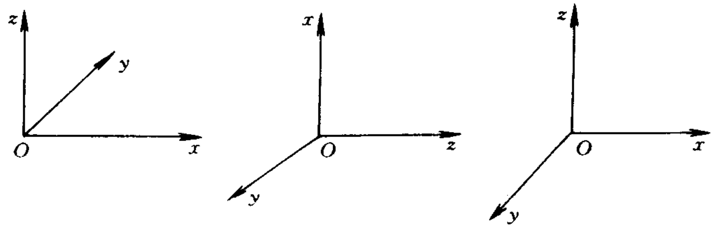

图 1-1

标中第三个坐标变量取值为 0，例如，xOz 平面上的点的坐标为 $(x, 0, z)$。

各卦限内的点的坐标有确定的符号，自第一至第八卦限的点的坐标的符号依次为（＋，＋，＋）、（－，＋，＋）、（－，－，＋）、（＋，－，＋）、（＋，＋，－）、（－，＋，－）、（－，－，－）、（＋，－，－）。

点 $M(x, y, z)$ 关于某坐标面的对称点可通过改变另一个坐标的符号得到，如点 M 关于 xOy 面的对称点为 $M_1(x, y, -z)$；点 $M(x, y, z)$ 关于某坐标轴的对称点可通过改变另两个坐标的符号得到，如点 M 关于 z 轴的对称点为 $M_2(-x, -y, -z)$；点 $M(x, y, z)$ 关于原点的对称点要改变三个符号，即为 $M_3(-x, -y, -z)$。

2. 矢量及其运算

(1) **矢量的有关概念**　有大小又有方向的量称为矢量。矢量的大小称为矢量的模。模长为 1 的矢量称为单位向量。模等于 0 的矢量称为零矢量，记作 $\boldsymbol{O}$，零矢量的方向不定。与 a

大小相等、方向相反的矢量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负矢量，记为 $-\boldsymbol{a}$。本课程中讨论的矢量与起点无关，称为自由矢量。即当两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同时，有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模记为 $|\boldsymbol{a}|$，以点 M_1 为起点、以点 M_2 为终点的向量记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$。

在书写时，为避免混淆数量与矢量，将矢量排写黑体或在矢量的上方加上矢量符“→”。

（2）**矢量的坐标表示** 将矢量 $\boldsymbol{a}$ 的起点移至原点，其终点坐标（a，a_y，a_z）正好是矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 x、y、z 三轴上的投影。称 $a_x\boldsymbol{i}$、$a_y\boldsymbol{j}$、$a_z\boldsymbol{k}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 在 x、y、z 三轴方向的分矢量，这里 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为三轴正向相同方向的单位矢量，利用投影，$\boldsymbol{a}$ 可表示为分解式（称为 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式）：

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\{a_x、a_y、a_z\}$$

起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的矢量有坐标表示式：

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1、y_2-y_1、z_2-z_1\}$$

（3）**矢量的和差** 将两矢量的起点移到同一点，以此两矢量为邻边的平行四边形的两条对角线矢量中，以公共起点为起点的是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，另一条是差矢量（指向被减矢量的终点）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 如图 1-2 所示。

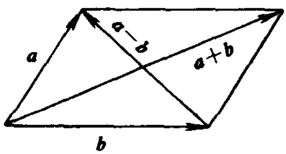

图 1-2

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$

$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z+b_z\}$$

（4）**数乘矢量** 实数 λ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 相乘仍为矢量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$。

其模$|\lambda \boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$。当$\lambda>0$时,$\lambda \boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$同向;当$\lambda<0$时,$\lambda \boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$反向;当$\lambda=0$时,$\lambda \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$。

设$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,则

$$\lambda \boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$$

注意:若$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则$\boldsymbol{b}\parallel \boldsymbol{a}\Longleftrightarrow \boldsymbol{b}=\lambda \boldsymbol{a}$

(5) **数量积** 两矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的正向的夹角$\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$称为矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角,记为$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$。

设$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积(点积)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\end{aligned}$$

(6) **矢量积** 若矢量$\boldsymbol{c}$满足:(i)$\boldsymbol{c}$垂直于$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$所在平面,且从$\boldsymbol{a}$到$\boldsymbol{b}$成右手系;(ii). $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,则称$c$为矢量$a$与$b$的矢量积(叉积),记为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left\{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix} \begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix} \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right\}$$

为避免出错,可将$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$并排写成:

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$$

$$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$$

此时,遮住第一列,剩下的四个数按原相对位置排成第一个行列式;遮住第三列,剩下的四个数按原相对位置排成第三行列式;再将这两个行列式的中间两列平移到第二个行列式中(不删除原列)即可。

数量积与向量积满足:

1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

2)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ (λ为实数)

3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

5) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

特别注意：

1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 为数量，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为矢量；

3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$.

后一关系在解题时很有用。

(7) **模与夹角、方向角** 设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则 $\boldsymbol{a}$ 的模

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角之余弦：

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$$

且有：

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$$
$$\Longleftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$
$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{O}$$
$$\Longleftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

上式中某分母为 0 时规定相应的分子为 0。

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$$

满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

特别，当 a 为单位矢量时，显然有

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\{a_x,a_y,a_z\}$$

此时，$\boldsymbol{a}$ 的坐标即其方向余弦。

任一非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 存在与之同向的单位矢量

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

（8）**空间点距** 空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的距离

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特别，点 $M(x,y,z)$ 到原点的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

二、典型例题分析

例 1 在图 1-3 中的平行六面体上，已知 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{BF}$ 试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示矢量 $\overrightarrow{AG}$、$\overrightarrow{FD}$、$\overrightarrow{EC}$ 和 $\overrightarrow{BH}$。

解 如图所示

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}&=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}\\&=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}\\&=\overrightarrow{BF}+(-\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{BC}\\&=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FD}&=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD}\\&=-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC}&=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}\\&=(-\overrightarrow{BF})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\\&=-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH}&=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DH}\\&=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

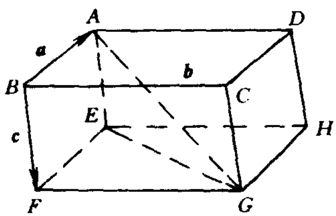

图 1-3

例 2 设 $\boldsymbol{a}=\{3,5,-2\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,1,4\}$，问 λ 与 μ 有怎样的关系，才能使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直。

解 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 垂直于 z 轴 $\Longleftrightarrow \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{k}$

$$\Longleftrightarrow(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{k}=0$$

又 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\{3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu\}$，$\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$

故该条件等价于 $(-2\lambda+4\mu)\cdot1=0$，即 $\lambda=2\mu$。

例 3 已知 $\boldsymbol{a}=\{1,1,-4\}\boldsymbol{b}=\{1,-2,2\}$，求

(1)$3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$； (2)$(3\boldsymbol{a})\cdot(4\boldsymbol{b})$； (3)$(2\boldsymbol{a})\times(-\boldsymbol{b})$；

(4)$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$； (5)$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

解 (1)
$$3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=3\{1,1,-4\}-4\{1,-2,2\}=\{-1,11,-20\}$$

(2)
$$(3\boldsymbol{a})\cdot(4\boldsymbol{b})=12(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=12[1\times1+1\times(-2)+(-4)\times2]=-108$$

(3)
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left\{\begin{vmatrix}1&-4\\-2&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4&1\\2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix}\right\}=\{-6,-6,-3\}$$

故
$$(2\boldsymbol{a})\times(-\boldsymbol{b})=-2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\{12,12,6\}$$

(4)由(3)得

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+(-3)^2}=9$$

(5)$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{18}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{9}$，故

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-9}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

例 4 已知 $\boldsymbol{a}=\{2,2,1\}$，$\boldsymbol{b}=\{4,5,3\}$，求矢量 $\boldsymbol{c}$，使 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，且 $|\boldsymbol{c}|=2$

解 由已知条件 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ 可知 $\boldsymbol{c}\parallel\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，又

$$a\times b=\left\{\begin{vmatrix}2&1\\5&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&2\\4&5\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\{1,-2,2\}$$

$$|a\times b|=3$$

故 $|c|=|\lambda(a\times b)|=|\lambda|\cdot|a\times b|=3|\lambda|$

令 $|c|=2$，得

$$3|\lambda|=2$$

$$\Longrightarrow\lambda=\pm\frac{2}{3}$$

所以 $$c=\pm\frac{2}{3}\{1,-2,2\}$$

例 5 设 $|a|=2$，$|b|=5$，$(a,b)=\dfrac{2\pi}{3}$，又 $A=\lambda a+17b$，$B=3a-b$，确定系数 λ，使 $A\perp B$。

解 由 $A\perp B$ 知 $A\cdot B=0$，即

$$(\lambda a+17b)\cdot(3a-b)=0$$

$$\Longrightarrow\quad 3\lambda|a|^2+(51-\lambda)a\cdot b-17|b|^2=0$$

$$\Longrightarrow\quad 12\lambda+(51-\lambda)\cdot 2\cdot 5\cdot\cos\frac{2\pi}{3}-17\times 5^2=0$$

$$\Longrightarrow\quad \lambda=40$$

例 6 若矢量 $a+3b$ 垂直于矢量 $7a-5b$，矢量 $a-4b$ 垂直于矢量 $7a-2b$，求 a 与 b 的夹角。

解 由题意及两矢量垂直的条件有

$$\begin{cases}(a+3b)\cdot(7a-5b)=0\\(a-4b)\cdot(7a-2b)=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}7|a|^2+16a\cdot b-15|b|^2=0 & (1)\\7|a|^2-30a\cdot b+8|b|^2=0 & (2)\end{cases}$$

(1)−(2)得 $$2a\cdot b=|b|^2$$