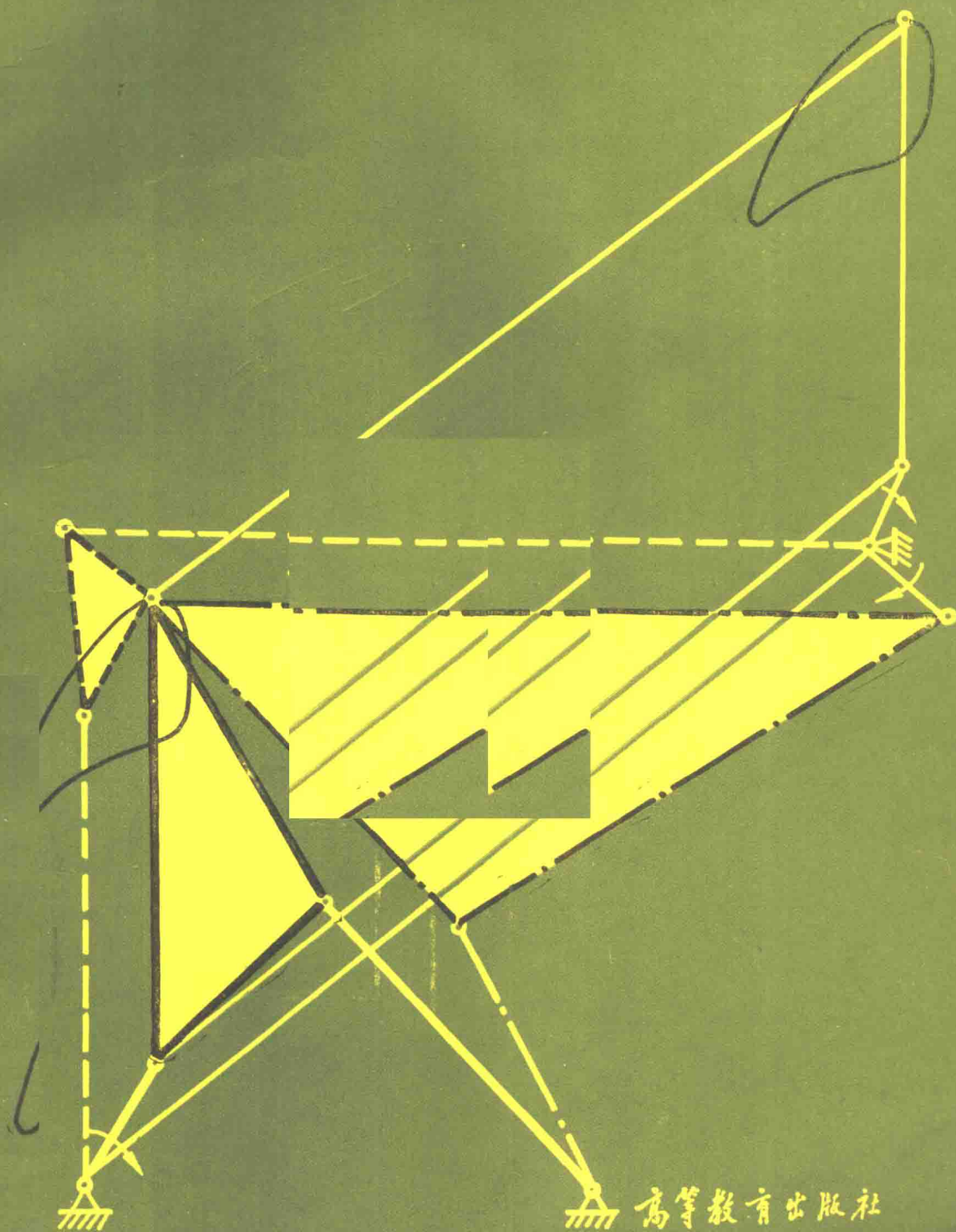


高等学校教学参考书

平面连杆机构综合

曹龙华 蒋希成 编



高等教育出版社

高等学校教学参考书

平面连杆机构综合

曹龙华 蒋希成 编

高等教育出版社

内 容 简 介

本书在高等学校工科机械类机械原理教材的基础上,对平面连杆机构的综合作了深入的介绍。

全书共十二章。

第一、九、十章为运动分析的内容,除介绍了用几何法、向量投影法和复数法进行机构运动分析外,还介绍了加速度瞬心、拐点圆、变向圆和欧拉-萨伐利方程等内容。

第二至八章为用几何法进行尺度综合,其中第二至六章介绍了用极三角形、圆心曲线和圆点曲线进行机构综合,第七章介绍了用点位缩减法进行机构综合,第八章介绍了用极位曲线进行机构综合。

第十一、十二章为代数法进行尺度综合,其中第十一章介绍了用函数逼近法进行机构综合,第十二章对复数法、位移矩阵法综合机构作了简介。

本书可作为高等学校工科机械类专业机械原理课程的教学参考书和研究生的教材,也可供有关教师和工程技术人员参考。

*

高等学校教学参考书

平面连杆机构综合

曹龙华 蒋希成 编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

中国青年出版社印刷厂印装

*

开本787×1092 1/16 印张14 字数317,000

1990年6月第1版 1990年6月第1次印刷

印数 0001—1 470

ISBN 7-04-001005-4/TH·162

定价 2.85元

前 言

本书为“高等学校工科基础课程1981~1985年教材编写规划”中的一本机械原理专题教学参考书,介绍了平面连杆机构的综合问题。

鉴于高等学校工科机械类专业的机械原理教材中对平面连杆机构几何尺寸综合的内容叙述较简,本书着重介绍了这方面的内容。分析和综合连杆机构的方法大致可分为几何法(图解法)和代数法(解析法),本书第一至八章内容为几何法,第九至十二章内容为代数法。其中,第一、九、十章是介绍运动分析;其他各章都是阐述几何尺寸综合,其内容为:

第二至六章为用极三角形、圆心曲线和圆点曲线综合:(1)实现给定连杆位置;(2)连架杆间的对应位移;(3)演示给定轨迹等问题;

第七章除介绍了用点位缩减法综合上述三问题外,还介绍了用该法综合实现“连杆点的位置与连架杆位移间的对应”和“两连架杆间给定传动比”的问题;

第八章为用极位曲线综合机构;

第十一章介绍了用函数逼近法进行机构综合的问题;

第十二章对复数法、位移矩阵法综合机构作了简介。

本书第二至八章中某些图解法的理论依据的证明见附录,但有些证明因涉及射影几何学的问题,限于篇幅,本书未作证明,仅指出参考文献,供读者查阅。

本书的第一至八章和附录由曹龙华编写、第九至十二章由蒋希成编写,并由曹龙华主编。

本书承中国农业工程大学孙可宗教授悉心审阅,并提出了许多宝贵意见,谨在此表示衷心的感谢。

限于编者水平,书中错误、不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

编 者

1987年5月于西安交通大学

目 录

第一章 运动学基础	1	§ 6-1 间歇运动机构的近似综合	57
§ 1-1 构件上点的速度和加速度	1	§ 6-2 具有较高停歇质量的间歇运动机构综合	58
§ 1-2 机构的速度和加速度分析	4	§ 6-3 满足给定停歇时间的间歇运动机构综合	60
§ 1-3 速度瞬心、瞬心线、加速度瞬心、切点圆和变向圆	6	§ 6-4 直线机构综合	62
§ 1-4 欧拉(Euler)-萨伐利(Savary)方程	8	第七章 点位缩减法	65
第二章 极三角形和实现给定连杆三个有限接近位置的综合	14	§ 7-1 基本概念	65
§ 2-1 基本概念和术语	14	§ 7-2 演示给定轨迹的机构综合	68
§ 2-2 极三角形	15	§ 7-3 实现给定构件位置的机构综合	75
§ 2-3 实现连杆三个有限接近位置的综合	18	§ 7-4 实现连杆上点的给定位置与构件对应位移的机构综合	76
第三章 圆心曲线、圆点曲线和实现连杆四、五个有限接近位置的综合	24	§ 7-5 实现两连架杆间对应位移的机构综合	79
§ 3-1 圆心曲线和圆点曲线的意义	24	第八章 用极位曲线综合平面连杆机构	91
§ 3-2 圆心曲线 m_{1234}	25	§ 8-1 基本概念和方法	91
§ 3-3 圆点曲线 k_{1234}	31	§ 8-2 平面四杆机构的极位曲线	95
§ 3-4 实现连杆四个有限接近位置的综合	35	§ 8-3 用极位曲线综合机构的步骤	104
§ 3-5 实现连杆五个有限接近位置的综合和布尔梅斯特圆点	38	§ 8-4 演示给定轨迹的机构综合	105
§ 3-6 环点曲线和环心曲线	39	§ 8-5 实现给定构件位置的机构综合	111
第四章 实现两连架杆对应位移的综合	41	§ 8-6 实现两构件间对应位置的机构综合	115
§ 4-1 相对极	41	第九章 用向量投影法进行机构的运动分析	126
§ 4-2 实现两连架杆对应角位移的铰链四杆机构综合	42	§ 9-1 向量运算的基本知识	126
§ 4-3 实现两连架杆对应位移的柄滑曲块机构综合	44	§ 9-2 构件和几种 II 级组的运动分析	127
§ 4-4 按死点位置综合铰链四杆机构	46	§ 9-3 机构的运动分析	132
第五章 近似实现给定轨迹的综合	52	第十章 用复数向量法进行机构的运动分析	134
§ 5-1 连杆曲线的方程式	52	§ 10-1 复数向量	134
§ 5-2 近似实现给定轨迹的铰链四杆机构综合	53	§ 10-2 向量三角形的几种解法	136
第六章 间歇运动机构和直线机构的综合	57	§ 10-3 通过解三角形进行机构的运动分析	139
		第十一章 用函数逼近法进行机构综合	142

§ 11-1 概述	142
§ 11-2 实现给定两连架杆对应位移关系的 机构综合——传动机构综合	144
§ 11-3 实现给定轨迹的机构综合——导向 机构综合	169
§ 11-4 给定连杆位置的机构综合	186

第十二章 进行机构综合的其他解析方

法简介	191
§ 12-1 用复数法进行机构综合	191
§ 12-2 用位移矩阵法进行机构综合	193
附录	213
参考文献	216

第一章 运动学基础

§1-1 构件上点的速度和加速度

一、构件上点的速度和加速度①

1. 速度

如图 1-1 所示, 经过 Δt 时间间隔, 构件上一点自位置 A 沿导轨运动到位置 A' 。以 A 为起点, A' 为终点作向量 $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AA'}$ 即为该点在 Δt 时间间隔内的位移。如果把 Δt 时间取为无限小, 这样点 A' 无限接近于点 A , 则 $\overrightarrow{AA'}$ 与导轨上线段 $\widehat{AA'} = \Delta s$ 趋重合, 故该点的瞬时速度 v_A 为:

$$v_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{AA'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (1-1)$$

速度 v_A 的方向沿导轨上点 A 处的切线方向。

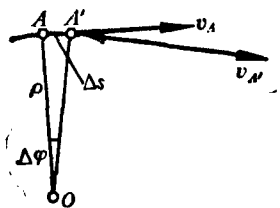


图 1-1

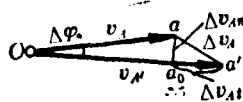


图 1-2

2. 加速度

设 t 瞬时构件上的点在位置 A 处的速度为 v_A (图 1-1), 经过 Δt 时间间隔, 该点运动到 A' , 速度为 $v_{A'}$, 如果 Δt 趋近于零, 则得该点在 t 瞬时的加速度, 用 a_A 表示:

$$a_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{A'} - v_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_A}{\Delta t} = \frac{dv_A}{dt} \quad (1-2)$$

除作直线运动外, 在一般情况下, 速度的大小和方向都是随时间而变的, 故可将 Δv_A 分解为两部分: 在向量 $v_{A'}$ 上截取大小等于 v_A 的线段 Oa_0 (见图 1-2), 余下的线段 $\overrightarrow{a_0a'} = \Delta v_{At}$ 就代表速度大小的改变量, 而 $\overrightarrow{aa_0} = \Delta v_{An}$ 就是速度方向的改变量, 故得:

$$\Delta v_A = \Delta v_{At} + \Delta v_{An}$$

由此加速度的表达式可写成

$$a_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{At}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{An}}{\Delta t} = a'_A + a''_A \quad (1-3)$$

式中 a'_A 为切向加速度; a''_A 为法向加速度。从图 1-2 可知, 当 $\Delta \varphi$ 很小时

$$\Delta v_{An} = v_A \cdot \Delta \varphi$$

① 本节讨论的构件上点的速度和加速度, 除有说明外, 都是指相对机架而言的。

而

$$v_A = \frac{ds}{dt} = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \rho \cdot \omega$$

所以法向加速度 a_A^n 的模:

$$a_A^n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \rho \cdot \omega \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \rho \cdot \omega^2 \quad (1-4)$$

或

$$a_A^n = \frac{\rho^2 \cdot \omega^2}{\rho} = \frac{v_A^2}{\rho} \quad (1-5)$$

a_A^n 的方向始终垂直于向径 AO (图 1-1)。切向加速度 a_A^t 是 Δt 时间间隔的始、终两瞬时的速度差 (即图 1-2 中 $a_0 a' = \Delta v_{At}$) 与 Δt 之比的极限值, 则

$$a_A^t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a_0 a'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{At}}{\Delta t} = \frac{dv_{At}}{dt} \quad (1-6)$$

a_A^t 的方向沿导轨上点 A 处的切线方向。

综上所述, 构件上一点沿某一导轨运动时的加速度是其法向加速度和切向加速度的向量和, 其模可写成:

$$a_A = \sqrt{a_A^n^2 + a_A^t^2} \quad (1-7)$$

二、构件上的点沿转动导轨运动时的加速度

构件上一点以 A 为起始点沿导轨 k 运动 (图 1-3), 在两个连续的时间间隔内, 该点先运动至 B 点, 再至 C 点。与此同时, 导轨以角速度 ω 运动至位置 A' 、 B' 、 C' , 再至位置 A'' 、 B'' 、 C'' 。图中 AB' 和 $B'C''$ 是该点运动的合成轨迹, 即该点在两个时间间隔内沿轨迹 a 的运动。按 [4], 该点的加速度为:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\overrightarrow{B'C''} - \overrightarrow{AB'}}{dt^2} = \frac{(\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C''}) - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'})}{dt^2} \\ &= \frac{(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB})}{dt^2} + \frac{(\overrightarrow{B'B''} - \overrightarrow{BB'})}{dt^2} + \frac{(\overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{C'C''} - \overrightarrow{B'B''})}{dt^2} \end{aligned}$$

上式中 $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB})/dt^2$ 是该点沿导轨 k 运动的相对加速度, 以 a' 表之; $(\overrightarrow{B'B''} - \overrightarrow{BB'})/dt^2$ 作为导轨上与该点位置重合的点的加速度, 称为导轨加速度, 以 a'' 表之。当导轨作平动时, 后两项的值为零, 故这时的加速度为:

$$a = a' + a''$$

在一般情况下, 后两项为:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{B'M} - \overrightarrow{MC'} \\ \overrightarrow{C'C''} - \overrightarrow{B'B''} &= \overrightarrow{C'C''} - \overrightarrow{NC''} - \overrightarrow{C''N} \\ \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{C''N} &= \overrightarrow{MN} \\ \frac{\overrightarrow{MN}}{dt^2} &= \frac{2\overrightarrow{BC}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}$$

若把时间间隔取成无限小, 则点 B 将无限接近点 A ; 点 C 将无限接近点 B , 上式成为:

$$\frac{2\overrightarrow{BC}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\overrightarrow{AB}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

式中 \overrightarrow{AB}/dt 是该点沿导轨的相对速度 v_r ; $d\varphi/dt$ 是导轨 k 的角速度 ω , 则上式为:

$$\frac{2\overrightarrow{AB}}{dt} \cdot \frac{d\omega}{dt} = 2v_r \cdot \omega = a^k$$

a^k 称为哥氏加速度,其方向是以 v_r 的方向顺 ω 的转向旋转 90° 定出。

三、图解法求法向加速度 a^n 和哥氏加速度 a^k

1. 法向加速度

图 1-4 所示的构件 A_0A 上的点 A 绕点 A_0 转动的速度为 v_A , 设以向量 $\overrightarrow{AA'}$ 表之, 则点 A 的法向加速度可如下求出: 将向量 $\overrightarrow{AA'}$ 顺 ω 的转向旋转 90° , 得转向速度 v_A^l 的向量 \overrightarrow{AK} 。过点 A 任作一直线, 并分别由点 A_0 和 K 向直线上某点作射线。设两射线 A_0X 、 KX 交于该直线上的 X 点; 再过点 K 作 A_0X 的平行线交直线于点 Y ; 过 Y 作 KX 的平行线 YZ 交 A_0A 于 Z , 则 \overrightarrow{AZ} 即为点 A 法向加速度所对应的向量。这是因为:

$$\frac{AZ}{AK} = \frac{AY}{AX} = \frac{AK}{AA_0}$$

所以

$$AZ = \frac{AK^2}{AA_0} = \frac{v_A^2 \cdot \mu_l}{l_{AA_0} \cdot \mu_v^2}$$

式中 l_{AA_0} 表示构件 AA_0 的实际长度; μ_l 为长度比例尺 (m/mm); μ_v 为速度比例尺 (m/s·mm)。故 a_A^n 为:

$$a_A^n = AZ \cdot \frac{\mu_v^2}{\mu_l} \quad (1-8)$$

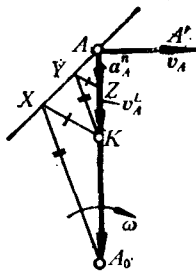


图 1-4

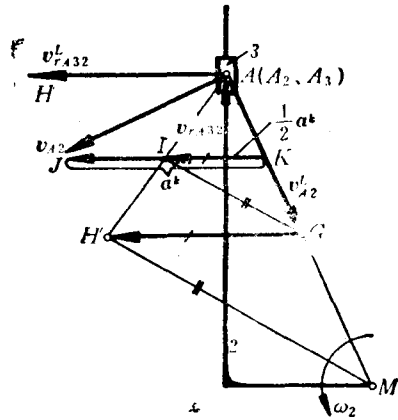


图 1-5

2. 哥氏加速度

图 1-5 中, 构件 3 上的点 A_3 沿直线导轨 2 运动。在 \square 示瞬时, 点 A_3 对导轨 2 的相对速度是 v_{rA32} , 导轨 2 绕点 M 的角速度是 ω_2 , 其上与点 A_3 重合的点 A_2 的速度大小为 $v_{A2} = \omega_2 \cdot l_{MA}$ 。现顺 ω_2 的转向作转向速度 v_{A2}^l 、 v_{A32}^l , 则得两转向速度的向量 \overrightarrow{AG} 、 \overrightarrow{AH} 。

平移转向速度 v_{A32}^l 的向量 \overrightarrow{AH} , 使其与 v_{A2}^l 的向量 \overrightarrow{AG} 相加 (平移后 v_{A32}^l 的向量以 $\overrightarrow{GH'}$ 表之)。连接 AH' 及 MH' , 再作 GI 平行于 MH' 且交 AH' 于点 I ; 从 I 作 IK 平行于 GH' 且交 AM 于点 K , 则有

$$\frac{KI}{GH'} = \frac{AI}{AH'} = \frac{AG}{AM}$$

$$KI = GH' \frac{AG}{AM} = \frac{v_{rA32}}{\mu_v} \frac{v_{A2} \cdot \mu_l}{l_{MA} \cdot \mu_v} = v_{rA32} \omega \frac{\mu_l}{\mu_v^2} = \frac{1}{2} a^k \frac{\mu_l}{\mu_v^2}$$

所以

$$a^k = 2KI \cdot \frac{\mu_v^2}{\mu_l} = KJ \cdot \frac{\mu_v^2}{\mu_l} \quad (1-9)$$

如前述,其方向是以 v_{rA32} 的方向顺 ω_2 的转向旋转 90° 定出(图 1-5)。

§ 1-2 机构的速度和加速度分析

一、铰链四杆机构的速度和加速度分析

图 1-6 示出一铰链四杆机构,图中给出主动件 A_0A 的转向和图示位置时点 A 的转向速度 v_A^l (以向量 \overrightarrow{AK} 表之)及切向加速度 a_A^t 。下面用图解分析该机构的速度和加速度。

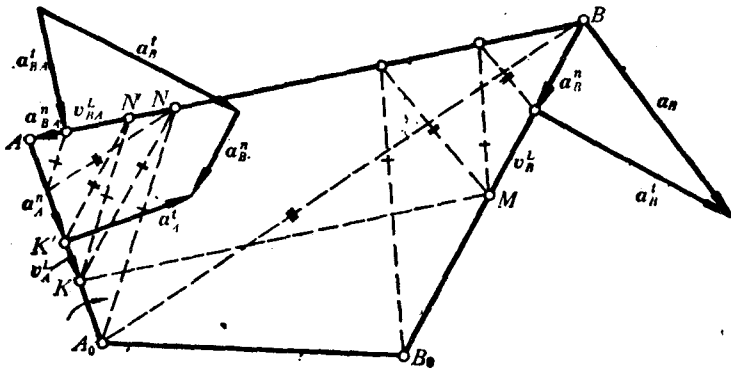


图 1-6

根据速度多边形原理

$$v_B = v_A + v_{BA}$$

点 B 的转向速度是沿 BB_0 方向的,故由点 K 作 BB_0 的平行线交 AB 于点 N , AKN 即为一转向速度多边形。从点 K 作 AB 的平行线 KM 交 BB_0 于点 M , 向量 $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{NK}$ 即为点 B 的转向速度 v_B^l , 而 \overrightarrow{NA} 则为转向相对速度 v_{BA}^l 对应的向量。

按图 1-4 的方法,作出点 A 、 B 及点 B 相对于点 A 的法向加速度 a_A^n 、 a_B^n 、 a_{BA}^n 。 a_A^n 的作法如下:为使图面的线条不致太多,可把 AB 线看作是过点 A 所作的任一直线,同样连点 A_0 、 N , 把 A_0N 看作是由点 A_0 向过点 A 作出的直线 AB 所引的射线。定出点 N 后,连点 K 、 N , 并作 KN' 平行于 A_0N , 再从点 N' 作 $N'K'$ 平行于 NK , 则向量 $\overrightarrow{AK'}$ 就是点 A 在图示位置的法向加速度 a_A^n 。 a_B^n 、 a_{BA}^n 的作法与 a_A^n 的作法类同(见图 1-6)。由于切向加速度 a_A^t 、 a_{BA}^t 的方位都已知,故可列出如下向量方程求解:

$$a_B^n + a_B^t = a_A^n + a_A^t + a_{BA}^n + a_{BA}^t$$

按上式作加速度多边形图。该图可直接画在机构简图上(见图 1-6)。

二、曲柄滑块机构的速度和加速度分析

一曲柄滑块机构如图 1-7 所示,给出曲柄的转向及图示位置时铰链中心 A 的转向速度

v_A^L (以向量 \overline{AK} 表之) 和切向加速度 a_A^t 。

与前述作法类似, 自点 K 作 AB 的平行线交导轨的垂直线 BM 于点 M , 向量 \overline{BM} 即为 v_B^L (点 B 的转向速度)。再自点 K 作 KN 平行于 BM 且交 AB 的延长线于点 N , NAK 构成转向速度多边形图, 则

$$v_B^L = v_A^L + v_{BA}^L$$

其中向量 \overline{NA} 即为 v_{BA}^L 。

点 A 及点 B 相对于点 A 的法向加速度 a_A^n 、 a_{BA}^n 仍可按图 1-4 的作法求出。由于 a_{BA}^t 和滑块的加速度 a_B 的方位是已知的, 可列出如下的向量方程来求解:

$$a_B = a_A^n + a_A^t + a_{BA}^n + a_{BA}^t$$

按上式可作出加速度多边形图, 见图 1-7。

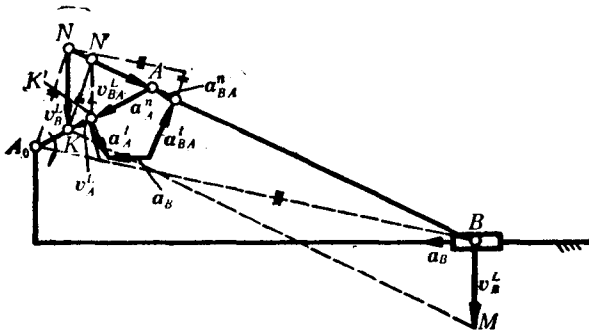


图 1-7

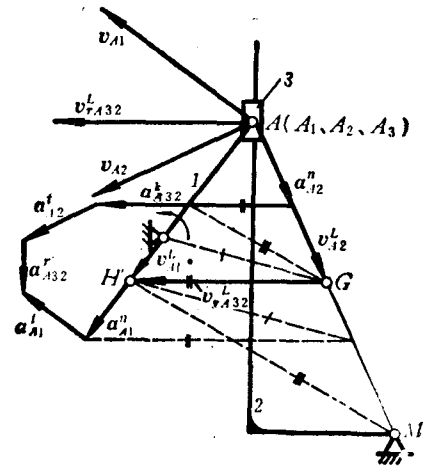


图 1-8

三、导杆机构的速度和加速度分析

若图 1-5 中滑块 3 在点 A 与曲柄 1 铰接, 则就形成图 1-8 所示的曲柄导杆机构。以 1 为主动件, 给定主动件的转向和图示位置时点 A 的转向速度 v_{A1}^L (以向量 $\overline{AH'}$ 表之) 及其切向加速度 a_{A1}^t 。

为求导杆上点 A_2 的转向速度 v_{A2}^L 和滑块上点 A_3 对导杆 2 的转向相对速度 v_{rA32}^L , 列出转向速度的向量方程:

$$v_{A3}^L = v_{A2}^L + v_{rA32}^L$$

上式中 $v_{A3}^L = v_{A1}^L$, 故自 v_{A1}^L 向量的矢端 H' 作导杆的垂直线 GH' 交 AM 线于点 G , 则 \overline{AG} 、 $\overline{GH'}$ 分别表示转向速度 v_{A2}^L 、 v_{rA32}^L 。

按图 1-4 的方法作出 a_{A1}^n 、 a_{A2}^n , 按图 1-5 的方法作出 a_{rA32}^n 。列出加速度的向量方程:

$$a_{A1}^n + a_{A1}^t = a_{A2}^n + a_{A2}^t + a_{rA32}^n + a_{rA32}^t$$

或

$$a_{A1}^n + a_{A1}^t - a_{rA32}^n = a_{A2}^n + a_{A2}^t + a_{rA32}^t$$

式中切向加速度 a_{A2}^t 和点 A_3 相对于导杆的加速度 a_{rA32}^t 的方位是已知的, 它们的大小可通过作加速度多边形图求得, 如图 1-8。

§ 1-3 速度瞬心、瞬心线、加速度瞬心、拐点圆和变向圆

一、速度瞬心(瞬心)、静瞬心线、动瞬心线

图 1-9 中, 构件 e 上的 A, B 两点沿固定平面 e' 上的曲线 a, b 运动。过点 A, B 作 a, b 的法线, 其交点 P 即为构件 e 在该瞬时的速度瞬心, 简称瞬心。

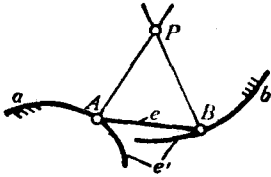


图 1-9

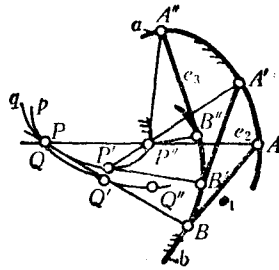


图 1-10

若构件 e 自起始位置 AB 沿固定平面 e' 上的曲线 a, b 经 $A'B', A''B'', \dots$ 运动(图 1-10), 则过点 A', B', A'', B'', \dots 分别作 a, b 的法线的交点, 即得构件 e 在各瞬时的瞬心 P', P'', \dots 。由 P, P', P'', \dots 连成的曲线称为静瞬心线, 以 p 表之。曲线 p 是在固定平面 e' 上的。

将构件 e 在各瞬时的瞬心 P, P', P'', \dots 分别转换到其位置 1 上(即位置 AB 上)。如用透明纸拓出 $\triangle A'B'P', \triangle A''B''P'', \dots$ 后, 分别使 $A'B', A''B'', \dots$ 与 AB 重合, 即得 P', P'', \dots 转换后的位置 Q', Q'', \dots 。 Q', Q'', \dots 的连线称为动瞬心线, 以 q 表之(图 1-10)。动瞬心线是在构件 e 的平面上的。这样, 构件 e 上的 A, B 点沿固定平面 e' 上 a, b 曲线的运动, 完全可用构件 e 上的动瞬心线 q 与固定平面 e' 上的静瞬心线 p 的相互滚动来再现。

图 1-11 示出一十字双滑块机构的连杆 AB 相对机架的动、静瞬心线。由于连杆 e 上 A, B 两点行走的轨迹 a, b 是相互垂直的, 故各瞬时过点 A, B 所作 a, b 的法线的交点距十字中心 O 都为等距 ($=AB$), 所以连杆 e 的静瞬心线 p 是以 O 为圆心、以 AB 线段长为半径的圆。将 $\triangle A'B'P', \triangle A''B''P'', \dots$ 拓出, 并分别转换到连杆 e 的第 1 位置 e_1 (即使 $A'B', A''B'', \dots$ 与 AB 重合), 则得 $Q', Q'', \dots, Q(=P), Q', Q'', \dots$ 的连线形成一个圆 q, q 即为连杆 e 的动瞬心

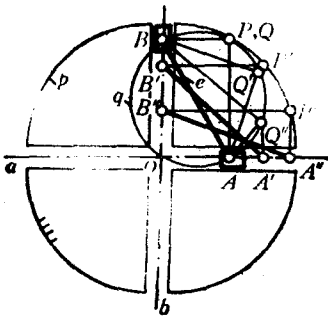


图 1-11

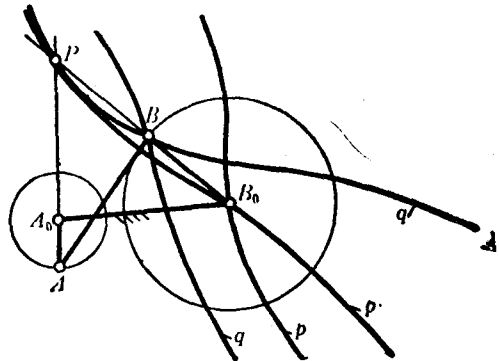


图 1-12

线。连杆 e 对十字架的运动可借圆 p 和圆 q 的相互滚动再现。

图 1-12 所示的曲柄摇杆机构构件 AB 的静、动瞬心线都呈两个分支。位于机架平面的静瞬心线 p 的两个分支在机架铰链中心 B_0 处相交；位于连杆平面的动瞬心线 q 的两个分支在连杆铰链中心 B 处相交。连杆与机架的运动可借 p 与 q 的滚动再现。

二、加速度瞬心

设构件 e 上的 A, B 两点的加速度为 $\mathbf{a}_A, \mathbf{a}_B$ (图 1-13)。作加速度图 πab 如图 1-13, b , 再在构件 e 上作

$$\triangle IIAB \sim \triangle \pi ab$$

且使构件图上字母 $II-A-B$ 与加速度图上字母 $\pi-a-b$ 有同样的顺序 (图中都为逆时针顺序)。由加速度多边形图的性质知：在图示瞬时，构件 e 上的点 II 的加速度为零 ($a_{II}=0$)，点 II 即为加速度瞬心，加速度 $\mathbf{a}_A, \mathbf{a}_B$ 分别与连线 IIA, IIB 成角 μ 。同理，相对加速度 \mathbf{a}_{BA} 与 AB 间的夹角也为 μ ， μ 的大小为：

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \quad (1-10)$$

式中 ω, ε 分别为构件 e 在图示位置的角速度和角加速度。

构件上的任一点的加速度都可用具有点 II 加速度的牵连移动加速度和绕点 II 的相对转动加速度来表出。例如点 A, B 的加速度可表为：

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{II} + \mathbf{a}_{AII}^n + \mathbf{a}_{AII}^t; \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{II} + \mathbf{a}_{BII}^n + \mathbf{a}_{BII}^t$$

现 $a_{II}=0; a_{AII}^n = II A \cdot \omega^2, a_{BII}^n = II B \cdot \omega^2; a_{AII}^t = II A \cdot |\varepsilon|, a_{BII}^t = II B \cdot |\varepsilon|$ ，所以：

$$a_A = II A \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

$$a_B = II B \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

由此知，构件上各点的加速度与各点至加速度瞬心 II 间的距离成正比。

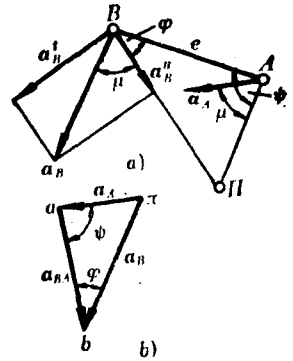


图 1-13

三、拐点圆、变向圆

1. 拐点圆

设构件在某瞬时的速度瞬心是 P ，角速度是 ω ；瞬时加速度中心为 II ，角加速度为 ε (图 1-14)。现连接点 P, II ，按式 (1-10) 定出角 μ 值，再过 P 作射线与 $P II$ 夹成 μ 角，此射线与过点 II 垂直于 $P II$ 的直线交于 W 点，然后以点 P, II, W 作一圆，显然该圆的直径为 PW 。在该圆的圆周上任取一点 M ，点 M 的速度 \mathbf{v}_M 大小为：

$$v_M = l_{PM} \cdot |\omega|$$

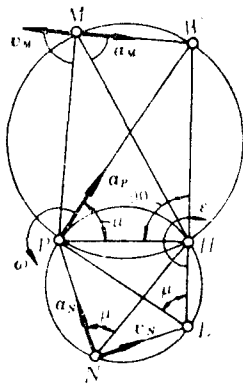


图 1-14

其方向沿过点 M 和点 W 的直线 (图 1-14)，按加速度瞬心理论，点 M 的总加速度 \mathbf{a}_M 的方向应与 $M II$ 成 μ 角，由图 1-14 可见， \mathbf{a}_M 的方向也沿 MW 直线，这样点 M 的总加速度 \mathbf{a}_M 与其速度 \mathbf{v}_M 同向或反向，因而 \mathbf{a}_M 就是 M 点的切向加速度。

由于点 M 是图上的任意点，由此知，位于这个圆周上的任一点只具有切向加速度。而只具有切向加速度的点或是作直线运动或是位于轨迹的拐点上的点 (见 § 1-4)，所以这种点

就称拐点, 这个圆就称拐点圆。

在综合演示直线轨迹的机构时, 往往利用拐点圆上的点来实现(见 § 6-4)。

2. 变向圆

在图 1-14 中, 作 WII 的延长线, 此线与过点 P 所作拐点圆直径 PW 的垂线交于点 L , 以 PL 为直径作一圆, 由图可见 $\angle ILLP = \mu$ 。如在该圆上任取一点 N , 则 N 点的速度 v_N 的大小为:

$$v_N = l_{PN} |\omega|$$

其方向沿过点 N 、 L 的直线。 N 点的总加速度 a_N 的方向线必与连线 NII 成角 μ , 其方向沿过点 N 、 P 的直线(见图 1-14), 所以 N 点的总加速度 a_N 就是 N 点的法向加速度。由此知, 位于这个圆的圆周上的任一点只具有法向加速度。这个圆称为变向圆。

3. 加速度瞬心 II 的速度和速度瞬心 P 的加速度

加速度瞬心 II 的速度 $v_{II} = l_{PII} |\omega|$; 其加速度 $a_{II} = 0$ 。速度瞬心 P 的速度 $v_P = 0$; 其加速度 a_P 的大小为:

$$a_P = l_{PII} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

现 $l_{PII} = l_{PW} \cos \mu$, 根据 $\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$, $\cos \mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \mu}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}$, 则:

$$a_P = l_{PW} \omega^2 = d \omega^2 \quad (1-11)$$

式中 $d = l_{PW}$ 为拐点圆的直径。由点 P 的加速度可知, 直线 PW 必位于构件的静、动瞬心线的公法线上。

§ 1-4 欧拉(Euler)-萨伐利(Savary)方程

一、构件上点的轨迹的曲率中心与速度瞬心

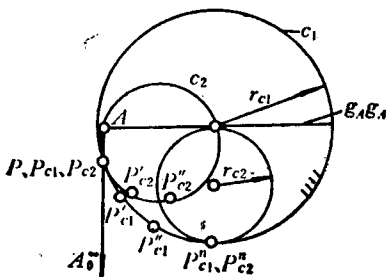


图 1-15

图 1-15 中构件 c_1 为一个固定的大圆, 构件 c_2 是在 c_1 内作滚动的一个小圆, 若其半径 $r_{c1} = 2r_{c2}$, 则 c_2 滚动时其上某点 A 的轨迹是一直线(圆 c_1 的直径), 图中 c_1 、 c_2 的接触点 P, P', \dots, P'', \dots 为 c_1 、 c_2 在各接触瞬时的瞬心。由图可知, c_2 上的点 A 的轨迹的曲率中心与速度瞬心间的关系是: 点 A 的轨迹的曲率中心 A_0 必在过点 A 且垂直其轨迹 $gAgA$ (直线) 的直线 AA_0 的无穷远处, 而速度瞬心 P 也位于这一垂线上。所以构件上点 A 的轨迹的

曲率中心 A_0 和速度瞬心 P 位于同一直线上。这两个点一般是不重合的。

二、欧拉-萨伐利方程

一运动构件在某瞬时的瞬心为 P , 其上一点 A (称动点) 在该瞬时绕 P 转过一微量角 $d\varphi$ 至点 A' (图 1-16, a), 这时点 A 所走过的轨迹 $\widehat{AA'}$ 的曲率中心设为 A_0 。如点 A_0 与点 A 位于瞬心 P 的异侧。又若瞬心线 λ_1, λ_2 在点 P 的切线 t 是已知的, 则 t 与 A_0A' 的交点为 P' , P

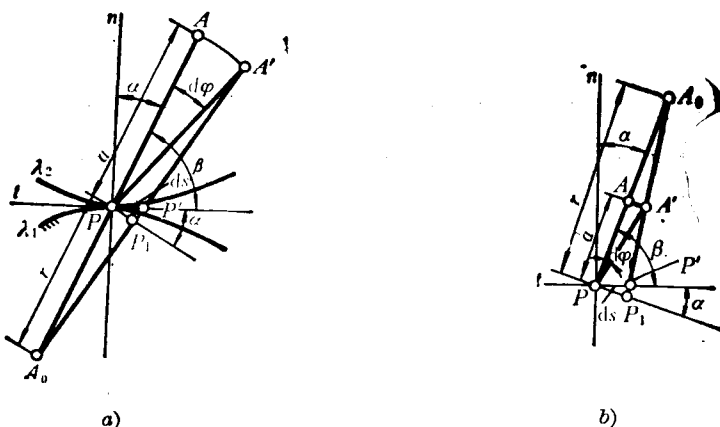


图 1-16

可看成是构件转过 $d\varphi$ 角后的那个瞬时的瞬心。过点 P 再作 λ_1, λ_2 的法线 n 及 $A'A_0$ 的垂线 PP_1 , 此垂线交 $A'A_0$ 于点 P_1 , 设 n 与 AP 间的夹角为 α , 则 $\angle P_1PP' = \alpha$, 又设两瞬心间距离 $PP' = ds$, 并令 $PA = a$, $PA_0 = r$, 于是可建立如下关系式:

$$AA':PP_1 = (r+a):r \quad (1-12)$$

用 $PP_1 = PP' \cos \alpha = ds \cos \alpha$; $AA' = a d\varphi$ 代入上式得:

$$\frac{a d\varphi}{ds \cos \alpha} = \frac{r+a}{r}$$

即

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{r}\right) \cos \alpha = \frac{d\varphi}{ds}$$

由于

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi/dt}{ds/dt} = \frac{\omega}{u} \quad (1-13)$$

这里 ω 是运动构件的角速度; u 是运动构件瞬心的移位速度。如用 $\frac{1}{w}$ 来表示 ω/u , 则可写出动点 A 与曲率中心 A_0 位于瞬心 P 异侧时的欧拉-萨伐利方程:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{r}\right) \cos \alpha = \frac{1}{w} \quad (1-14a)$$

如点 A_0 和 A 位于瞬心 P 的同侧(图 1-16, b), 按类似的推导可得:

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) \cos \alpha = \frac{1}{w} \quad (1-14b)$$

如将 AP 与切线 t 的夹角以 $\beta = 90^\circ - \alpha$ 表之, 则欧拉-萨伐利方程为:

$$\left(\frac{1}{a} \pm \frac{1}{r}\right) \sin \beta = \frac{1}{w} \quad (1-15)$$

使用上式时应注意: 如动点 A 和曲率中心 A_0 位于瞬心 P 的异侧(图 1-16, a), 式中取“+”号; 反之, 点 A, A_0 在 P 的同侧(图 1-16, b), 取“-”号。

三、由欧拉-萨伐利方程导出拐点圆, 拐点圆内、外的点的轨迹的曲率中心位置

如将欧拉-萨伐利方程中的 $r = \infty$ 代入, 即当动点轨迹为直线时, 方程就成为:

$$\left(\frac{1}{a} \pm \frac{1}{\infty}\right) \cos \alpha = \frac{1}{w} \quad (1-16)$$

或

$$w \cos \alpha = a$$

若令 α 、 a 为两个变量, 又取瞬心 P 作为坐标的原点, 则式(1-16)在坐标系中将形成一个直径为 w 的圆, 即拐点圆。又从图 1-17, a 可看到, 拐点圆直径 $PW (=w)$ 是位于瞬心线的法线 n 上的, 这里更直观地证实了 § 1-3 三、1 的结论。

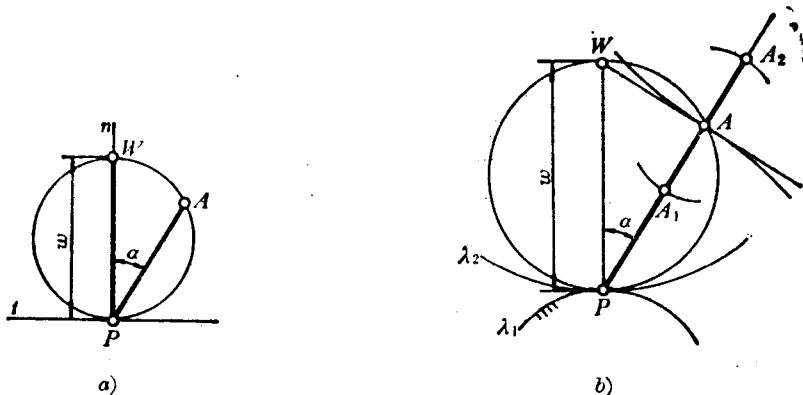


图 1-17

如在图 1-17, b 中的拐点圆内取一点 A_1 , 使 $PA_1 = a'$, 则 $a' < a = PA$ (A 是拐点)。将 a' 及点 A_1 对应的 r' (曲率中心至瞬心 P 的距离) 代入式(1-14), 可知:

$$\frac{1}{w} = \left(\frac{1}{a'} + \frac{1}{r'}\right) \cos \alpha \quad (1-17)$$

$$\frac{1}{w} = \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{r'}\right) \cos \alpha \quad (1-18)$$

将上两式与式(1-16)相比较, 由于三式中 α 、 w 都是定值, 又因 $a' < a$, 要使式(1-17)与式(1-16)的右端相等, r' 必是“-”值, 所以式(1-17)应写成:

$$\frac{1}{w} = \left(\frac{1}{a'} + \frac{1}{-|r'|}\right) \cos \alpha = \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{|r'|}\right) \cos \alpha \quad (1-19)$$

同理, 要使式(1-18)与式(1-16)等同, r' 必为“+”值, 所以式(1-18)应写成:

$$\frac{1}{w} = \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{+|r'|}\right) \cos \alpha = \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{|r'|}\right) \cos \alpha \quad (1-20)$$

式(1-19)、(1-20)表示的都是点 A_1 与 A_0 在 P 同侧时的欧拉-萨伐利方程, 此方程式表达了一条凸形曲线; 这就是说: 如从 P 点看, 运动构件在拐点圆内的点所形成的轨迹是一条凸曲线; 同样, 也可证明: 从 P 点看, 运动构件在拐点圆外的点(如图 1-17 中的点 A_2)所形成的轨迹是一条凹曲线。

四、求作瞬心线的切线 t

在综合间歇运动机构和演示直线轨迹机构时, 需要知道构件上某点运动轨迹的曲率中心或该构件的拐点圆, 而在几何作图时, 需要作出该构件运动形成的瞬心线在所求瞬时的切线 t_0 。求作 t 的方法很多, 现将常用的博比利尔(Bobillier)法介绍如下。

先过任选点 Q 任作一个角 ε (图 1-18, a), 再任取一点 P , 从点 P 作一射线交角 ε 两夹边

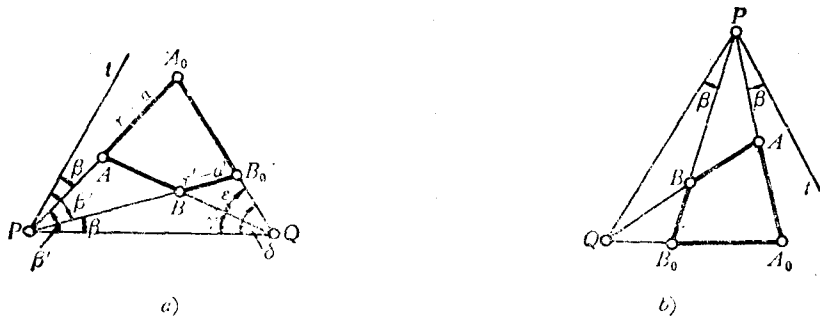


图 1-18

于点 A 及 A_0 , 连 PQ 得角 γ, δ 及 β' , 则

$$\triangle PQA_0 - \triangle PQA = \triangle AQA_0$$

即 $PQ \cdot QA_0 \cdot \sin \delta - PQ \cdot QA \cdot \sin \gamma = QA \cdot QA_0 \cdot \sin \varepsilon$

各项乘以 $1/PQ \cdot QA_0 \cdot QA \cdot \sin \delta \cdot \sin \gamma$, 得

$$\frac{1}{QA \cdot \sin \gamma} - \frac{1}{QA_0 \cdot \sin \delta} = \frac{\sin \varepsilon}{PQ \cdot \sin \gamma \cdot \sin \delta}$$

即

$$\frac{1}{PA \cdot \sin \beta'} - \frac{1}{PA_0 \cdot \sin \beta'} = \frac{\sin \varepsilon}{PQ \cdot \sin \gamma \cdot \sin \delta} \quad (1-21)$$

设 $PA = a$, $PA_0 = r$, 则上式可写成:

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) \frac{1}{\sin \beta'} = \frac{\sin \varepsilon}{PQ \cdot \sin \gamma \cdot \sin \delta} = K \quad (1-22)$$

从点 P 再作另一射线交角 ε 的两夹边于点 B, B_0 , 令 $PB = a', PB_0 = r'$, 并通过

$$\triangle PQB_0 - \triangle PQB = \triangle BQB_0$$

同样可得如下关系式:

$$\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{r'}\right) \frac{1}{\sin \beta} = \frac{\sin \varepsilon}{PQ \cdot \sin \gamma \cdot \sin \delta} = K \quad (1-23)$$

式中 β 为 PQ 与割线 PB_0 间的夹角。由式 (1-22)、(1-23) 并考虑式 (1-15), 可有:

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) \sin \beta = \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{r'}\right) \sin \beta' = K' \quad (1-24)$$

式中 K' 为定值, 若令其等于 $\frac{1}{w}$, 并将图 1-18, a 中的 A_0ABB_0 看成是一个机架为 A_0B_0 的铰链四杆机构(对照图 1-18, b), 则点 P 就是连杆 AB 与机架 A_0B_0 的瞬心, 点 Q 就是构件 A_0A, B_0B 的相对瞬心, PQ 为两瞬心的连线, 现以 P 为顶点, PA_0 为起始边逆时针向作角 β (若将 PB_0 与 PQ 的夹角 β 看成是以 PB_0 为起始边顺时针向作出的角, 则该两 β 角具有“等角反向关系”, 这种关系以后称为“等角反向”规律), 角 β 的终边 t 就是所求的切线。其理由可用欧拉-萨伐利方程加以阐明: 从构件(连杆 AB)上的 A 点看, 该点与瞬心的距离为 a , 其运动轨迹的曲率中心为 A_0 , A_0 与 P 间的距离为 r , 若要使式 (1-24) 成立, 则 β 必须为瞬心线的切线 t 与 PA_0 (瞬心与曲率中心的连线) 的夹角, 所以 t 是所求的切线。从 AB 上另一点 B 看, 也可阐明同一结果。