中小学教师参考丛书

初中数学重点与难点

第 三 册

光明日报出版社

初中数学重点与难点

中小学教师参考丛书

初中数学重点与难点

第 三 册

主编： 翟连林 赵学恒

光 明 日 报 出 版 社

初中数学重点与难点

（第三册）

主编：翟连林　赵学恒

光明日报出版社出版发行

（北京永安路106号）

新华书店北京发行所经销

河北省完县印刷厂印刷

开本：787×1092毫米1/32　印张5　字数104千字

1991年2月第一版　　1991年2月第一次印刷

书号：ISBN7-80014-962-5/G·343

印数：22050册　　定价：2.30元

丛 书 出 版 说 明

实现我国四个现代化的重要因素是人的素质，提高人的素质的关键是教育，提高教育质量的关键是教师。为了帮助教师备好课，提高教学质量，我们组织全国有丰富教学经验的特级教师、高级教师和教研员，编写出版了这套“中小学教师参考丛书”。

这套丛书主要内容是：交流教学经验、教学资料和教学科研成果。

由于我们的水平有限，欢迎广大教师提出宝贵意见。

“中小学教师参考丛书”编委会

1991.1.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

“中小学教师参考丛书”编辑委员会

总主编　翟连林

编　委　（以姓氏笔划为序）

丁家泰	马　奕	马学声	方昌武	王学功	王家宝
王洪涛	王保国	冯跃峰	叶龄逸	齐锡广	刘效曾
刘盛锡	李作斗	李登印	李海秀	李福宽	陈久华
陈士杰	陈仁政	陈鸿侠	吴乃曦	佘新耀	岳明义
周清范	林福堂	林增铭	段云鑫	姚兴耕	施英杰
顾松涛	项昭义	贾　遂	贾士代	徐玉明	常克峰
张东海	张守义	张国旺	傅　立	曾星发	杨志刚
赵用金	赵光礼	赵国民	赵学恒	翟连林	韩召毅

前　　言

突出重点、突破难点是提高教学质量的关键。为帮助广大初中教师，特别是青年教师备好课，提供一份实用的教学参考资料，我们组织全国八省、市有丰富经验的特、高级等优秀教师，总结多年讲授初中数学课的经验，编成本书。

本书对初三各章教材的重点和难点进行了较为详尽的分析，给出了一定数量的典型例题并进行了解题思路的引导和评注，各章末配有习题精荟（可作60——100分钟单元测试题），并附有答案或提示。书末附有两套期末测试题和三套综合测试题及答案或提示。

参加本书编写工作的有：

林宗炘（福建福州市一中）、张家瑞（江苏苏州市四中）、胡增明（浙江严州中学）、赵连音（四川南充市六中）、沈树基（湖南株州市一中）、徐柏万（江西抚州市三中）、潘　琦（江苏无锡市二中）、徐起勋（湖北武汉市先锋中学）、柳俐俐（上海育才中学）、贾宜民（湖北黄石市二中）、陈玉燕（浙江金华市六中）、陈介一（江苏苏州市四中）、樊淑仁（湖北黄石市十五中）、童湘凌（浙江严州中学）、张守文（河南淮阳县三中）谢璧芳（河南潢川县一中）。

由于我们的水平有限，书中不当或错误之处在所难免，欢迎广大读者批评指正。

瞿连林　　赵学恒

1991年1月

目　　录

代　数　部　分

几　何　部　分

代 数 部 分

第十三章 常用对数

重 点 难 点

在指数概念扩张的基础上，本章主要学习对数的概念及运算法则，常用对数的性质及利用对数进行计算．其中，根据积、商、幂、方根的对数运算法则进行计算是本章的重点．能够正确熟练地进行对数计算的关键在于深刻理解和正确掌握对数的运算法则和常用对数的首数、尾数，特别是含有负首数的对数的计算，这是本章的难点．而要掌握好对数的运算法则又在于透彻理解对数的概念，因此透彻理解对数概念既是学好本章内容的重点和关键，又是学习中的一大难点．它难就难在人们由于对对数定义引入的来龙去脉迷惑不解而可能产生思维滞留；人们对于为什么要在对数式及对数恒等式中限定$a>0$，$a\neq 1$，且$N>0$不甚明确而可能产生运算错误，也影响今后对数函数等的学习；人们往往对对数恒等式$a^{\log_a N}=N$感到易记，但难于正确运用。

1．如何切实掌握、透彻理解对数概念？其途径主要有以下几点：

（1）利用认知冲突，激发学习兴奋，引入、形成概念。

以旧引新，让人们思考哪些与自己已经具有的认知有所不同的一些问题，从而形成心理上的“认知冲突”，造成

“愤”、“悱”的心理状态，集中精力，积极思维。

例如　在$a^b = N$中：

①已知a、b，求N，这是计算乘幂问题，人们熟悉。

②已知b、N，求a，这是开方运算，人们也熟悉。

③已知a、N，求b，这个问题用过去的知识就束手无策了。

再由实例激趣，说明实际中不乏已知底数a和幂N，如何求指数b的问题。

为了解决这个问题，就要引入一个新的符号，对数的概念就应运而生。

此外，指数式与对数式的互化，不仅可以简化计算，而且也有助于对对数概念的理解。

（2）运用反例，产生正误冲突，明确限定条件。

为什么要在$\log_a N = b$中限定$a > 0$，$a \neq 1$，且$N > 0$呢？我们可用反例说明：

若$a < 0$，如$(-5)^{\frac{1}{4}}$，则a^b在实数集里无意义；

若$a = 0$，如0^{-2}，则a^b在实数集里无意义；

若$a = 1$，如$1^b = 1$，则不论指数b为何实数，真数N只可能是1，即a^b恒为1。

因此，为使对数式有意义，使它所表示的运算有唯一确定的结果，就必须有限定条件。

（3）多层次入手，促使人们正确运用公式。

①从公式$a^{\log_a N} = N$的结构、运算级别及其顺序入手，剖析说明，使之形成清晰鲜明的解题模式。

②从公式的重要性入手，使人们看到它将对数运算与幂和谐地统一起来，从而能借助于公式，利用实数指数法则，

即可证明一些对数的重要性质和运算法则。

③从对数恒等式的使用要领入手，使人们既能善于变换式子，又能避免出现差错。

使用公式时，一是要注意字母取值范围：$a>0$，$a\neq1$，$N>0$；二是要注意同底，不同底的应先化为同底再用公式，如$4^{\log_2 3}=2^{2\log_2 3}=3^2$；三是要注意作为指数的对数式前面的系数必须是1。

例如 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 7}=(2^{-1})^{-\log_2 7}=2^{\log_2 7}=7$

2、对数的运算法则可以把高一级的运算(乘、除、乘方、开方）转化为低一级的运算（加、减、乘、除），即它不仅加快了计算的速度，也大大简化了计算方法，由此显示了利用对数进行计算的优越性。在学习中，采用下列方法可以突破这个难点：

（1）由具体到抽象，探求规律。观察具体实例：

$$\begin{array}{ccccccccccc} 4 & \times & 8 & = & 32 & \qquad & 8 & \times & 16 & = & 128 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 2 & + & 3 & = & 5 & & 3 & + & 4 & = & 7 \end{array} \quad \cdots$$

由此可得 $\log_2 4+\log_2 8=2+3=5$

$$\log_2 32=5$$

即 $\log_2 4+\log_2 8=\log_2 32$。

一般地， $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$。

（2）借助于反例，自觉纠错。要防止和纠正以下错误认识：

$$\log_a(M\pm N)=\log_a M\pm\log_a N$$

$\log_a(M\cdot N)=\log_a M\cdot\log_a N$，等等。

可以借助于举反例，在式中用特殊值代入加以验证，发

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

现有误，从而自觉纠错。

如　$\log_a(M+N)=\log_a M+\log_a N$

令　$a=2$，$M=4$，$N=8$

则　左边 $=\log_2(4+8)=\log_2 12$，

右边 $=\log_2 4+\log_2 8=2+3=5$，

而　$\log_2 12\neq 5$，

由此反例便知上式有误。

（3）对运算法则进行顺用——逆用——活用——综合用的多层次训练。

顺用：如　展开 $\lg\sqrt{\dfrac{\sqrt{ab}}{a^{-1}}\cdot\sqrt[3]{a^{-1}b^{-2}}}$。

逆用：如　已知 $\lg x=\frac{1}{2}(\lg198+\lg199)-\lg197$，求x的值。

活用：如①不查表计算：

$$\lg5\cdot\lg8000+(\lg2^{\sqrt{3}})^2+\lg\frac{1}{6}+\lg0.06;$$

②已知 $10^{\alpha}=5$，$10^{\beta}=6$，用α、β表示lg0.12及 $\lg\sqrt{60}$。

答：$\lg0.12=\beta-\alpha-1$，$\lg\sqrt{60}=\frac{1}{2}(\beta+1)$。

综合用：如①试证方程 $\lg\frac{x}{3}\cdot\lg\frac{3}{x}=\lg\frac{x}{9}$ 有两个相异的实根。

②在Rt△ABC中，c为斜边，求证：

$\log_{(c+b)}a+\log_{(c-b)}a=2\log_{(c+b)}a\cdot\log_{(c-b)}a$

这样，循循善诱，稳步渐进，即可较好掌握对数的运算法则。

3. 常用对数的首数与尾数是两个全新的概念，人们不易接受。特别是含有负首数的对数计算更难理解。

在“$\lg N=$首数+尾数”中，首数是一个整数，而尾数是一个正的纯小数或零。学习中，应着重注意以下三点：

（1）首数的确定：

①真数大于或等于1时，它的对数的首数等于这个数的整数部分的位数减1.

例如 $\lg 567.8$的首数等于$3-1=2$.

②当真数为小于1的正数时，它的对数的首数是一个负数，其绝对值等于这个小数的第一个有效数字前面连续所有零的个数（包括整数部分的一个零）.

例如 $\lg 0.0001234$的首数是-4.

(2)尾数的确定，一般是先根据真数的位数确定对数的首数，再根据真数的有效数字查对数表确定对数的尾数。

（3）负首数的表示．如$\overline{2}.5325$与-2.5325是完全不同的两个数，一定要会把$\lg N=-2.5325$改变成首数为负数，而尾数为正的纯小数的形式，即$\lg N=\overline{3}.4675$，然后再确定N，而含有负首数的计算，往往采用“先分后合”的方法，即先把首数与尾数分开计算，然后再合并．

例如 若$\lg 0.02781=\overline{2}.4442$，那么

$$\frac{1}{2}\lg 0.02781=\frac{1}{2}\times(-2+0.4442)$$

$$=-1+0.2221$$

$$=\overline{1}.2221$$

典 型 例 题

例 1 指数式与对数式互化，且求x值：

（1）$3^x=\frac{1}{243}$；　　（2）$\log_x 0.125=-2$；

（3）$\log_{\sqrt{2}} x=-6$

【分析】 在$a^b=N$与$\log_a N=b$的互化中，可以加深对数概念的理解，并且在互化中有助于问题的解决.

【解】 （1）由已知指数式化为对数式可得

$$x=\log_3\frac{1}{243}=\log_3 3^{-5}=-5$$

（2）由已知对数式化为指数式可得

$x^{-2}=0.125$，　即$x^{-2}=\frac{1}{8}$，

$x^2=8$，　$\therefore x=\pm 2\sqrt{2}$.

负值不合题意，舍去，故$x=2\sqrt{2}$.

（3）由$\log_{\sqrt{2}} x=-6$，　得

$$x=(\sqrt{2})^{-6}=(2^{\frac{1}{2}})^{-6}=\frac{1}{8}$$

【评注】 我们不难发现：一般地

已知a、b，则由$N=a^b$可求得N；

已知a、N，则由$b=\log_a N$可求得b；

已知N、b，则由$a=N^{\frac{1}{b}}$可求得a.

例 2 （1）已知$(3.13)^x=1000$，$(3130)^y=1000$，

求证：$x^{-1}-y^{-1}=-1$。

（2）求证$\dfrac{\log_a x}{\log_{am} x}=1+\log_a m$

【分析】利用指数式与对数式的互化，往往可以“柳暗花明”，化难为易。

【证明】（1）由 $(3.13)^x=1000$，两边取常用对数，得

$$x\lg 3.13=3$$

$$x^{-1}=\frac{1}{3}\lg 3.13;$$

同理可得 $y^{-1}=\dfrac{1}{3}\lg 3130$.

$$\therefore x^{-1}-y^{-1}=\frac{1}{3}(\lg 3.13-\lg 3130)$$

$$=-1$$

（2）令$\log_a x=p$，$\log_{am}x=q$，$\log_a m=r$，

则 $x=a^p$，$x=(am)^q$，$m=a^r$，

$$a^p=a^q\cdot m^q=a^q(a^r)^q=a^{q(1+r)}.$$

$\therefore\ p=q(1+r)$.　　$\because q\neq 0$，

$\therefore \dfrac{p}{q}=1+r$，即 $\dfrac{\log_a x}{\log_{am}x}=1+\log_a m$.

例3　不查表，求值

（1）$\left(1\frac{11}{25}\right)^{\log_2\sqrt{2}}-\left(7^{\log_7 3}\right)^{-2}+\sqrt{\left(2+\log_{\frac{1}{2}}8\right)^2}$

（2）$\dfrac{\lg\lg\sqrt[10]{1990}}{\lg(\lg 1990)^2-2}$；

（3）$\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$.

【分析】在运用对数运算法则及对数恒等式时，都要求同底，若不同底时，一般转化为指数式中的底。

【解】(1) 原式 $=\left(\frac{6}{5}\right)^{2\log_2\sqrt{2}}-3^{-2}+\sqrt{(-1)^2}$

$$=\frac{6}{5}-\frac{1}{9}+1=\frac{94}{45}$$

(2) 原式 $=\dfrac{\lg\left(\frac{1}{10}\lg1990\right)}{2\lg\lg1990-2}$

$$=\frac{\lg\lg1990-1}{2(\lg\lg1990-1}=\frac{1}{2}$$

(3) 原式 $=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$

$$=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(2+\sqrt{3}-2\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}+2-\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}2=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=-\frac{1}{2}$$

【评注】在(2)中，要注意 $\lg\sqrt[10]{1990}$ 与 $\sqrt[10]{\lg1900}$ 的区分，在对数运算中，还应注意分清以下容易混淆的式子．

$\log_a M^n$ 与 $(\log_a M)^n$；　　$\log_a\frac{M}{N}$ 与 $\frac{\log_a M}{\log_a N}$ ．

例 4 (1) $\lg0.03408=-1.4675$ 的首数是______，尾数是______．

(2) 若 $\lg x=\overline{3}.1028$，则 $\lg\sqrt{x}=$ ______．

【分析】(1) 注意 -1.4675 与 $\overline{1}.4675$ 是完全不同的，要熟练掌握首数与尾数的确定方法。

(2) 一般将对数的首数、尾数“先分后合”进行计算，这样较为简明，不会出差错．

【解】(1) $\because -1.4675=-1-0.4675$

$$= -2 + (1 - 0.4675) = -2 + 0.5325$$
$$= \bar{2}.5325.$$

$\therefore$ 首数为-2，尾数为0.5325。

(2) $\lg\sqrt{x} = \frac{1}{2}\lg x = \frac{1}{2} \times \bar{3}.1028$

$$= \frac{1}{2}(-3 + 0.1028)$$

$$= \frac{1}{2}(-4 + 1.1028) = -2 + 0.5514.$$

$\therefore \lg\sqrt{x} = \bar{2}.5514$。

例5 不查表计算：

(1) $\lg^3 2 + \lg^3 5 + 3\lg 2\ \lg 5$。

(2) $\lg 25 + \frac{2}{3}\lg 8 + \lg 5\ \lg 20 + \lg^2 2$.

【解】 (1) 原式$= (\lg 2 + \lg 5)(\lg^2 2 - \lg 2\ \lg 5 + \lg^2 5) + 3\lg 2\lg 5$.

$$= \lg^2 2 - \lg 2\ \lg 5 + \lg^2 5 + 3\lg 2\ \lg 5$$
$$= (\lg 2 + \lg 5)^2 = (\lg 10)^2 = 1.$$

(2) 原式$= \lg 5^2 + \lg 2^2 + \lg 5\ (2\lg 2 + \lg 5) + \lg^2 2$

$= \lg(5^2 \times 2^2) + \lg^2 5 + 2\lg 2\ \lg 5 + \lg^2 2$

$= \lg 10^2 + (\lg 2 + \lg 5)^2 = 2 + \lg^2 10 = 3$。

【评注】 充分利用常用对数的独特性质$\lg 10^n = n$，设法凑出$\lg 2 + \lg 5 = \lg 10 = 1$，这是灵活进行此类运算时的一种变换能力。

例6 (1) 已知$\lg 2.512 = 0.4000$，求$\sqrt[6]{0.0002512}$

(2) 已知$\lg 2 = 0.3010$，求$2^{15} \cdot 8^3 \cdot 5^{20}$是几位数。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com