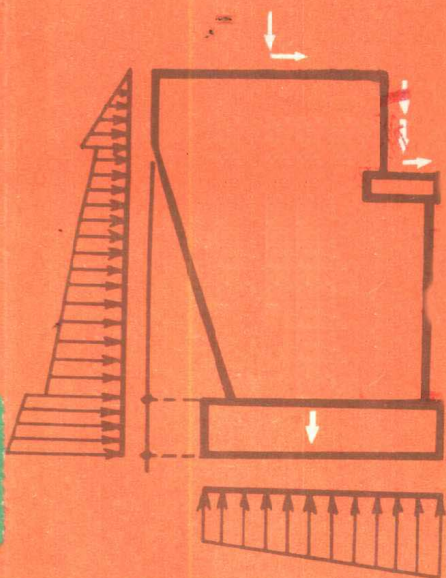


铁路勘测设计基础丛书

数学和力学基础知识

第二册



人民铁道出版社

01.03
2649

数学和力学基础知识

第 二 册

西南交通大学桥梁专业 编
铁 道 部 大 桥 工 程 局 五 桥 处

人 民 铁 道 出 版 社

1977年·北京

内 容 简 介

本书是在第一册中讲述的数学和力学知识的基础上, 进一步介绍梁及轴的应力分析, 有关运动学、动力学、功和能的知识, 以及圬工结构、木结构和钢结构的计算。

本书是为“七·二一”工人大学工农兵学员编写的, 并可作为工人自学用。

数学和力学基础知识(二)

西南交通大学桥梁专业
铁道部 大桥工程局五桥处 编

人民铁道出版社出版
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
广西民族印刷厂印

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张: 11.25 字数: 251 千

1977年11月 第1版

1979年8月 第1版 第2次印刷

印数: 50,001—167,000 册 定价: 0.77 元

目 录

第十三章 梁的剪应力、主应力和换算应力	1
一、材料的拉伸破坏和受剪破坏	1
二、单向拉伸引起的剪坏以及纯剪引起的拉坏	7
三、匀质梁的剪应力	13
四、匀质梁的主应力	22
五、钢筋混凝土梁的剪应力和主应力	25
六、应力状态分析	30
七、强度理论和换算应力	36
第十四章 圆 轴	41
一、圆轴承受扭矩时的计算	41
二、圆轴承受扭矩和弯矩时的计算	47
第十五章 物体的运动	51
一、直线匀速和匀变速运动	51
二、抛物运动	52
三、定轴转动	54
四、定轴转动中的动点的线运动	56
五、关于传动比	58
六、曲线运动中的法向加速度	59
七、相对运动	62
八、平面运动	65
九、转动瞬心	68
第十六章 力、加速度、冲量和动量	71
一、动力学基本定律及其应用	71
二、定轴转动	87
三、平面运动	106
四、惯性力	109
五、冲量和动量	115

六、动量守恒定律	120
第十七章 功、能和功率	125
一、功	125
二、使物体改变速度大小所做的功和功能	131
三、使物体改变高程所做的功和重力势能	134
四、机械能守恒	139
五、功能原理	145
六、定轴转动和平面运动	146
七、机械能在物体相互作用中的增减	151
八、功率	154
第十八章 圬工结构	161
一、设计规范和容许应力	161
二、圬工结构所需验算的项目	164
三、铁路梁桥桥墩	172
四、铁路梁桥桥台	183
五、涵洞	199
第十九章 木结构	214
一、木材的一般知识	214
二、设计规范和容许应力	217
三、把杆	220
四、模板	242
五、便桥和脚手	252
第二十章 钢结构	262
一、钢材的一般知识	262
二、设计规范和容许应力	277
三、连接	280
四、中心拉压杆	303
五、梁	325
六、压弯杆	336
七、龙门吊机	341

第十三章 梁的剪应力、 主应力和换算应力

一、材料的拉伸破坏和受剪破坏

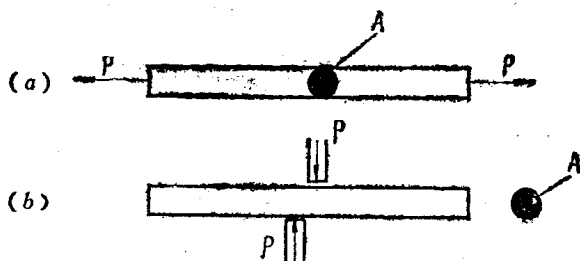
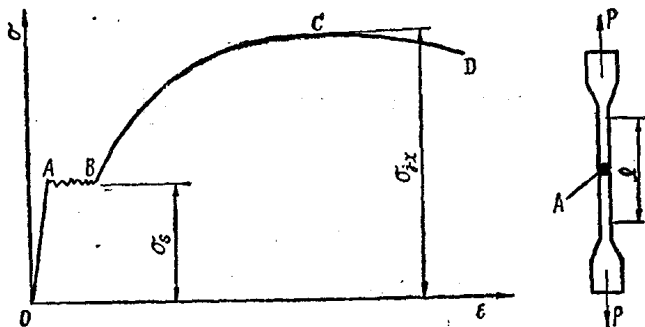


图13—1 拉伸和受剪

一根铁丝，要使它破坏，可以象图13—1a那样用一对拉力，也可以象图13—1b那样用一对剪力（例如，用老虎钳）。对于这两种情况，铁丝截面积都是 A ，若所用的力都用 P 表示，则前一情况的 P/A 叫法应力，现用 σ 表示，其特点是应力和所想破坏的截面垂直；后一情况的 P/A 叫剪应力，现用 τ 表示，其特点是应力和所想破坏的截面平行。实验表明，以材料破坏为准，所需要的 σ 和 τ 大不相同。塑性好的材料，例如钢铁，以屈服为准， σ 差不多是 τ 的两倍。塑性不好的材料，例如生铁，以破裂为准， σ 往往比 τ 小。

现在，先对塑性好的材料在单向拉伸、受剪、单向压缩时的表现作一些介绍。

图13—2 是这类材料（例如低碳钢）在单向拉伸时的 σ 和 ϵ 的关系示意。

图13—2 低碳钢拉伸试件 σ - ϵ 关系示意

图中的 σ 和 ϵ 是分别以试件原截面积和原来的标距长度为准进行计算的。这就是说，在按下列二式

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad \epsilon = \frac{e}{l} \quad (A)$$

计算 σ 和 ϵ 时，式中的 A 和 l 分别是原截面积和原标距长度， P 是试件当时所受的力， e 为标距当时的伸长量（等于在力 P 作用下的长度减去原长度）。

图13—2中的 OA 段基本上是一直线， σ 和 ϵ 成正比。若加载后又卸载，试件就恢复原长度。这叫弹性工作阶段。 σ 对 ϵ 在这段的比值，叫弹性模量，其代号是 E 。用式表示，即：

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (13-1)$$

这在第十章业已讲过。

在 AB 段，在 σ 基本不增加（也就是 P 不增加）的情况下，试件显著伸长（和图中的 ϵ 显著伸长相对应）。这就叫屈服。其时的应力，叫屈服点，在图中是用 σ_s 表示。材料在这一应力之下虽然没有断，但因变形过大，会使所制成的结构的使用受影响，因此，现今在拉杆设计中是将屈服当作一个极限状态来防止的。按 σ_s 来制订拉杆的容许应力，这在

第七章之五业已讲了。

在BC段，试件截面继续变小，但 P 值和相应的 σ 值却增大，这叫“强化”阶段。到点C， σ 达其最大值，这叫极限拉力强度，在图中用 $\sigma_{1.2}$ 表示。在CD段，试件的某个局部发生颈缩进去的现象，颈缩处的横截面突然比别处小得多，这使 P 值下降，相应地， σ 也下降。到点D，试件就扯断了。这才达到破坏。不过，对于塑性好的材料讲，特别是在屈服现象明显时，材料在屈服之后的表现并不是关键性的。

还要讲一讲拉伸试件的横向尺寸的收缩。根据试验，在纵向拉力将试件的纵向长度拉长的同时，横截面的尺寸（例如，圆柱形试件的直径，或矩形试件的一边的长度）就缩小。将横向尺寸的缩小也用应变的形式来表示，也就是用其缩小量对原尺寸的比值来表示，今将它记作 ϵ_y ，而将纵向拉力在纵向所引起的应变 ϵ （即式A第二式中的值）改用 ϵ_x 表示，那末，在弹性工作阶段， ϵ_y 对 ϵ_x 的比值也是接近于常数的。这个比的绝对值，叫泊松比，今用 ν 表示，即：

$$\nu = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad (13-2)$$

在分析材料破坏的原因时，这个比有时要用到。

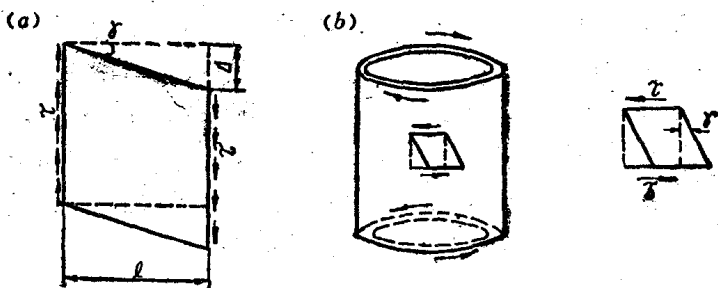


图13-3 受剪试验

再讲塑性材料的受剪破坏。为了讲明受剪应变 γ 和受剪模量 G 的定义，现作图13-3a。图中的剪应力 τ 当用 P/A 计算， P 和 A 的含义就如图13-1b所示。当试件有一对相距为 l 的平面，在它们上面各有剪应力 τ 满布作用时，材料将从原来的矩形（虚线所示）变成平行四边形（实线所示），也就是这一对平面发生相对位移量 Δ （如图所示）。用 Δ 除以 l ，就是剪应变 γ ，即：

$$\gamma = \frac{\Delta}{l} \quad (13-3)$$

它是和单向拉伸的 ε 相对应。在图13-3a中，将 γ 记作受剪材料一条矩形边的一个转角，这是因为式（13-3）中的 Δ/l 值一般很小，图13-3a内以弧度表示的 γ 值事实上和它等同的原故。有时将剪应变 γ 叫作角应变，也是由于这一原因。

和受拉的弹性模量 E 值相对应，这儿也有弹性受剪模量 G ，它是 τ 对 γ 的比值，即：

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (13-4)$$

在第十四章进行圆轴扭转计算时，要用到它。

进行材料的受剪试验是较为困难的。若按图13-3a的方式加力，取得平衡就已困难，要剪应力 τ 均匀分布更是谈不到。从研究的角度讲，可以将材料制成薄壁圆管，在两端用相反的扭矩加力，如图13-3b。参考第十四章之一（一），可知壁上的各矩形单元将承受均匀分布的剪应力。对其扭矩和圆管扭转角进行测读，可以推算其剪应力 τ 和相应的 γ 关系，并可用 τ 为纵坐标、 γ 为横坐标，点绘成如图13-2那样的图线。可以证实塑性材料的 τ - γ 关系在性质上是和它的 σ - ε 线一样，有受剪屈服现象，也有受剪极限强度。但若想

凭少量的试验就决定一些常用材料的受剪屈服点，那就困难了。可是，受拉容许应力既是用屈服点 σ_s 来制订，受剪容许应力不用受剪屈服点来制订就说不过去。目前，一般是采用本章之七所介绍的强度理论，根据试验所得的受拉屈服点来推算受剪屈服点，以供制订受剪容许应力之用的。

再讲塑性材料的单向压缩。当压应力较大时，屈服现象往往观测得到。受压屈服点的值时常和受拉屈服点相接近。在屈服之后，如果受压试件不因长细比稍大而压弯（象压杆那样破坏），试件就被墩粗，横截面加大，可使压力提高很多，不会象受拉破坏那样发生扯断。此外，在试件因受压而发生弹性缩短的同时，试件横截面当扩大，其横向尺寸的扩大量对原横向尺寸的比值，也还是和纵向的缩短应变值保持前面（讲单向拉伸时）所讲的泊松比关系的。

对于塑性不好的材料，包括混凝土、砖、石、生铁，现在也将它们在受拉、受剪和受压时的表现讲一下。

受拉时，没有屈服现象，会突然断裂，断裂面往往明显

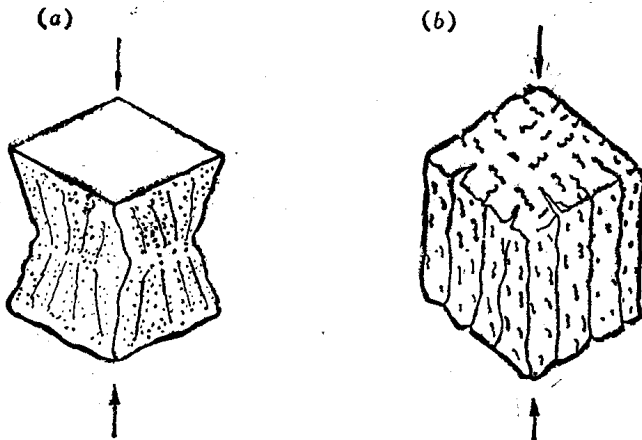


图13—4 混凝土试件在压力作用下破坏形状

(a) 一般情况；(b) 上下受压面加腊，使摩擦力减少时的情况

地和拉应力方向垂直。受剪时，也没有屈服现象，但断裂面不一定发生在剪力作用面，有时是如图13—8所示的生铁圆轴那样，断裂面和剪应力方向大致是 45° 角。受压时，同样地没有屈服现象，破裂面有时和压力方向成一斜角，如图13—4a，有时和压应力方向平行，如图13—4b。

将以上所讲的宏观现象汇总一下，可以看到：（1）塑性好的材料的特点是屈服现象显著，塑性不好的材料就没有屈服现象。（2）并不是所有的破裂面都是和所加的力彼此对应的，即：拉断的破断面不一定和拉力方向垂直，而剪力所造成的破坏面也不一定和剪力方向平行。

经过分析研究，可以说：材料因自身强度不足而引起的破坏，基本上是两种：（1）因材料在其原子间发生滑移，而这在宏观上的表现首先是屈服，最后被扯断；（2）因材料在其原子间的距离被拉大，以致拉裂，而这在宏观上的表现是没有屈服，随后就脆断，且断裂面和拉力方向垂直。后一情况没有屈服现象的原因则是：原子间的距离所能拉大的程度是很小的，且其拉大量先是和拉应力成正比、呈弹性，而在这距离的拉大量达某值后，原子间的吸力立即丧失，材料就在这一横截面断裂，随着这一截面的断裂，外力消失，材料其余原子间的距离就回弹到原状态，使断裂后的试件长度实际上和原来长度一样。而在前一现象中，在这一原子面（为便于描写这现象而假想的一些平面）的原子和相邻原子面的原子发生相对滑移时，原子间距离的拉大量很小，原子间的吸力很少变化，不可能开裂；而每一个滑移就是使相邻面的原子从其一个保持相对稳定的位置移到另一个稳定位置，滑移距离是用原子的间距来计算的（这个量就比原子间距的拉大量大得多）；而且原子在滑移之后就达到新的稳定位置，不会回弹，这在宏观上的表现就是塑性（永久性）变

形很大。使原子滑移，那需要有平行于原子滑动面的剪力（因这应力和滑动面平行，所以是剪力）才行。当外力对试件是单向拉伸时，所说的剪力是如何产生的呢？这将在二中进行分析。

现在要将在所说的基本破坏形式中不把压坏列入的事讲一下。就微观上说，材料的原子具有一定的大小，它们在固态材料中保持一定的排列和一定的间距，用压力使间距稍稍缩小是能够的，但缩小量很有限，使一个原子侵入另一个原子是根本不可能的。因此，在单向压缩中，试件在纵向有所缩短，在横向还当有所扩大；如果是塑性不好的材料，而横向又没有力来阻止它扩大，则在横向的原子间距离扩大到这种材料所承受不了的程度时，它就象图13—4b所示的样子在纵向开裂了。但在一般材料试验当中，压力机的压力头对试件上下两面有很大摩擦力，当试件高度不大时，两端摩擦力阻止试件在纵向开裂的影响能使整个试件都受得到，试件的破坏形状就会如图13—4a那样，破裂面发生在斜角方向。在工程实际中，当材料在其表面的一个局部受压时，当于受压材料的横向扩大受到位于局部受压面之外的相邻材料的约束，其承压强度就表现得较高。在科学实验中，曾经对一些塑性不好的材料在互相垂直的三个方向都加压，结果是：可以使它们的形状有相当大的改变而并没有压坏它们。不能将压坏算作基本破坏形式，原因就是这样的。

二、单向拉伸引起的剪坏

以及纯剪引起的拉坏

（一）单向拉伸引起的剪坏

图13—5a示一单向拉伸杆，横截面积是 A （图内未示），所受拉力是 P （图内未示），横截面上的拉应力 $\sigma_t =$

P/A 。现在取一斜截面，它和横截面的夹角是 α ，分析其上的应力 σ_α 和 τ_α 。

为了和以后的分析（例如，图13—17所示）保持联系，决定采用下列代号：取杆的纵向为 x 方向，将横截面叫作截面 x ，用 σ_x 表示横截面上的法应力（以后还用 τ_x 表示其上的剪应力）。斜截面是以它的外法线（向外并垂直于这

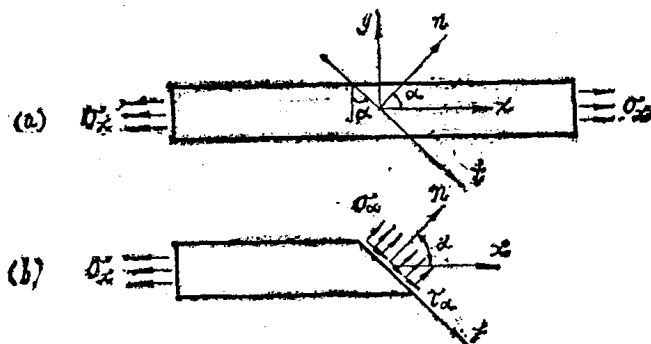


图13—5 单向拉伸杆的斜截面应力

斜截面的线)为 n 轴，取 x 轴（正方向）和 n 轴（正方向）所夹的角 α 来标注斜截面，对 α 的正负作这样规定：从 x 轴转到 n 轴，逆时针的 α 为正，顺时针的 α 为负；斜截面上的法应力用 σ_α 表示，斜截面上的剪应力用 τ_α 表示。

看图13—5 b，取截面 α 之左的部分为分离体。作用在截面 α 的应力，将既有 σ_α ，又有 τ_α ，这是因为若只有 σ_α 或只有 τ_α ，都不能使截面 α 之左的分离体在 y 轴的方向平衡。截面 α 的面积应当是 $A/\cos\alpha$ （将杆件按常截面计算）。在 n 轴方向内，截面 α 上的力是 $\sigma_\alpha A/\cos\alpha$ ；而在分离体左端作用的力 $\sigma_x A$ 在 n 轴方向的分力是 $\sigma_x A \cos\alpha$ ，这两力应平衡，即：

$$\frac{\sigma_\alpha A}{\cos\alpha} = \sigma_x A \cos\alpha$$

由此得: $\sigma_a = \sigma_x \cos^2 \alpha$ (13-5)

在 t 轴(它垂直于 n 轴)方向内, 截面 α 上的力是 $\tau_a A / \cos \alpha$, 分离体左端作用力 $\sigma_x A$ 在 t 轴方向的分力是 $\sigma_x A \sin \alpha$, 这两力也应平衡, 即:

$$\frac{\tau_a A}{\cos \alpha} = \sigma_x A \sin \alpha$$

由此得: $\tau_a = \sigma_x \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\alpha$ (13-6)

式 (13-5) 和 (13-6) 表明: 随 α 的不同, 截面 α 上的 σ_a 和 τ_a 有变化。

若 $\alpha = 0$, 截面 α 变成横截面, 看式 (13-6), $\tau_a = 0$; 看式 (13-5), σ_a 达到其极大值 (因 $\cos^2 \alpha$ 不可能大于 1.0), 即 σ_x 。 τ 值是零的截面, 就是 σ 值达极大的截面, 下文将证明它有较普遍的意义。

若 $\alpha = 45^\circ$, 看式 (13-6), τ_a 达其极大值 (因为 $\sin 2\alpha$ 不可能大于 1.0), 其值 $\tau_{\max}$ 是

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} \quad (13-7)$$

将这个 $\alpha = 45^\circ$ 代入式 (13-5), 得知和 $\tau_{\max}$ 同时存在于截面 α 上的法应力 σ_a 是 $\sigma_x / 2$ 。

如果外力 P 所产生的 $\tau_{\max}$ (它等于 $P/2A$) 已经大到能使截面 α 上的原子滑移 (包括很多平行面), 单向拉伸试件就会因斜截面上的变形而使试件长度加大。图 13-2 所示的 AB 段屈服现象就会在宏观方面出现了。尽管微观现象是剪移, 用单向拉伸所决定的屈服点 σ_s 来制订受拉容许应力 $[\sigma]$, 这在工程实际中却并不会引起多大问题, 因此, 这种做法现在也不需改变。

(二) 关于应力状态的分析

结构的材料破坏，它总得有一个开始点。结构在外力作用下，这个开始破坏的点受到某种应力，当应力达到某种状态及某一数值时，材料承受不了，它就破坏了。从上节的分析，我们知道材料之内一点的应力是和所取的作用面方向有关，因此，在表达应力时必须指明其作用面。而按照力的平衡条件，作用于一点的某应力在另一个方向的面所产生的另一应力是能够计算的。现在，为了弄清楚材料因自身强度不足而引起的破坏现象，一则需要将材料内同一点在不同方向所受到的应力性质（法应力还是剪应力）及数值搞清楚，再则需要研究材料在什么样的应力情况之下会破坏。这前一种分析就叫应力状态分析，而后一种研究则是叫强度理论。

在作应力状态分析时，我们是就材料内的一个点取一个单元体来进行。单元体是指每边尺寸都很小的立体。因为它很小，我们就不再考虑作用力所生应力在它这个范围内的增量，而是从外力在其各相对两个面所生应力都互相平衡出发，进而分析其他截面（称为截面 α ）上的应力。

（三）剪应力互等原理

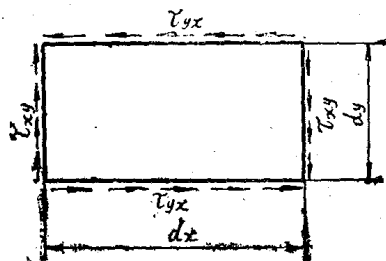


图13—6 剪应力的互等

图13—6表示一个单元体的立面图，长度为 dx ，高度为 dy ，厚度（垂直于纸面方向）为 dz 。作用于 $dydz$ 面内的剪应力今可用 τ_{xy} 或 τ_{yx} 表示（用 τ_{xy} 表示的理

由，是用 x 来表示这个作用面和 x 轴垂直，是可能有的法应力 σ_x 的作用面。再在 x 之后加 y ，表示这剪应力是和 y 轴平行，使和平行于 z 轴并位于这作用面的剪应力有别）。应力总是成双地存在的。左端剪力的值是 $\tau_{xy}dydz$ ，右端剪力的值

也是 $\tau_{xy}dydz$ 。这两个力方向不同，那才成其为剪力；它们的距离是 dx ，这就构成一力偶，力偶矩是 $\tau_{xy}dydzdx$ 。力偶只能用力偶来平衡。事实上，在单元体的上下两面，就一定有 τ_{yx} 这样的剪应力（代号也是照上述规定办理的，它和可能有的 σ_y 作用于同一平面，而又和 x 轴平行），作用面积是 $dx dz$ ，上下剪力的值都是 $\tau_{yx}dx dz$ ，方向相反，距离是 dy ，力偶矩是 $\tau_{yx}dx dz dy$ 。所说的两个力偶矩应当平衡，即：

$$\tau_{xy}dydzdx = \tau_{yx}dx dz dy$$

由此得：

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (13-8)$$

这就是说：在一个单元体上，若在一对平行平面内有一对剪应力，则在和这对剪应力垂直的另一对平行平面内也一定有另一对剪应力；这两对剪应力在应力的大小上是相等的，在使单元体转动的方向方面则相反。图13-6内的一对 τ_{xy} 和另一对 τ_{yx} 就是这样的两对剪应力。本书在这儿是用图上的箭头方向表示 τ_{xy} 和 τ_{yx} 的指向。若是将正负指向包括在代号 τ_{xy} 和 τ_{yx} 之中，那将因两者的转动方向相反，而将式(13-8)改成 $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ 。如果要这样做，一般规定：对单元体内任意一点讲，使单元体作顺时针转的 τ 是正号，逆时针转的 τ 是负号。这样，图13-6内的 τ_{xy} 就是正号，而在按梁的剪力 Q 来算 τ_{xy} 时， $+Q$ 也正好产生符合这一规定的 $+\tau_{xy}$ 。

若在 τ_{xy} 和 τ_{yx} 之外，还有 σ_x 和 σ_y ，那末，由于 σ_x 和 σ_y 都是成双地匀布地作用于相对的平面之内，它们对于体内任一点的力矩都是彼此抵销，这就使式(13-8)不受影响。

(四) 纯剪引起的拉坏

若一单元体只受剪应力、不受法应力的作用，它的应力状态就叫作纯剪。图13-6就属于这情况。现在分析这个单元体45°斜截面上的法应力*。取 $\alpha = -45^\circ$ ，作斜截面，将

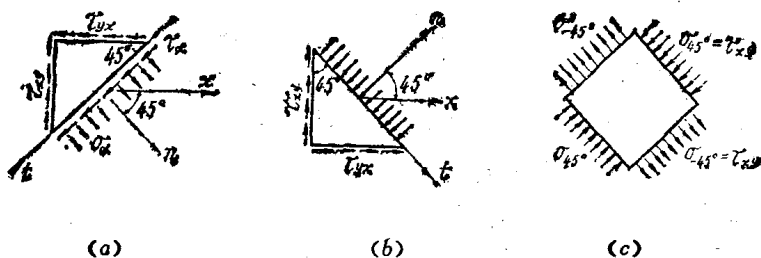


图13-7 纯剪应力状态

斜截面左上方的部分取作分离体，如图13-7a所示。这时， $dx = dy$ ，斜截面的长度是 $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 1.414 dx$ 。若用 A 表示横截面积 $dydz$ ，则斜截面积是 $1.414A$ 。在 n 轴方向内，斜截面的法应力总值是 $\sigma_n (1.414A)$ ；左端 τ_{xy} 总值 $\tau_{xy}A$ 在这方向的分力是 $0.707\tau_{xy}A$ ；上面 τ_{yx} 总值 $\tau_{yx}A$ 在这方向的分力也是 $0.707\tau_{yx}A$ 。看图13-7a， τ_{xy} 和 τ_{yx} 在 n 方向的分力是同向，因此， n 轴方向的平衡条件是：

$$\sigma_n (1.414A) = 0.707\tau_{xy}A + 0.707\tau_{yx}A = 1.414\tau_{xy}A$$

由此得： $\sigma_n = \sigma_{-45^\circ} = \tau_{xy}$ (13-9)

这就是说：当应力状态是纯剪时，在 45° 斜截面上有法应力，其大小等于纯剪中的剪应力的值。

图13-7b表示 $\alpha = 45^\circ$ 斜截面的左下部分的分离体。按同样方法，可以证明 $\sigma_n = \sigma_{45^\circ} = \tau_{xy}$ 。所不同的是：当 $\alpha = -45^\circ$ 时， σ_n 是拉应力；当 $\alpha = 45^\circ$ 时， σ_n 是压应力，这可以从图上各力的平衡条件来明确。

再讲斜截面上的剪应力。看图13-7a，在 t 轴方向内，斜截面上的应力总值是 $\tau_n (1.414A)$ ，而 τ_{xy} 总值在 t 方向的分力是 $0.707\tau_{xy}A$ （向右上）， τ_{yx} 总值在 t 方向的分力是

*若要对该单元体任意一截面上的应力进行分析，可用式 (13-14) 和 (13-15) 并取 $\sigma_x = 0$ 就行了。本节只求最大法应力，就直接让 $\alpha = \pm 45^\circ$ 。