应用数学

高等学校试用教材

应用数学

李致中 主编

中国铁道出版社

1981年·北京

内 容 简 介

本书是为铁路高等院校铁道运输专业“应用数学”课编写的教材，也可作为其他工科院校管理专业的数学参考书．本书内容以工科院校高等数学为起点，选择那些目前在铁路运输管理中已得到应用的或将大可有用的数学方法，以及深入学习这些数学方法所需具备的基础知识．全书包括概率论、随机过程及排队论、线性代数、数学规划、图与网络理论、以及它们的共同基础集合论等六章．估计150学时可以讲完．讲授时可把4、5、6章放在2、3章之前．

本书的主编是李致中．书中的第一章、第二章、第三章及第五章的第四节由李致中执笔，第四章、第六章及第五章的头三节由李慰萱执笔．全书由苗邦均和候振挺审订．

高等学校试用教材

应 用 数 学

李致中 主编

中国铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：15.75 字数：395 千

1981年4月第1版 1981年4月第1次印刷

印数：0001—15,000 册 定价：1.65 元

目　　录

第一章 集 合 论

§1 集合的概念

1.1 集合 集合论已成为近代数学各分支的基础．集合的概念是现代数学最基本的概念．集合（有时也简称为集）是如此基本的一个概念，以至很难用更简单的概念来规定它的定义．因此什么是集合，一般不给严格的定义，而只作描述性的说明．

凡具有某一性质的可以互相区别的对象的全体被当作一个整体来考虑时它便是一个集合．换言之，集合指的是由凡具有某一共性而又可以互相区别的那些对象所构成的集体．下面是集合的例子：

例1． 于A日在B教室中听课的学生构成一个集合；

例2． 于A日在B教室中听课的女学生构成一个集合；

例3． 于A日在B教室中听课的人构成一个集合；

例4． H书中的定理构成一个集合；

例5． 使方程$x^{n+2}+y^{n+2}=z^{n+2}$有整数解的那些自然数n构成一个集合；

例6． 一切素数构成一个集合．

例1至例4所说的集合都是由有限个对象组成的，叫做有限集合．否则叫做无穷集合．例6所说的集合就是无穷集合．至于例5所说的集合有没有对象以及有多少对象，我们尚不知道．

构成集合的东西叫做集合的元素．

给定一个集合时，必须说清楚其元素的特征，即给出判别某东西是否属于它的准则．这儿我们要求的仅仅是这些准则在客观上的明确性，至于主观上能否作出判断是无关紧要的．因此，尽管对于某个被指定的数，它是否属于“素数的集合”在主观上难于作出判断，但我们仍然认为例6所说的集合是给定了的．因为一个数是否属于“素数的集合”，在客观上是明确的而不依赖于人们的主观认识（程度）．

今后用大写拉丁字母A，B，C，…等表示集合，用小写拉丁字母a，b，c，…等表示元素．

元素对集合的隶属关系用符号$\in$和$\overline{\in}$表示．如果元素a属于集合S就记为

$$a\in S,$$

读作“a属于S”．如果元素a不属于S就记为

$$a\overline{\in}S,$$

读作“a不属于S”．例如，设集合S是由元素$\{a\}$，$\{b\}$组成的，则有

$$\{a\}\in S,\qquad \{b\}\in S,$$

但b是不属于S的，故有

$$b\overline{\in}S.$$

如果给定了集合S．则对任何元素a，关系式

$$a \in S \quad 与 \quad a \overline{\in} S$$

中有且仅有一个成立.

元素是个抽象的字眼，它可以是指任何东西. 这就是说集合可以由任何东西来构成. 譬如一个集合可以是另一个集合的元素. 但是为了不导致逻辑上的矛盾，我们规定“集合A不能是它自身的元素”，所以关系式

$$A \in A$$

恒不成立

1.2 集合的表示方法 集合有两种表示方法.

第一种表示方法叫做罗列法，即把集合的所有元素罗列于一个大括弧{ }之中，元素之间用逗号“、”隔开. 例如

$$S_1=\{1, 2, 3, 4\}$$

表示S_1是以1、2，3，4等四个数作为元素而组成的集合；

$$S_2=\{1, \{2, 3\}, 4\}$$

表示S_2是三个元素组成的集合，有两个元素是数1和4，另一个元素则是由数2和3所组成的集合.

对于有限集合，当元素很多，全部罗列其元素是很麻烦的；对于无穷集合，全部罗列其元素则是不可能的. 这时我们常常用一种省略的写法，即只列举其一部分元素，而省略不写其余的元素，但要求能看得出这些被省略不写的元素是指的什么，并用省略号“…”表示它们. 下面就是这种写法的例子：

$$S_3=\{0, 1, 2, \cdots, m\}$$

表示S_3是由零和头m个自然数所组成的集合，它共有$m+1$个元素.

$$S_4=\{1, 2, 3, \cdots\}$$

表示S_4是自然数组成的集合，它是无穷集合；

$$S_5=\{1, 4, 9, 16, \cdots\}$$

表示S_5是平方数组成的集合，它也是无穷集合.

第二种表示方法叫做构造式，即指明元素所具有的特征. 写法如下：

$$S_6=\{x \mid x 是素数\}$$

表示S_6是以一切素数为元素构成的集合；

$$S_7=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$$

表示S_7是以单位圆内（包括圆周上）的所有的点为元素构成的集合（见图1—1）；

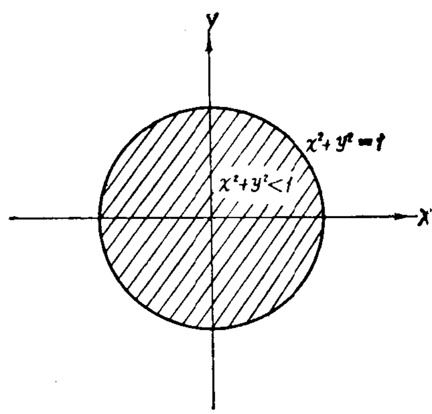

图 1—1

$$S_8=\{x \mid x 是京广铁路线上的编组站\}$$

表示S_8是以京广线上所有的编组站为元素构成的集合.

如果对每一个x，$\pi(x)$是有关x的一个命题，则用记号

$$\{x \mid \pi(x)\}$$

表示能使命题$\pi(x)$成立的一切x组成的集合. 依此，如果$\pi_1(x)$表示“x是一个素数”，$\pi_2(x)$表示“x是京广铁路线上的编组站”，则S_6和S_8又可分别表示为

$$S_6=\{x \mid \pi_1(x)\},$$

$$S_8=\{x \mid \pi_2(x)\}.$$

对于一个集合，我们常常用一个图形来表示它，就象 S_7 那样．例如图1—2表示集合A，即闭曲线内部表示集合A的所有的元素，图1—3表示两个集合A和B，而图中相重叠的那部分表示了既属于集合A又属于集合B的元素．

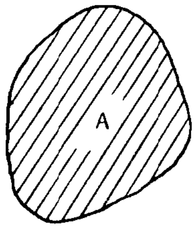

图 1—2

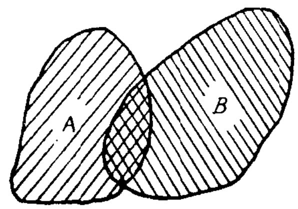

图 1—3

1.3 单元素集合，空集合 只包含一个元素的集合叫做单元素集合．例如集合

$$A=\{a\}$$

就是一个仅由元素 a 构成的单元素集．不要把元素 a 和由它构成的单元素集A混为一谈．a 与$\{a\}$是完全不同的两回事．例如：由某棋手 p 一个人组成中国围棋代表队参加国际围棋比赛，很明显“棋手 p”与“中国围棋代表队”是不能混为一谈的两回事．又例如

$$B=\{1,\ 2,\ 3\}$$

表示B是由三个元素（数1，2，3）组成的集合．

$$C=\{B\}$$

则表示C是由一个元素（集合B）所组成的集，我们前面说过集合可以把别的集合作为自己的元素．由此可知 a，$\{a\}$，$\{\{a\}\}$是彼此不同的，集合$\{\{a\}\}$的元素是$\{a\}$而不是 a，a 是$\{a\}$的元素而不是一个集合．

因为常常在指定了一个集合（的元素的性质）之后，尚不知道是否有（适合这个性质的）元素存在，所以为了方便，约定允许有不包含任何元素的集合，并称之为空集合，简称为空集，记作ϕ．注意，不要把由数零构成的单元素集$\{0\}$和空集ϕ混为一谈．前者包含着一个元素：数零；后者则不包含任何元素，即ϕ的元素的个数为零．

由空集的定义可知，对任何元素 a，关系式

$$a\ \overline{\in}\ \phi$$

恒成立．

1.4 子集，相等的集

设A，B为两个集合，若

$$a\in A$$

则有

$$a\in B$$

时，我们就称集合A包含于集合B，记为$A\subset B$，或称B包含A，记为$B\supset A$．

若$A\subset B$（或$B\supset A$），就称A是B的子集．

集合A不是集合B的子集时，用记号$A\not\subset B$表示．

依子集的定义可知，空集是任何集合的子集，即规定A为任何一个集合时，关系式

$$\phi\subset A$$

恒成立．因为空集ϕ不包含任何元素，故恒有

$$若\ a \overline{\in} A，则\ a \overline{\in} \phi.$$

集A为自身的子集，即关系式

$$A \subset A$$

恒成立.因为恒有

$$若\ a \in A，则\ a \in A.$$

若$A \subset B$且$B \subset A$，即集合A的每一个元素都是集合B的元素，且集合B的每一个元素都是集合A的元素，则称集合A与集合B相等，记为$A=B$．例如，设

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$B=\{x \mid x 为 5-x \geqslant 0 的正整数解\}.$$

则显然有：$A \subset B$且$B \subset A$，故$A=B$．两集相等就意味着同一个集合的两种不同表示．由此可见，对于一个集合而言，元素的书写方式是无关紧要的．

由集合的相等的定义可知，凡空集均相等，即只有唯一的一个空集．

若$A \subset B$，且$A \neq B$（A不等于B）．则称集A是集B的真子集．例如集

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5\},$$

有真子集

$$B=\{2, 3, 1\}.$$

依真子集的定义可知，集合A不是它自身的真子集.

下面举例说明记号$\in$，$\overline{\in}$，$\subset$，$\not\subset$，$=$的正确用法.设

$$S_1=\{a, \{a\}\},$$

$$S_2=\{a, \{a\}, \{\{a\}\}\},$$

$$S_3=\{a, \{b\}\},$$

$$S_4=\{\{\{a\}\}, a, \{a\}\}.$$

则下面右边的写法在概念上是正确的，左边的写法在概念上是错误的．

不正确	正　确
$S_3 \subset S_2$	$S_1 \subset S_2$
$a \subset S_1$，$a \subset S_2$，$a \subset S_3$	$a \in S_1$，$a \in S_2$，$a \in S_3$
$\{a\} \in S_3$	$\{a\} \in S_1$，$\{a\} \in S_2$，$\{a\} \overline{\in} S_3$
$\{\{a\}\} \subset S_3$	$\{a\} \subset S_3$
$\{\{a\}\} \in S_1$	$\{\{a\}\} \subset S_1$
$\{b\} \subset S_3$	$\{b\} \in S_3$，$\{\{b\}\} \subset S_3$
$\{\{\{a\}\}\} \subset S_1$	$\{\{a\}\} \in S_2$，$\{\{a\}\} \subset S_2$，$\{\{\{a\}\}\} \subset S_2$
$S_1 \not\subset S_2$	$S_2 \not\subset S_1$
$S_1 = S_3$	$S_2 = S_4$

1.5 幂集合　以一个给定的集合A的一切子集为元素而构成的集合叫做集合A的幂集合，记作$\mathrm{Pow}(A)$，即

$$\mathrm{Pow}(A)=\{X \mid X \subset A\}.$$

例如，设

$$A=\{a, b, c\},$$

则

$$\mathrm{Pow}(A)=\{\phi,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}\}.$$

设给定有限集合A,它包含n个元素，则由A的任何一个元素构成的A的子集共有$\binom{n}{1}$注个；由A的任何两个元素构成的A的子集共有$\binom{n}{2}$个，…；由A的任何$n-1$个元素构成的A的子集共有$\binom{n}{n-1}$个，再考虑到空集是A的子集，集合A是它自身的子集，于是含n个元素的集合A的子集的个数总共有

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+1=2^n,$$

即含n个元素的集合A的幂集合$\mathrm{Pow}(A)$共有2^n个元素．由此，集合A的幂集合还有一个记法就是2^A．2^A仅是一个记号，并不是2的A次方．

§ 2　集合的运算

2.1　集合的初等运算

1.并　集合A与B的并记作$A\cup B$，它的定义是：

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}.$$

此定义告诉我们：集合A与B的并集就是把属于集合A的元素和集合B的元素合在一起（相同的元素只算一次，此外别无其他元素）构成的集合．例如，设

$$A=\{0,\ 1,\ 2,\ a\},$$
$$B=\{a,\ b,\ c,\ \{0,\ 1,\ 2\}\},$$

则有

$$A\cup B=\{0,1,2,\{0,1,2\},a,b,c\}.$$

依集合的并的定义和子集的定义立即可知关系式

$$A\subset B$$

成立的必要和充分条件是

$$A\cup B=B.$$

集合的并可以推广至有限多个集合的情形．设A_1，A_2，A_3，…，A_n为n个集合，它们的并的定义为

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n=\{x\mid x\in A_1\text{或}x\in A_2\text{或}x\in A_3,\ \cdots,\ \text{或}x\in A_n\}.$$

上式常略为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i.$$

集合的并可以推广至无穷个集合的情形.设有集合A_1，A_2，…，A_n，…它们的并的定义为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\{x\mid x\in A_1\text{或}x\in A_2,\ \cdots,\ \text{或}x\in A_n,\ \cdots\}.$$

上式常略为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i.$$

注：$\binom{n}{m}$是个组合记号，表示由n个元素中任取m个的组合数．当$m>n$时，定义$\binom{n}{m}=0$，而当$m=0$时，则定义$\binom{n}{0}=1$．

例．设有 n 个集合 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$：

$$A_i=\{n-i,i^2\},\qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

则它们的并

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots,n^2\}.$$

2.交 集合 A 与 B 的交记为 $A\cap B$，或简记为 AB，它的定义是

$$A\cap B=\{x|\ x\in A 且 x\in B\}.$$

此定义告诉我们，集合 A 与 B 的交集就是由既属于集合 A 同时也属于集合 B 的元素合在一起构成的集合．例如，设

$$A=\{0,1,2\},$$
$$B=\{1,2,3\},$$
$$C=\{3,4,5\},$$

则有

$$A\cap B=\{1,2\},$$
$$B\cap C=\{3\},$$
$$A\cap C=\phi.$$

依集合的交的定义和子集的定义可知关系式

$$A\subset B$$

成立的必要和充分条件是

$$A\cap B=A.$$

集合的交可推广至两个以上乃至无穷多个集合的情形，其定义为

如果 A_1，A_2，…，A_n 为 n 个集合，则它们的交定义为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x|\ x\in A_1 且 x\in A_2,\cdots 且 x\in A_n\},$$

并简记之为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i.$$

设 A_1，A_2，…为无穷个集合，则它们的交定义为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots=\{x\ |x\in A_1 且 x\in A_2\cdots\},$$

并简记之为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i.$$

例．设

$$A_i=\{x|\ 0\leqslant x<\frac{1}{2^i}\},\qquad I=\{i|\ i 是自然数\},$$

则有

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\{0\}.$$

3.差 集合 A 减集合 B 之差记作 $A-B$，它的定义为

$$A-B=\{x\ |x\in A 且\ x\overline{\in} B\}.$$

此定义告诉我们：集合A与B之差是由那些属于集合A但不属于集合B的元素构成的集合，所以有

$$A-B=A-(A\cap B).$$

例. 设

$$A=\{0,1,2\},$$
$$B=\{1,2,3\},$$

则有

$$A-B=\{0\},$$
$$B-A=\{3\}.$$

本例说明在差式中集合A与B的地位是不能随意调换的，即A与B的地位是不对称的.

4.补 若集B是集A的子集，则集A减集B的差称为集B对集A的补，记为$\overline{B}$. 即若$B\subset A$，则

$$A-B=\overline{B}.$$

集B的补也写作B^c，更清楚地写作C_AB，即集B对集A的补. 一个集B对不同的（包含它的）集合求补将得到不同的补集. 因此，关于一个集合的补，一般需说清楚是对那个包含它的集合求补的结果. 如果未说明这一点，就意味着是对某一已约定的集合求补，我们称这个事先约定的集合为"万有集合". 所谓万有集合，是事先取定的一个集，在我们所研究的问题中所涉及到的集都是它的子集. 今后将万有集合记为U，显然万有集合U因所考虑的问题而异.

例. 设

$$A=\{x\mid x\text{是}D\text{校三班的学生}\},$$
$$B=\{x\mid x\text{是}D\text{校三班的女生}\},$$
$$C=\{x\mid x\text{是}D\text{校的女生}\},$$
$$\mathrm{U}=\{x\mid x\text{是}D\text{校的学生}\}.$$

集B对A求补，则得到

$$\overline{B}=\{x\mid x\text{是}D\text{校三班的男生}\};$$

集B对C求补，则得到

$$\overline{B}=\{x\mid x\text{是}D\text{校三班之外的女生}\};$$

如果未说明B对那个包含它的集合求补，则

$$\overline{B}=\{x\mid x\text{是}D\text{校除三班女生之外的学生}\}.$$

5.对称差 集合A与B的对称差记为$A\triangle B$，它的定义是

$$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A).$$

依此定义，可得关系式

$$A\triangle B=B\triangle A,$$

即A与B的对称差等于B与A的对称差. 这表明运算符"△"两边的集合是可以互相交换位置的，或者说它们所处的位置是对称的，对称差正如此而得名.

依对称差的定义，可得关系式

$$A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B),$$

即集合A与B的对称差是它们的并集减它们的交集的差.

例. 设

$$A=\{0,1,2\},$$
$$B=\{1,2,3\},$$

则有

$$A\triangle B=B\triangle A=\{0,3\}.$$

以上所定义的并、交、差、补、对称差可以分别用所谓文氏图解来示意(见图 1 — 4).

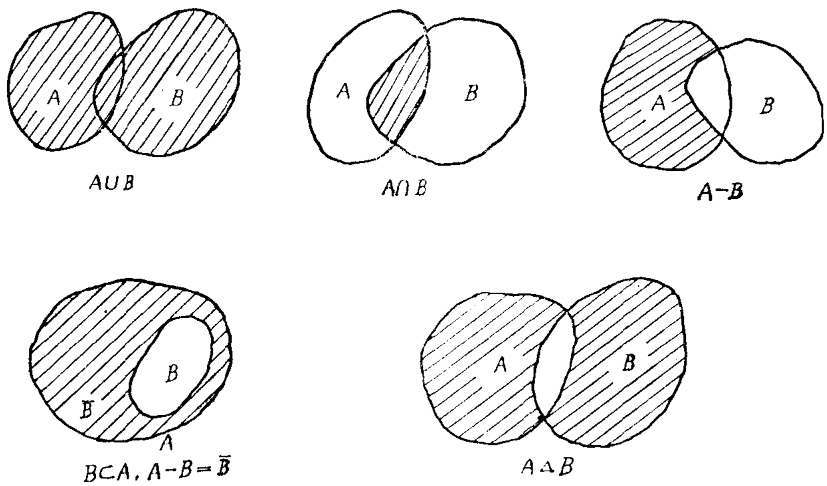

图 1—4

在一个集合运算式中，若其中包含有括弧及各种运算符时，应按如下规定的次序进行：先括弧（ ），再求补“－”，再交“∩”，最后并“∪”

2.2 集合的初等运算的性质 上述关于集合的初等运算“并”、“交”、“差”、“补”满足下列诸性质：

1. **幂等律**：

$$A\cup A=A. \qquad (1-1)$$
$$A\cap A=A. \qquad (1-1')$$

2. **排中律**：

$$A\cap\overline{A}=\phi. \qquad (1-2)$$

3. **交换律**：

$$A\cup B=B\cup A. \qquad (1-3)$$
$$A\cap B=B\cap A. \qquad (1-3')$$

4. **结合律**：

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \qquad (1-4)$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C. \qquad (1-4')$$

5. **分配律**：

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C). \qquad (1-5)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C). \qquad (1-5')$$

6. **吸收律**：

$$A\cup(A\cap B)=A \qquad (1-6)$$
$$A\cap(A\cup B)=A \qquad (1-6')$$

7. **空集的性质**：

$$A\cap\phi=\phi. \tag{1-7}$$

$$A\cup\phi=A. \tag{1-7'}$$

8. 德·摩根公式：

$$(\overline{\overline{A}})=A, \tag{1-8}$$

$$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}, \tag{1-9}$$

$$\overline{\left(\bigcup_i A_i\right)}=\bigcap_i\overline{A}_i, \tag{1-9'}$$

$$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}, \tag{1-10}$$

$$\overline{\left(\bigcap_i A_i\right)}=\bigcup_i\overline{A}_i. \tag{1-10'}$$

以上诸性质按两个集合相等的定义证明之，即证明等号右边的集合是等号左边的集合的子集，且左边的集合是右边集合的子集．下面我们来证明公式（1—5），及（1—10′），而其余诸式的证明，读者可作为练习题把它们补上．

公式（1—5）之证明：

（1）先证$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$．

若$x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A$或$x\in B\cap C$，即有且仅有两种可能：或

$$\begin{aligned}x\in A&\Rightarrow x\in A\cup B,\ x\in A\cup C\\&\Rightarrow x\in((A\cup B)\cap(A\cup C));\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}x\in B\cap C&\Rightarrow x\in B,\ x\in C\\&\Rightarrow x\in A\cup B,\ x\in A\cup C\\&\Rightarrow x\in((A\cup B)\cap(A\cup C));\end{aligned}$$

从而证明了

$$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

（2）再证$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C)$．

若$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\Rightarrow x\in A\cup B$，$x\in A\cup C$，即有且仅有两种可能：或

$$x\in A\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C);$$

或

$$x\,\overline{\in}\,A,$$

由于

$$x\in A\cup B,\ x\in A\cup C,$$

故

$$\begin{aligned}x\in B,\ x\in C&\Rightarrow x\in B\cap C\\&\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C),\end{aligned}$$

从而证明了

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C),$$

将（1），（2）综合起来便证明了公式（1—5）．

公式（1—10′）之证明：

（1）先证明$\overline{\left(\bigcap_i A_i\right)}\subset\bigcup_i\overline{A}_i$．

若$x\in\overline{\left(\bigcap_i A_i\right)}$，即$x\overline{\in}\bigcap_i A_i$，因而至少存在一个$k$，使$x\overline{\in}A_k$，即$x\in\overline{A}_k$，故$x\in\bigcup_i\overline{A}_i$．从而证明了

$$\overline{\bigcap_i A_i}\subset\bigcup_i\overline{A}_i;$$

（2）再证明$\bigcup_i\overline{A}_i\subset\overline{\left(\bigcap_i A_i\right)}$，这只要将（1）之证明的各步逆转即得欲证．

将（1），（2）综合起来便证明了公式（1—10′）

§3　等价关系和商集合

在第一节中我们说过只要说清楚元素及它对集合的隶属关系，则集合就被给定了．由此可见，集合只是它所含的元素的总称，一个集合是谈不上什么更细致的结构的，亦即集合未考虑到它的元素之间的联系．

然而作为我们的研究对象，元素之间并不是没有联系，相反，元素之间可能存在着各色各样的联系．例如，对于构成“自然数集合”的任意两个元素，可以论及它们之间的“相等”关系，可以论及它们之间的“大于”关系、“小于”关系，可以论及它们是否“互质”等等．又例如，对于构成“一群人的集合”中任意两个人，可以按人类学家的标准（“肤色”）来论及他们之间的“相同”关系；也可以按政治经济学家的标准（由经济地位所决定的阶级特色）来论及他们之间的“相同”关系；还可以论及他们之间的“师生”关系，“同学”关系，“领导”关系，“亲属”关系，等等．再例如，对于构成“解决某一问题的策略的集合”中的任意某两个策略，可按某种标准论及它们之间的“优劣”关系或其他关系．在上列讲述中有两点值得特别注意：第一是，某集合的两个元素之间的某种关系可能是不对称的，例如两个人a与b，若a领导b，则b就不能领导a，即若a对b是领导与被领导的关系，反过来就不再存在领导关系了；第二是，当我们讨论某集合的元素间的某种关系时，并非这个集合的每两个元素之间都存在这种关系．例如讨论某人群的集合的元素之间的“父子”关系时，显然并非任何两个元素间都有“父子”关系．由这些背景出发，我们抽象出下面所讲的“关系”的概念．

3.1 直积集合（也叫笛卡尔积）　设给定集合A与B的直积集合记作$A\times B$，它的定义是

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

此定义告诉我们，集合A与B的直积集合是由元素的序偶（a，b）构成的，每个元素序偶的第一位是集A的一个元素，第二位是集B的一个元素．两个元素序偶是相同的，当且仅当它们的第一位元素和第二位元素分别相等，即(a,b)与(a',b')当且仅当$a=a'$及$b=b'$时才相等，记为$(a,b)=(a',b')$．例如，设

$$A=\{a,b,c\},$$
$$B=\{\alpha,\beta,\gamma\},$$

则有

$A\times B=\{(a,\alpha),(a,\beta),(a,\gamma),(b,\alpha),(b,\beta),(b,\gamma),(c,\alpha),(c,\beta),(c,\gamma)\}$,

$B\times A=\{(\alpha,a),(\alpha,b),(\alpha,c),(\beta,a),(\beta,b),(\beta,c),(\gamma,a),(\gamma,b),(\gamma,c)\}$.

由上例可知，$A\times B$一般地并不等于$B\times A$.即“×”号不具有交换性.

例．设R为实数集合，则

$$R\times R=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$$

$R\times R$也简记为R^2．R^2是由平面上的所有的点构成的集合.

同样地,若用$(r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n)=((\cdots((r_1,r_2),r_3),\cdots),r_n)$ 来定义元素$r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n$ $(\in R)$的有序集，而关系式

$$(r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n)=(r_1',r_2',r_3',\cdots,r_n')$$

成立当且仅当下列诸式

$$r_1=r_1',\ r_2=r_2',\ r_3=r_3',\cdots,r_n=r_n'$$

成立．用

$$R\times R\times R\times\cdots\times R=\{(r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n)\mid r_1\in R,r_2\in R,\cdots,r_n\in R\}$$

来定义n个实数集R的直积集合，简记之为R^n，R^n就是由n维实空间的点构成的集合.

3.2 关系 若给定集合A与B，作A与B的直积集合$A\times B$．设$R\subset A\times B$，则R用下列规则规定了集A到集B的关系：

$$\begin{cases}\text{当}(a,b)\in R\text{时，称}a\text{与}b\text{有关系}R\text{，记为}a\overset{R}{\sim}b\text{；}\\ \text{当}(a,b)\overline{\in}R\text{时，称}a\text{与}b\text{无关系}R\text{，记为}a\overset{R}{\not\sim}b\text{.}\end{cases}$$

当上述定义中集合$B=A$时，则$R\subset A\times A$按上述规则给出A中的一个关系，即A的某两个元素间的关系R.

下面用文氏图来表示“关系”.

设老师集$A=\{l,w,z\}$，学生集$B=\{n,m,p\}$，又设有下列师生关系R：

“l是n的老师也是p的老师，但不是m的老师；w只是m的老师；z只是n，m的老师” 于是关系R用文氏图表示出来便有图1－5：

下面讲关系的图像的作法.

由集A到集B的关系R可以用图像表示．以横轴上的某些点代表集A的元素，纵轴上的某些点代表集B的元素，分别过这些点作两组平行线，则它们的交点代表了$A\times B$的元素．在$A\times B$中标出所有的点(a,b)，此处$a\overset{R}{\sim}b$，则点集

$$R=\{(a,b)\{a\overset{R}{\sim}b\}$$

便是关系R的图像.

例如图1－5所表示的A到B的师生关系R的图像为图1－6.

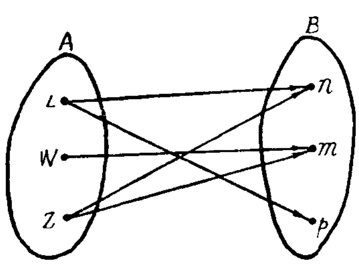

图 1－5

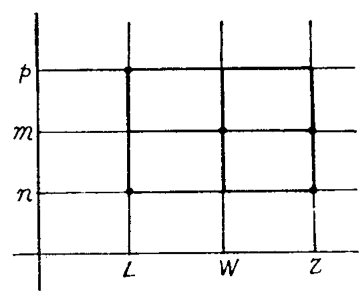

图 1－6

例1. 设集合A为全体实数，则$A\times A$为平面上的所有的点.设

$$R_1=\{(x,y)\mid x-y=0\},$$

即R_1作为$A\times A$的子集是由直线$y=x$上的所有的点构成的，则R_1规定了集A中的一个“相等”关系．设

$$R_2=\{(x,y)\mid x-y\geqslant 0\},$$

即R_2作为$A\times A$的子集是由以$y=x$为边界的半闭平面（图1—7打影线的部分）上的点构成的,则R_2规定了A中的一个“大于等于”的关系.

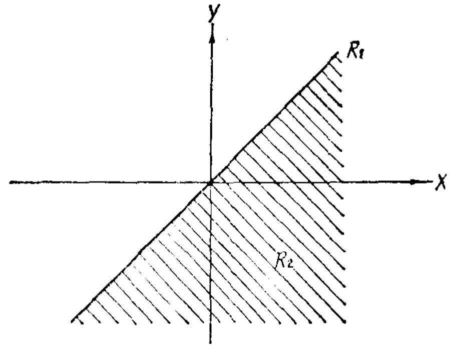

图 1—7

3.3 关系的特性 在下面的论述中符号$\forall x$表示“每一x”，$\exists x$表示“存在一个x”.

① **关系的自反性** 集合X中的关系R称为是自反的，当且仅当

$$\forall a\in X\Rightarrow a\overset{R}{\sim}a.$$

例如在实数集中定义的“相等”关系是自反的，因为每个实数都和自己相等.

② **关系的对称性** 集合X中的关系R称为是对称的，当且仅当

$$\forall a,\forall b\in X,\ 如有a\overset{R}{\sim}b\Rightarrow b\overset{R}{\sim}a.$$

例如，在“一平面上的直线的集合”中“平行”关系是对称的，因为设直线L_1，L_2是这个集合中的两个元素，则若L_1平行于L_2时，当然也有L_2平行于L_1.

③ **关系的传递性** 集合X中的关系R称为是传递的，当且仅当

$$\forall x,\forall y,\forall z\in X,\ 如有x\overset{R}{\sim}y\ 及\ y\overset{R}{\sim}z\Rightarrow x\overset{R}{\sim}z.$$

例如在实数集合A中“小于”关系是传递的，因为若$a,b,c\in A$，若$a<b,b<c$,则有$a<c$.

3.4 等价关系．设R是集合X中的关系，R称为是等价关系，若R满足下列三个性质：

Ⅰ R具有自反性，即 $\forall x\in X\Rightarrow x\overset{R}{\sim}x$;

Ⅱ R具有对称性，即$\forall x\forall y\in X$，如有$x\overset{R}{\sim}y\Rightarrow y\overset{R}{\sim}x$;

Ⅲ R具有传递性，即 $\forall x,\forall y,\forall z\in X$，如有$x\overset{R}{\sim}y$，$y\overset{R}{\sim}z\Rightarrow x\overset{R}{\sim}z$.

如图1—8中划阴影的部分构成集$X\times X$中的一个子集R，不难验证R是自反的，对称的，同时也是传递的，故依定义可知R是X中的一个等价关系.

例如，设

$$A=\{x\mid x是B校三班团小组的成员\},$$

现给出A上的一个关系R：年龄相同的团员相互关系于R，不难看出关系R是自反的，对称的，同时又是传递的，所以R是A中的一个等价关系．我们把这个例子具体化如下，设

$A=\{$赵(21岁)，钱(20岁)，孙(22岁)，李(20岁)，周(21岁)，武(22岁)，陈(21岁)，王(22岁)$\}$

设A中的关系R：年龄相同者相互关系于R,则R是由$A\times A$中的画“○”的9个元素，画“△”的4个元素和画“●”的9个元素所构成（见图1—9），R是个等价关系．如A按各人的年龄大小排列，则R在A的元素重排之后的图中显出与图1—8相同的模式，如图1—10.

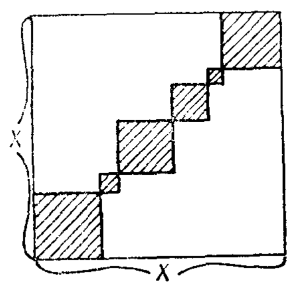

图 1—8