超静定结构实用解法

吴 章 禄 编　著

中 国 铁 道 出 版 社

1 9 8 0 年 · 北京

内 容 简 介

本书讨论杆件体系结构在弹性范围内的内力与变形的计算问题。叙述以“有限单元法”为基础，结合“力法”及“变位法”的计算原理，吸取“分配法”的特长提出一个实用的、较为统一的超静定杆系结构的计算体例，既便于电算，也可用于手算，使“有限单元法”得到推广应用，使经典结构分析法与现代分析法的联系更加明确。

本书可供土建工程技术人员、结构专业师生参考。

超静定结构实用解法

吴 章 禄 编 著

中国铁道出版社出版

责任编辑 王能远

封面设计 翟 达

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 1/16 印张：12 字数：296 千

1 9 8 0 年7月第1版 1 9 8 0 年7月 第1次印刷

印数：0001—15,000册 定价：1.25元

前　　言

本书内容，只限于讨论杆件体系结构在弹性范围内的内力与变形（小变形）的计算问题。对于结构的振动，结构稳定，或结构的塑性分析等概不涉及。

作者试图对现有超静定结构力学分析方法中的几种最常用的方法，作一些调整和补充，以寻求一个更切合实用的，较为统一的超静定杆系结构的计算体例。为此，在现有的比较常用的方法中，选取“有限单元法”为基础，再结合其它如“力法”、“变位法”与“分配法”等，取长补短调整补充，要求达到①对于不同结构，要能给出统一的计算方案；②统一的计算方案要比较简便；③统一的计算方案，还应能适应不同之计算条件，即既能适应电算，在不用电算时也应切实可行。“有限单元法”经补充后，大致能符合上述要求。

在这里以及此后本书中所指之电算机，是指通常说的，能够执行程序计算的电子数字计算机，利用电算机计算简称为电算。

这样，本书虽然不同于一般同类书刊，但并不涉及理论上的新探讨。本书只注重于实用效果的演进。有鉴于目前结构力学方法之多，以至有不少方法始终被弃于实用之外，故此盲目地增添新的方法似乎并无可取。相反，在已有的众多方法之中，假如真正能取长补短臻于完善，从实用角度看倒是事在必需。本书正是从这一愿望出发的。

书中的第一章有限单元法，主要讨论以力为未知数时，计算的基本原理和实际应用。基本原理是以“有限单元法”为基础，渗入了“力法”的计算原则。“力法”的物理概念直观清晰，易于为人们接受，这是一个方法能否普及的不可忽视的一面，这一章主要是考虑了这一方面。此外，这一章还引入了“分配法”常用的刚构常数之一——形、载常数。这是为了此后第三、四两章，将“有限单元法”的应用范围推广作些准备。显然，“有限单元法”与“力法”相互补充是很自然的。在一些“有限单元法”的著作里，多指出两者有共性。在“有限单元法”中，渗入“分配法”的刚构常数也很自然，因为“有限单元法”的柔度矩阵中的元素，实即为“分配法”中的刚构常数。

第二章有限单元法（续），是讨论以变位为未知数时，计算的基本原理和实际应用。这一章与上一章有些类似，对于“有限单元法”，补充了“变位法”的计算概念，引入了“分配法”的刚构常数——刚劲度系数与固端力。

第三章单元构件分析，是讨论划分单元构件，与计算单元构件的刚构常数。刚构常数本是“分配法”中的基本常数，第三章也即是取“分配法”之特长，以补充“有限单元法”之不足。特别是，“有限单元法”要推广用于不用电算时，第三章是基础。因为，结构物复杂时，不用电算必须将单元划分得尽可能大些，否则将会很繁，使“有限单元法”失去实用价值。当然，将单元划分得大些，也不是单纯为了不用电算时，以作权宜之计。如果，结构物有较多而且是定型的大单元时，无论用不用电算，划分大单元都将有利，这时可以充分利用子结构，使结构的矩阵分析大为降阶。而具有较多的定型大单元的结构物，也不是少见的，如在连续桥跨、连续拱或多跨厂房等结构物中，都可能遇到。

第四章应用问题，主要讨论“有限单元法”在推广后，可以取大型单元情形下的应用。在应用问题中，列举了多种不同情况的杆系结构，以便说明“有限单元法”经推广后，在结

构型式变化时的适应性。这一章的最后一节还总结了一下“有限单元法”和其它方法之间的联系。由于“有限单元法”吸取了其它方法之特长，故此“有限单元法”的适应能力，可以证明会较优于其它方法。

此外，关于书中素材的组织，也考虑到普及的原则。“有限单元法”补以“力法”与“变位法”后，其物理力学概念显得直观些，计算原理易于为人们所接受。此外，在四章中每章都有大量的算例，可以通过例子而明确其计算方法。不过，由于包含的内容较多，也不能不考虑到精简的原则，以求整个篇幅不至过长。这样，对于问题的说明又须力求简洁，有时对有些细节的证明只提了一下思路，而不能处处详加推导。总的来说，对于问题的交代，尽可能作到既简洁而又有条理，对于初学者若嫌过于简略时，可以由算例获知算法。

最后，提一下本书的实用意义。鉴于目前的实际情况，一般结构计算工作者，通常都要学习如上所列的常用方法，诸如：“力法”、“变位法”、“分配法”与“有限单元法”等，目前的大中专学校的教材选择大多如此。这是有理由的，因为这些方法各有所长，似乎多以“力法”与“变位法”为基础，以“分配法”适应不用电算时的实用计算，以“有限单元法”适应电算。如果听任让这些常用方法分散，不如将这些方法有机地取得联系，综合这些方法之特长于一个计算体例。从实用角度看，“有限单元法”经补充后，大致能集中这些方法之特长，因此说这也符合目前的实际需要。书中，不仅考虑了对不同结构的适应性，对不同的计算条件，也都作了多方的考虑，使结构的实用计算不受计算条件的限制。作者期望这本小册子对于结构设计工作可能会有些益处。

本书承北京铁路局设计所林申同志作了仔细审校，特此致谢。

吴章禄

1979年5月

目　录

第一章　有限单元法

超静定结构学方法甚多，各具优点，如从实用上选择，通常会注重如下几项原则：

一、要求力学概念直观清晰。这样，易学，用起来也不大会出错。例如：力法和变位法等，多数教科书都选作基本方法。

二、要求计算定型简便。这无疑是，从节省计算工作量出发。如普通分配法，卡氏分配法，一次分配法等多数教本也都选择，便于实用。因为，分配法可以利用杆件定型的常系数，而不致象前一类力法等，什么系数都要从头推算。

三、要求计算程序比较定型。这是从考虑电算方便出发，要求计算程序化。如目前通行的"结构的矩阵分析"，其特点是①列出矩阵比较简便，②矩阵运算程序便于编制。上电子计算机很方便，不用电算时则有时嫌工作量太繁。

这几项原则是基本的。书中考虑到这些原则，以"结构的矩阵分析"——"有限单元法"为基础，再结合其它方法的特点以补充之。期望"有限单元法"经补充后，能够兼有如上三项原则所提出之要求。

§1—1　矩阵代数概要

矩阵代数，是数学学科中的一个重要分支。本节，只从结构矩阵分析的基本要求出发，择要选录。一组元素按行、列排成矩形阵列，称为矩阵，例如：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

是由m行n列共mn个元素排列的矩阵，称为$m\times n$阶矩阵，如果$m=n$则称为n阶方阵。矩阵的缩写，可用方括号中的一个大写字母，或一广义元素表示如：

$$[A]=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

广义元素a_{ij}的下标中，i表示行j表示列。

一、矩阵的运算规则

矩阵的重要价值，在于如下约定的一些重要规则。

1. 矩阵相等的规则。两个 $m\times n$ 阶矩阵：

$$[A]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad [B]=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

如果两者的每一对应元素都相等：

$$a_{ij}=b_{ij}$$

则说这两个矩阵相等：

$$[A]=[B]$$

2. 矩阵的加减规则。矩阵之间，只有在同阶时才能相加减。两矩阵之和或差，由这两矩阵的对应元素相加或相减而定：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} \end{pmatrix}$$

矩阵的加减运算，满足交换律与结合律：

$$[A]\pm[B]=\pm[B]+[A]$$
$$([A]\pm[B])\pm[C]=[A]\pm([B]+[C])$$

3. 数乘矩阵的规则。数与矩阵相乘，等于这数乘矩阵中的所有元素：

$$t[A]=t\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ta_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1n} \\ ta_{21} & ta_{22} & \cdots & ta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ta_{m1} & ta_{m2} & \cdots & ta_{mn} \end{pmatrix}$$

4. 矩阵相乘的规则。两矩阵相乘 $[A][B]$，只有前者的列数等于后者的行数时才能进行，这时两矩阵称为共形矩阵。相乘规则是，如：

$$\underset{m\times l}{[A]}\ \underset{l\times n}{[B]}=\underset{m\times n}{[C]}$$

则 $[C]$ 的元素 c_{ij}，等于 $[A]$ 中第 i 行的诸元素，与 $[B]$ 中第 j 列相应元素的乘积之和：

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}=\sum_{t=1}^{l}a_{it}b_{tj}$$

例1．计算：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} \end{pmatrix}$$

例2．若：

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

计算：

$$[A][B]=\begin{bmatrix}11 & 13 & -3\\ 4 & 2 & 0\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix} \qquad [B][A]=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 14 & 8\end{bmatrix}$$

显然，在矩阵的乘法中一般不具备交换律。然而，结合律与分配律对矩阵乘法仍有效：

$$[A][B][C]=([A][B])[C]=[A]([B][C])$$

$$[E]([A]+[B])[F]=[E][A][F]+[E][B][F]$$

二、矩阵的类型

通常，会遇到如下一些类型的矩阵：

1． 转置矩阵。若将一个$m\times n$阶矩阵$[A]$的行与列依次互换，则所得的新的$n\times m$阶矩阵，称为原矩阵$[A]$的转置矩阵以$[A]^T$表示。如

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix} \quad 则[A]^T=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\end{bmatrix}$$

显然，矩阵与它的转置矩阵有如下规律

① 若$[A]=[B][C]$
  则$[A]^T=[C]^T[B]^T$

② $([A]^T)^T=[A]$

③ $[A]^T+[B]^T=([A]+[B])^T$

2． 对称矩阵与反对称矩阵。一个方阵，如果它的元素对主对角线对称，即$a_{ij}=a_{ji}$，则称这方阵为对称矩阵。例如：

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

主对角线

为对称矩阵。显然，对称矩阵必满足

$$[A]=[A]^T$$

若一个方阵$[A]$，它的主对角线上的元素全为零$a_{ii}=0$，并且具有$a_{ij}=-a_{ji}$的特性，则称$[A]$为反对称矩阵。显然反对称矩阵有关系：

$$[A]=-[A]^T$$

对于一任意方阵，都可表为一对称矩阵与一反对称矩阵之和。例如：

$$\underset{任意方阵}{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}}=\underset{对称矩阵}{\begin{bmatrix}1 & 2.5 & 1.5\\ 2.5 & 1 & 1.5\\ 1.5 & 1.5 & 2\end{bmatrix}}+\underset{反对称矩阵}{\begin{bmatrix}0 & -0.5 & 1.5\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ -1.5 & -0.5 & 0\end{bmatrix}}$$

3. 零矩阵。元素全部为零的矩阵称零阵，用〔0〕表示。

4. 对角矩阵、纯量矩阵与单位矩阵。对角矩阵，是除主对角线上元素外，其余元素全为零的方阵。如：

$$[D]=\begin{bmatrix} d_{11} & & & & \mathbf{0} \\ & d_{22} & & & \\ & & d_{33} & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

为对角矩阵，其中，用粗体字零代表全部为零的元素。也可以将粗体字零省去简记为：

$$[D]=\begin{bmatrix} d_{11} & & & & \\ & d_{22} & & & \\ & & d_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

当对角矩阵中，主对角线上元素全部相等时，称为纯量矩阵。而当纯量矩阵中，主对角线上元素全部等于1时，则称为单位矩阵用〔I〕表示：

$$[I]=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

显然，对于任意矩阵〔A〕，与它的共形单位矩阵〔I〕有关系式：

$$[A]=[A][I] \quad 或 \quad [A]=[I][A]$$

例3. 若：

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

则〔A〕〔I〕中，〔A〕的共形单位矩阵为：

$$[I]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

满足：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

而〔I〕〔A〕中，〔A〕的共形单位矩阵为：

$$[I]=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

满足：

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\4 & 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\4 & 2 & 6\end{pmatrix}$$

若矩阵$[A]$为方阵，则对同阶单位阵$[I]$有关系：

$$[A]=[A][I]=[I][A]$$

5. 三角矩阵。若一方阵，在它的主对角线以上或以下，所有的元素全为零，则称为三角矩阵。如

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{bmatrix} \text{或} [A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{mm}\end{bmatrix}$$

皆为三角形矩阵。

三、分块矩阵

在分析矩阵的运算时，常需将高阶矩阵分块为低阶矩阵，例如：

$$[A]=\left[\begin{array}{cc|c}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{array}\right]=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}$$

分块后其中：

$$[A_1]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \qquad [A_2]=\begin{bmatrix}a_{13}\\ a_{23}\end{bmatrix}$$

$$[A_3]=\begin{bmatrix}a_{31} & a_{32}\\ a_{41} & a_{42}\end{bmatrix} \qquad [A_4]=\begin{bmatrix}a_{33}\\ a_{43}\end{bmatrix}$$

称为原矩阵的子阵。

矩阵分块时，必须注意分块后的阶数，要保证符合矩阵的运算规则。例如，如下两矩阵相乘时，必须注意共形矩阵的要求。（a）的分块是正确的，可以执行矩阵的乘法运算；而（b）的分块则是错误的，无法执行运算。

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & 6 & 5\\ 1 & 7 & 4 & 9\\ \hline 3 & 2 & 7 & 6\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}3 & 7\\ 2 & 6\\ 5 & 4\\ \hline 6 & 2\end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc}2 & 3 & 6 & 5\\ 1 & 7 & 4 & 9\\ \hline 3 & 2 & 7 & 6\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}3 & 7\\ 2 & 6\\ 5 & 4\\ \hline 6 & 2\end{array}\right]$$

（a）　　　　　　　　　　（b）

一般说，加法运算的矩阵在分块时，必须注意相加的矩阵应该同阶。而矩阵相乘时，则分块必须注意，相乘的矩阵应该共形。

例4. 分块矩阵的相加。

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ \hline -3 & 8 & -1 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ \hline 8 & -3 & 6 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ & \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ \hline 5 & 5 & 5 \end{array}\right)=5\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

例5. 分块矩阵相乘。

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 3 & 7 \\ 2 & 6 \\ \hline 5 & 4 \\ 6 & 2 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 9 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 12 & 32 \\ 17 & 49 \\ 13 & 33 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 60 & 34 \\ 74 & 34 \\ 71 & 40 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 72 & 66 \\ 91 & 83 \\ 84 & 73 \end{pmatrix}$$

例6. 当矩阵含有较多零元素时，利用分块矩阵计算：

$$[A]=\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad 与 \quad [B]=\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \hline 1 \\ 3 \\ \hline 2 \\ 1 \end{array}\right)$$

两矩阵相乘得：

$$[A][B]=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \\ A_3B_3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+2 \\ --- \\ 2+3 \\ 1+9 \\ --- \\ 6+2 \\ 4+1 \\ --- \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \\ 8 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

这时由于零元素多，利用分块矩阵很方便。类似于本例〔A〕的矩阵，常称为带形矩阵可以简记为：

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & & \\ & & 1 & 3 & & & & \\ & & & & 3 & 2 & & \\ & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

带形矩阵的特点是，分块后即变为对角矩阵。对角矩阵，除主对角线上元素不全为零外，其它元素全为零。也可称带形矩阵为准对角矩阵。

四、和式的矩阵型式

依据矩阵的运算规则，有些和式可以用矩阵表示。

1． 两因子乘积的代数和的矩阵表示。如对和式：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

依矩阵乘法有

$$[A][B]=[a_1\ \ a_2 \cdots a_n]\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

2． 三因子乘积的代数和的矩阵表示。如对和式：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i = a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \cdots + a_nb_nc_n$$

依矩阵乘法有：

$$[A][B][C]=[a_1\ \ a_2\cdots a_n]\begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i$$

3．矩阵以和式为元素。在结构的矩阵分析中，常遇到三因子和式的矩阵型式如：

$$[\delta_{11}]=\begin{bmatrix} b_{01}^1 \\ b_{12}^1 \\ \vdots \\ b^1_{(n-1)n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{01} & & & \\ & f_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_{(n-1)n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{01}^1 \\ b_{12}^1 \\ \vdots \\ b^1_{(n-1)n} \end{bmatrix}$$

$$[\delta_{12}]=\begin{bmatrix} b_{01}^1 \\ b_{12}^1 \\ \vdots \\ b^1_{(n-1)n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{01} & & & \\ & f_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_{(n-1)n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{01}^2 \\ b_{12}^2 \\ \vdots \\ b^2_{(n-1)n} \end{bmatrix}$$

$$[\delta_{21}]=\begin{bmatrix} b_{01}^2 \\ b_{12}^2 \\ \vdots \\ b^2_{(n-1)n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{01} & & & \\ & f_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_{(n-1)n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{01}^1 \\ b_{12}^1 \\ \vdots \\ b^1_{(n-1)n} \end{bmatrix}$$

$$[\delta_{22}]=\begin{bmatrix} b_{01}^2 \\ b_{12}^2 \\ \vdots \\ b^2_{(n-1)n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{01} & & & \\ & f_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_{(n-1)n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{01}^2 \\ b_{12}^2 \\ \vdots \\ b^2_{(n-1)n} \end{bmatrix}$$

也可以用这些δ_{ij}作为元素，记于一个矩阵式中。为此，依矩阵运算规则可以作变换有：

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{01}^1 & 0 \\ b_{12}^1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ b^1_{(n-1)n} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{01} & & & \\ & f_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_{(n-1)n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{01}^1 & 0 \\ b_{12}^1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ b^1_{(n-1)n} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \delta_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{01}^1 & 0 \\ b_{12}^1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ b^1_{(n-1)n} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{01} & & & \\ & f_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_{(n-1)n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b_{01}^2 \\ 0 & b_{12}^2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b^2_{(n-1)n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \delta_{21} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & b_{01}^2 \\ 0 & b_{12}^2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b^2_{(n-1)n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{01} & & & \\ & f_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_{(n-1)n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{01}^1 & 0 \\ b_{12}^1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ b^1_{(n-1)n} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_{01}^2 \\ 0 & b_{12}^2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b_{(n-1)n}^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{01} & & & \\ & f_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_{(n-1)n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_{01}^2 \\ 0 & b_{12}^2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b_{(n-1)n}^2 \end{bmatrix}$$

分别地将前两式和后两式相加之有：

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{01}^1 & 0 \\ b_{12}^1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ b_{(n-1)n}^1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{01} & & & \\ & f_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_{(n-1)n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{01}^1 & b_{01}^2 \\ b_{12}^1 & b_{12}^2 \\ \vdots & \vdots \\ b_{(n-1)n}^1 & b_{(n-1)n}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_{01}^2 \\ 0 & b_{12}^2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b_{(n-1)n}^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{01} & & & \\ & f_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_{(n-1)n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{01}^1 & b_{01}^2 \\ b_{12}^1 & b_{12}^2 \\ \vdots & \vdots \\ b_{(n-1)n}^1 & b_{(n-1)n}^2 \end{bmatrix}$$

再相加之得：

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{01}^1 & b_{01}^2 \\ b_{12}^1 & b_{12}^2 \\ \vdots & \vdots \\ b_{(n-1)n}^1 & b_{(n-1)n}^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{01} & & & \\ & f_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_{(n-1)n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{01}^1 & b_{01}^2 \\ b_{12}^1 & b_{12}^2 \\ \vdots & \vdots \\ b_{(n-1)n}^1 & b_{(n-1)n}^2 \end{bmatrix}$$

以δ_{ij}为元素的矩阵式，在§ 1—4 节中会遇到。

五、线性方程的矩阵型式

任意线性方程组如：

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\cdots+\delta_{1m}X_m+\varDelta_{1P}=0 \\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\cdots+\delta_{2m}X_m+\varDelta_{2P}=0 \\ \vdots \\ \delta_{m1}X_1+\delta_{m2}X_2+\cdots+\delta_{mm}X_m+\varDelta_{mP}=0 \end{cases}$$

依据矩阵的运算规则，线性方程可以写成矩阵型式：

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1m} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \cdots & \delta_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varDelta_{1P} \\ \varDelta_{2P} \\ \vdots \\ \varDelta_{mP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

可以缩写为：

$$[\delta_{ij}][X_i]+[\varDelta_{iP}]=[0]$$

或

$$[\delta_{ij}][X_i]=-[\varDelta_{iP}]$$

线性方程的系数阵$[\delta_{ij}]$，在超静定结构问题中常为对称方阵，这时对于方程也简称为对称方程。

解线性方程可以利用逆矩阵的概念。在矩阵运算中，没有直接的矩阵除法以解线性方程：

$$[\delta_{ij}][X_i]=-[\varDelta_{iP}] \qquad (1-1-1)$$

除法运算可以由矩阵求逆来完成，一个矩阵$[A]$的逆矩阵用$[A]^{-1}$表示。可以由如下的关系式来定义：

$$[A][A]^{-1}=[A]^{-1}[A]=[I]$$

满足这个关系式的矩阵$[A]^{-1}$，称为矩阵$[A]$的逆矩阵。显然，矩阵和它的逆矩阵是互逆的。解方程（1—1—1）时，可以利用逆阵$[\delta_{ij}]^{-1}$左乘方程两端有：

$$[\delta_{ij}]^{-1}[\delta_{ij}][X_i]=-[\delta_{ij}]^{-1}[\Delta_{iP}]$$

即
$$[I][X_i]=-[\delta_{ij}]^{-1}[\Delta_{iP}]$$

得解
$$[X_i]=-[\delta_{ij}]^{-1}[\Delta_{iP}]$$

关于解线性方程有不少方法。不过在本书的前面三章中，主要任务是阐明力学计算原理，不会遇到多元的线性方程，用初等代数的方法解这些方程，也不会觉得不方便。当然，用初等代数的方法也可以求逆矩阵。设有两矩阵如下：

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad 与 \quad [A]^{-1}=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

互为逆矩阵，则按逆矩阵的定义应有：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1—1—2)$$

由矩阵的加法可知，式（1—1—2）可以由如下矩阵相加而得

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ q_{21} & 0 & 0 \\ q_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & q_{12} & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & q_{32} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & q_{13} \\ 0 & 0 & q_{23} \\ 0 & 0 & q_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是得到方程组：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1—1—3\,a)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1—1—3\,b)$$