水动力学

朱蔚文　张涤明　编

高等教育出版社

水动力学

朱蔚文 张滌明 编

高等教育出版社

(京)112号

内容提要

全书共分六章：第一章水波理论(一)——弥散波；第二章水波理论(二)——浅水理论；第三章兴波理论；第四章浮体水动力学；第五章海洋水动力学；第六章地下水动力学。

本课程学时为72。但书中内容比要求的要多一些，可根据教学时数情况适当取舍。本书在注重经典成果的同时，也适当兼顾了近代的发展。文字上叙述严谨，概念叙述清晰。除供理工科力学专业师生使用外，对造船专业和海洋工程专业师生也有参考价值。

水动力学

朱蔚文　张涤明　编

高等教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
三河市科教印刷厂印装

开本850×1168　1/32　印张 10.875　字数 280 000
1993 年10月第1版　1993 年10月第1次印刷
印数0001— 571
ISBN7-04-004362-9/TV·25
定价 4.25 元

前　言

水动力学有别于空气动力学，主要是：空气动力学以空气为研究对象，而水动力学的研究对象是水。此外，水动力学又以采用求解描绘流体运动状态的微分方程的流体动力学方法为其研究方法，有别于水力学。19世纪已经有不少欧洲的数学家(如Cauchy，Poisson和Stokes等，)开始研究水动力学里的一些经典的问题，并且取得许多卓越的成果。经过一百多年的发展，水动力学的研究对象所涉及的专门学科已日益广泛。为了反映水动力学日新月异的发展，并根据理科力学教材编写组会议的决定，水动力学是作为理工科力学和工程力学专业本科生的专门化课教材。以此为宗旨，我们在教材内容的选取和编排，编写的深浅程度上均按读者为大学理工科力学和工程力学专业本科生在已学完流体力学与数学物理方法等课程的基础上，着重经典的水动力学问题的物理概念以及如何转化为数学上的求解方面，同时也兼顾到水动力学的现代发展。本教材按教学计划的安排为72学时，但本书的内容比每周四节课的学时要求所能介绍的内容要多些，教师可根据实际情况取舍。本书不仅可供力学和工程力学专业师生使用，而且也可供造船专业和海洋工程专业师生以及有关专业的读者参考。

全书共分六章。第一，二章为水波理论，这一部分是水动力学里最重要的问题，也是最基础的问题，其中讲述了流体力学的基本方程组的建立。内容除最经典的Cauchy-Poisson问题外，还有以摄动方法推导KdV方程以及讨论KdV方程的几个特解的比较近代的水波问题。编者力求既谋求数学上的严谨，同时注重物理诠释。第三章兴波理论是水波理论的延续，为进一步研究船舶兴波问题建立基础。第四章浮体水动力学是为进一步研究船舶或其它海上建筑在波浪中的运动和受力问题作准备的，而且还介

绍了一些有关海洋工程里波浪对物体的散射问题的入门知识。第五章海洋水动力学，主要介绍海洋流动的基本方程，基本方程的处理以及若干涉及到近海环流，风潮等经典海流问题。第六章地下水动力学，主要讲述地下渗流的基本理论以及若干有代表意义的经典渗流问题。

本教材是在编者于中山大学1979年编写的“水动力学”讲义基础上经多年教学实践，并根据理科力学教材编审组讨论制订的大纲编写而成。由于时间紧迫，编者水平所限，书中错误在所难免，恳请读者批评指正。

朱蔚文　张涤明

1992年

目　　录

第一章　水波理论(一)——弥散波

有关水的表面波动问题是水动力学中最重要的问题之一，也是最基础的问题。所谓水波，通常是指在水表面（即和大气接触的界面）上所产生的波动。这种波动现象在自然界大量存在；风暴在海洋的表面引起强劲的波动，而当这个波离开风暴区后，在无风的水域里传播时形成长周期、波峰呈圆滑状、长的横排成行的所谓涌浪。在河口涨潮时，潮水迅速上涨，潮流急上，波形逐渐陡峭而最后破碎将产生所谓"暴涨潮"或"水跃"。我国杭州的钱塘江口闻名世界的钱塘江潮便为"水跃"现象；沿江上溯的涌潮形如水墙，其发出的声音犹如千军万马冲杀战场，实为壮观。投石于池塘水面，产生的圆形波纹逐渐扩散，这便是瞬变波里著名的Cauchy-Poisson问题。因海底地震或海下火山爆发所引起的海底激烈的起伏而导致水面形成非常长的波长和周期（有时周期长达几分钟至1小时）的波浪向广阔的大洋传播，这种波浪称之为"海啸"。这种波浪在传播中带有大量的波能，一旦传至近岸狭窄的沉降性海岸的海湾时，其巨大能量所具有的破坏性是惊人的。

山洪暴发在河渠里形成的洪水波；港湾里的湾槽或湖泊里所产生的长周期振荡的"湖震"；水下核爆炸在水面所形成的劲浪以及由于物体在水面或水下运动所形成的船波；所有这些波动都发生在水表面。除了这种水表面的波动外，在海洋深处，水深越深则水的密度越大，此时波动现象还与盐度，水温和水压有关。夏季里，强烈的阳光照射使表面水层受热升温，而在某一深度（通常为10—50米）以下的水温是不会升高的，由此水层再往下的水密度变化比较大，这样便会形成一个温度突变的跃变层，一旦这个水层受到上下方向的微小扰动，微小的密度差就能使水体的浮力增大，因而由重力引起的上下波动将变得显著起来，这种波动称之为"内波"。

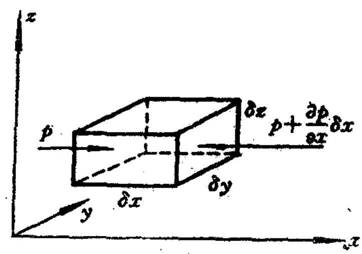
从数学观点看来，波动问题是非常复杂而又繁琐的。要想从数学上得出精确的一般解几乎是不可能的；甚至在最简单的情况下，我们还要做许多假设和近似才能得出理论解。水波理论是对各种问题进行简化和近似的基础上建立起来的；它的理论特点是比较成熟，线性化的方法不少，它的数学处理方法几乎包含了所有处理线性和非线性问题的数学物理方法。

§1 流体力学的基本方程

1. 动量和质量守恒法则

本书名为“水动力学”，故我们考虑的流体介质均为水；一般不考虑其粘性和可压缩性的影响。而作为忽略粘性的结果在连续介质的假设下，流体里的应力系统在每一点上都是处于均匀的压缩状态。压应力的强度便称之为压强。

流体质点的运动方程可由Newton的动量法则求得。现在直角坐标系中考虑这一问题。如图(1-1)所示，在流体中取一矩形小体积元；有一压强p作用在垂直于x轴的面上，则在x轴方向上应用牛顿动量法则有：



图(1-1) 流体小体积上压强

$$\left[-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)+p\right]\delta y\delta z+X\rho\delta x\delta y\delta z=\rho a_x\delta x\delta y\delta z,$$

其中X为每单位质量的外力（或体力）在x方向分量，a_x为x方向加速度分量，ρ为流体密度。物理量p，X和a_x一般为x，y，z和t的函数。当我们取δx，δy,δz趋于零的极限过程后上式可变为：

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho X=\rho a_x,$$

而类似的表达式可应用到另外的两个坐标方向，于是我们可以得

到Lagrange形式的流体质点运动方程：

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+X=a_x \\ -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+Y=a_y \\ -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+Z=a_z, \end{cases} \tag{1-1}$$

或者写成向量形式：

$$-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p+\boldsymbol{F}=\boldsymbol{a}。 \tag{1-2}$$

方程里的体力向量 $\boldsymbol{F}$ 在水动力学里将扮演一个非常重要的角色；事实上，主要的理论结果完全是以重力 $\boldsymbol{F}=(0,\ 0,\ -g)$ 的存在而确定的(这里的g为重力加速度)。坐标的选取为z轴垂直向上，xy平面取静止时的水平面。

上述Lagrange形式的运动方程里，被描绘的是每个流体质点的运动随时间变化的规律。而在流体力学里，我们更常用的运动方程则为Euler形式的运动方程。在这种形式的运动方程里，要确定的是流体所占据的空间上的速度分布；不是试图去跟随每个流体质点的运动，而是在空间的固定点上观察其速度分布（作为时间的函数)。换句话说，具有分量u，v，w的速度场为空间和时间变量的函数。我们可以用微分方程：

$$\frac{dx}{dt}=u,\quad \frac{dy}{dt}=v,\quad \frac{dz}{dt}=w,$$

建立Lagrange形式的变量与Euler形式变量之间的关系式。

为了把方程(1-1)改变成Euler形式，我们需要计算方程(1-1)里的加速度分量以及别的量的导数。假设$F(x,\ y, z;\ t)$为与质点相关联的函数，而质点的运动轨迹由下列向量给出：

$$\boldsymbol{X}=[x(t),\ y(t),\ z(t)],$$

由此得：
$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)=(u,\ v,\ w)$$

为与质点相联系的速度向量。对于这个质点而言，函数$F(x,\ y,\ z;\ t)$的自变量x，y，z自然就是时间t的函数，因此我们有：

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial F}{\partial t}\\&=u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+w\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial t}。\end{aligned}$$

因此，取质点导数的算子$\dfrac{d}{dt}$定义为：

$$\frac{d}{dt}(\quad)=u\frac{\partial(\quad)}{\partial x}+v\frac{\partial(\quad)}{\partial y}+w\frac{\partial(\quad)}{\partial z}+\frac{\partial(\quad)}{\partial t}。\quad(1\text{-}3)$$

而质点的加速度为$\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{du}{dt},\ \dfrac{dv}{dt},\ \dfrac{dw}{dt}\right)$，其中$(u,v,w)=\boldsymbol{v}$为质点的速度。因此，由(1-3)给出加速度分量为$a_x=\dfrac{du}{dt}$，即

$$\frac{du}{dt}=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t},$$

其余两个分量具有类似的表达式。因此，方程(1-1)写成Euler形式为：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\qquad(1\text{-}4)\\&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g,\end{aligned}$$

以上为外力只有体力情况下得到的结果。

方程(1-4)为三个非线性的偏微分方程，含有u，v，w，ρ

和p五个变量。由于假设流体是不可压缩的均质流体，所以密度ρ为常数。此外，由流体的不可压缩性，可以得到一个基于质量守恒法则的微分方程。假设在充满流体的空间内取一固定的封闭曲面包围着空间中的一个区域，若在这区域内既无流体产生亦无流体消失，则由质量守恒法则可得：

$$\iint_S \rho v_n dS = 0,$$

其中S为这个封闭曲面，v_n为通过曲面S的外法线方向的速度分量。上式意味着流进和流出这封闭曲面S的流体质量为零。由Gauss散度定理有：

$$\iint_S \rho v_n dS = \iiint_R \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) d\tau, \tag{1-5}$$

其中R为封闭曲面S所围的空间体积。由此有：

$$\iiint_R \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) d\tau = 0。$$

由R的任意性，因此无论何处均有：

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0。$$

再由ρ为常数，最后可得：

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1-6}$$

为不可压缩均质流体质量守恒法则的表达式。方程(1-6)又称为连续性方程。

综上所述，方程(1-4)和(1-6)为含四个变量的四个方程，故方程是封闭的，若再加上合适的初始条件和边界条件则问题为适定的。

2. Helmholtz定理

在讨论边界条件之前，我们先阐述几个附加的守恒法则。这些法则是在忽略流体的粘性的假设下作出的。

首先讨论环量守恒法则。考虑一条随流体一起移动的封闭曲线C（C总是由流体中的同样质点组成）。而环绕曲线C的环量$\Gamma=\Gamma(t)$由线积分所定义：

$$\Gamma(t)=\oint_C u\,dx+v\,dy+w\,dz=\oint_C v_s\,ds, \tag{1-7}$$

其中v_s为沿C的切向速度分量，ds为C上的线元。若曲线C由向量$X(\sigma,\ t)$给出，其中σ为C上的参数，$0\leqslant\sigma\leqslant1$和$X(0,\ t)=X(1,\ t)$。这里我们采用Lagrange变量系统；固定的$\sigma$值意味着$C$上一个确定的质点。引进向量$X(\sigma,\ t)$后，我们可以把环量写成：

$$\Gamma(t)=\int_0^1 \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial X}{\partial\sigma}d\sigma,$$

其中$\boldsymbol{v}\cdot\dfrac{dX}{\partial\sigma}$为向量的点乘，$\dfrac{\partial X}{\partial\sigma}$为对$\sigma$的微商。因此，我们有：

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt}=\int_0^1\left[\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\frac{\partial X}{\partial\sigma}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial X}{\partial\sigma}\right)\right]d\sigma。 \tag{1-8}$$

由Lagrange形式的方程(1-2)再加上

$$a=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt},\quad F=(0,\ 0,\ -g)=-\operatorname{grad}(gz),$$

和 $\quad\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial X}{\partial\sigma}\right)=\dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\sigma}$，代入方程(1-8)则有：

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma(t)}{dt}&=\int_0^1\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial X}{\partial\sigma}\cdot\operatorname{grad}p-g\frac{\partial X}{\partial\sigma}\cdot\operatorname{grad}z\right.\\&\qquad\left.+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\sigma}\right]d\sigma\\&=\int_0^1\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\sigma}-g\frac{\partial z}{\partial\sigma}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\sigma}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\right]d\sigma=0,\end{aligned}$$

这里是由于p，z和$\boldsymbol{v}$在$\sigma=0$和$\sigma=1$处的值是相同的，而ρ和g为常数。显然，最后的方程意味着：在无粘性流体里，沿任何一条由

相同质点组成的封闭曲线其环量不随时间而变化。这便是Helmholtz定理。

这里我们感兴趣的是沿所有封闭曲线环量为零的情况。这种情况在实际应用里，对问题的简化起着极其重要的作用。

在对所有封闭曲线环量Γ为零的假设下，由Stokes定理可得到以下结论：

$$\Gamma = \oint_C v_s ds = \iint_S (\mathrm{rot}\boldsymbol{v})_n dA, \tag{1-9}$$

其中面积分取在以曲线C为边界的曲面S上。若在所有封闭曲线C上均有$\Gamma = 0$，则有：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

具有这种特性的流动便称之为无旋运动。换句话说，在无粘流体里的运动里，若在某一瞬间是无旋运动，那么这个运动总是无旋的。

3. 势流和Bernoulli法则

无旋运动的假设将导致问题的简化。由于$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 0$，则存在单值速度势函数$\Phi(x, y, z, t)$，速度场可通过对速度势函数取导数得到：

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right), \tag{1-10}$$

即$\boldsymbol{v}$的分量为：

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{1-11}$$

此外，速度势函数还可以由以下积分给出：

$$\Phi(x, y, z, t) = \int^{x, y, z} udx + vdy + wdz.$$

由方程(1-11)和连续方程(1-6)则有

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \tag{1-12}$$

这就是速度势函数满足的连续性方程，又称为Laplace方程，即$\Phi(x, y, z, t)$为一调和函数。这样一来，求解速度场便成为求一满足线性微分方程的单值函数解。这样就使求解问题得到很大的简化。

无旋运动的另一个重要结论可由运动方程(1-4)得到：应用$\mathrm{rot}\,v=0$，容易验证运动方程(1-4)可以写成如下向量形式：

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{grad}(u^2+v^2+w^2)$$

$$=-\mathrm{grad}\frac{p}{\rho}-\mathrm{grad}(gz)。$$

积分上述关系式可得到著名的Bernoulli方程：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)+\frac{p}{\rho}+gz=c(t), \tag{1-13}$$

其中$c(t)$为依赖于时间t而不依赖空间的变量。

这样一来，由于引进了速度势函数Φ便可用方程(1-12)和(1-13)代替原来的连续性方程(1-6)和运动方程(1-4)来求解u，v，w和p。由方程(1-12)和(1-13)，我们发现先由(1-12)求得Φ后，确定u，v和w，然后代入方程(1-13)中求压强p，即速度场和压强场可分开求解。此外，若令$\Phi=\Phi^*+\int^t c(\xi)d\xi$，那么$\Phi^*$也是调和函数，且有$\mathrm{grad}\Phi=\mathrm{grad}\Phi^*$。这意味着，当方程(1-13)的右边的$c(t)$取为0时并不影响$u$，$v$，$w$的求解。

当然，并不是说方程是线性的就使问题变得非常容易解决了。下面我们将发现，不仅Bernoulli方程是非线性的，而且自由面上的边界条件也是非线性的。

4．边界条件

我们假设流体具有固定的或移动的边界面S。由连续介质假设可知，这些边界面上的任一质点一旦在某一时刻在表面上的话，它总是保持在这个面上。在水波理论里，与流体相接触的固定的

不可渗透面(如岸边或海洋底部)和与空气相接触的水表面是最重要的。

如果给定的表面S的方程为$\zeta(x, y, z, t)=0$，由(1-3)式可得在S上将满足条件：

$$\frac{d\zeta}{dt}=u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}+w\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0。\tag{1-14}$$

由式(1-11)和向量$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial y}, \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$是$S$的法向量，则(1-14)可被写成：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=-\frac{\frac{\partial\zeta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2}}=v_n,$$

其中$\frac{\partial}{\partial n}$表示曲面$S$上的法向微商，$v_n$为法向速度分量。

若边界面S是固定的，即不依赖时间t，则有条件

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0，\text{在}S\text{上。}$$

这种情况适合于海岸边，海洋底部或存水水槽的边壁和底部边界条件。

另一种边界条件是S为液体与空气相接触的自由表面；在这个面上，压强是已知的(一般为大气压)，但自由表面的形状是未知的。一般地，我们假设这样的自由表面由下式给出：

$$z=\eta(x, y, t)。\tag{1-15}$$

对于这个面$\zeta=z-\eta(x, y, t)=0$上的任一质点应满足的条件为$\left(\text{由}\frac{d\zeta}{dt}=0\text{得}\right)$：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0，\text{在}S\text{上。}\tag{1-16}$$

这个自由面边界条件又称为运动学边界条件。而自由面上还有一