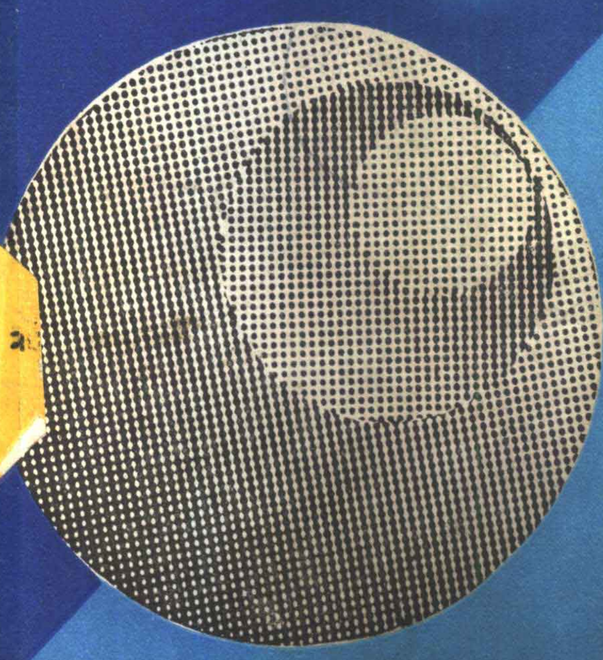
应用概率统计

下册

马逢时 何良材 余明书 范金城编



应用概率统计

下　册

马逢时　何良材
佘明书　范金城　编

高等教育出版社

内容提要

本书是为工科院校硕士研究生及高年级本科生学习应用概率统计而编写的．全书分上、下两册．

下册内容包括多元统计分析和时间序列分析两篇，分别介绍了多元统计和时间序列分析的基本理论和方法，并配有丰富的例题与习题．书末附有答案．

本书可供工科院校研究生及高年级本科生作为教材，也可供工程技术人员参考．

应用概率统计

下　册

马逢时　何良材
余明书　范金城　编

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
商务印书馆上海印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 10.375　字数 249,000
1990 年 8 月第 1 版　1990 年 8 月第 1 次印刷
印数 0,001—5,510

ISBN 7-04-003070-5/O·953

定价　2.50 元

下册目录

第二篇　多元统计分析

第三篇　时间序列分析

第二篇 多元统计分析

多元统计分析(简称多元分析)是运用数理统计的方法研究多指标问题的理论和方法. 早在十九世纪末期，就有处理二元正态总体的一些方法，本世纪初，有人开始讨论多元正态分布的问题. 1928 年 Wishart(维夏特)推导出多元正态总体样本协方差阵的精确分布，即 W 分布. 通常人们就以此作为多元统计分析研究的开端. 费歇(Fisher)、霍太林(Hotelling)及我国学者许宝騄先生(1910–1970)为多元统计分析的理论作了一系列的奠基工作，使多元分析得到了很大的发展.

多元分析发展的初期，主要讨论与多元正态总体有关的一些统计问题，如参数估计及假设检验等. 现在，随着电子计算机的出现与普遍应用，多元分析在理论上与应用上都有了重要的发展. 它被广泛地应用于工业、农业、科学实验、人类学、考古学、地质学、气象学、生物测量学、医学、经济学、教育学、物理学及社会学等各个方面. 今天，多元分析已是数理统计学中非常活跃的一个分支.

多元正态分布有两组参数：均值向量 $\boldsymbol{\mu}$ 与协方差阵 $\boldsymbol{V}$. 对 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 估计、检验的方法，以及这些方法的优良性是多元分析理论研究的主要课题. 多元分析的应用包括判别分析、主成份分析. 典型相关分析、因子分析、对应分析、聚类分析、趋势面分析等，内容十分丰富. 下面我们分三章介绍多元分析的基本概念和一些常用的分析方法.

第七章　多元正态分布及其参数的估计和检验

在多元统计学中，多元正态分布占有最重要的位置。这是因为，一方面，许多随机向量确实服从正态分布，或近似服从正态分布；另一方面，对于多元正态分布，已有一整套统计推断方法，有许多完整的结果。本章要从获得多元正态分布的样本观测值——样本观测阵开始，先给出一些直观背景的介绍和简单分析；再正式给出多元正态分布的定义与一些重要性质以及样本分布；最后讨论多元正态分布的参数估计、均值的检验。

§1　随 机 向 量

我们所讨论的是多个变量(设为 p 个)的总体，所研究的样本数据则是同时观测这 p 个变量(即指标)，进行 n 次观测得到的。我们将这 p 个指标表示为 $x_1, \cdots, x_p$，用随机向量

$$\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_p)'$$

表示观测的 p 个变量全体。观测的每个个体称为一个样品，而全体 n 个样品构成一个样本。

本节我们先介绍样本观测值形成的样本观测阵。然后介绍一般的多元随机变量——随机向量的数字特征及其计算公式。

一　样本观测阵

表 7-1 所示数据，即为样本观测阵。对表中的数据横读，记

$$\boldsymbol{x}_{(\alpha)}=(x_{\alpha1}, x_{\alpha2}, \cdots, x_{\alpha p})' \quad \alpha=1, 2, \cdots, n$$

它表示第 α 个样品的 p 个观测值。$\boldsymbol{x}_{(\alpha)}$ 为表中第 α 行的元素转置形成的列向量。

表 7-1

编号	变	量		
	x_1	x_2	$\cdots$	x_p
1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{np}

竖看样本观测阵．其第 j 列的元素是

$$\boldsymbol{x}_j=(x_{1j},\ x_{2j},\ \cdots,\ x_{nj})' \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ p$$

表示对第 j 个变量 x_j 的 n 次不同的取值．

故样本观测值表可以用矩阵表示为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_p)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}'_{(1)} \\ \boldsymbol{x}'_{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}'_{(n)} \end{pmatrix}$$

有时，也可以用第 α 个样品作代表，简单地表示为

$$\boldsymbol{x}_{(\alpha)}=(x_{\alpha 1},\ x_{\alpha 2},\ \cdots,\ x_{\alpha p})' \quad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

为了避免使用过多的符号，在不致于混淆的情况下，我们一般对随机变量及其取值使用相同的符号．也就是说，在这里的 $x_{\alpha 1},\ x_{\alpha 2},\ \cdots,\ x_{\alpha p},\ \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 既表示随机变量，又表示随机变量的取值，它们具体表示什么，从上下文不难看出．小写黑体字母表示向量，如 $\boldsymbol{x}_{(\alpha)}$(第 α 个样品的 p 个变量值)，$\boldsymbol{x}_j$(第 j 个分量的 n 个观测值)．用大写黑体字母表示矩阵，如 $\boldsymbol{X}$(表示观测阵)等．变量用小写字母，如 x_j 表示第 j 个变量．

二 随机向量的数字特征

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_p)'$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\ \cdots,\ y_q)'$ 是两个随机向量，其中 $x_i,\ y_j$ 是随机变量，$i=1,\ \cdots,\ p,\ j=1,\ \cdots,\ q$.

1. 随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的均值

随机向量 $\boldsymbol{x}$ 有 p 个分量. 若 $E(x_i)=\mu_i$ 存在, $i=1, \cdots, p$, 则我们定义随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的均值为

$$E\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} Ex_1 \\ Ex_2 \\ \vdots \\ Ex_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix}\xlongequal{\triangle}\boldsymbol{\mu} \tag{1.1}$$

$\boldsymbol{\mu}$ 是一个 p 维向量, 称为均值向量. 类似地可以定义矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的均值. (1.1)式中"$\xlongequal{\triangle}$"代表"定义为"或"记作", 以下皆同.

2. 向量 $\boldsymbol{x}$ 的协方差阵

若随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的每一个分量 $x_1, \cdots, x_p$ 的方差存在, 且任意两个分量之间的协方差亦存在, 则定义 $\boldsymbol{x}$ 的协方差阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}&\xlongequal{\triangle}D(\boldsymbol{x})=E(\boldsymbol{x}-E\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-E\boldsymbol{x})'\\&=\begin{pmatrix} Dx_1 & \mathrm{Cov}(x_1, x_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(x_1, x_p) \\ \mathrm{Cov}(x_2, x_1) & Dx_2 & \cdots & \mathrm{Cov}(x_2, x_p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{Cov}(x_p, x_1) & \mathrm{Cov}(x_p, x_2) & \cdots & Dx_p \end{pmatrix}\\&\xlongequal{\triangle}(\sigma_{ij})\end{aligned} \tag{1.2}$$

3. 向量 $\boldsymbol{x}$ 和向量 $\boldsymbol{y}$ 的协方差阵

p 维随机向量 $\boldsymbol{x}$ 和 q 维随机向量 $\boldsymbol{y}$ 的协方差阵定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})&=E(\boldsymbol{x}-E\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}-E\boldsymbol{y})'\\&=\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(x_1, y_1) & \cdots & \mathrm{Cov}(x_1, y_q) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{Cov}(x_p, y_1) & \cdots & \mathrm{Cov}(x_p, y_q) \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.3}$$

当然, 我们假定矩阵 $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 中的各元素有意义. 显然有,

$$D(\boldsymbol{x})=\mathrm{Cov}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \tag{1.4}$$

4．向量 $\boldsymbol{x}$ 的相关阵

随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的相关阵为

$$\boldsymbol{R}=(r_{ij})$$

其中

$$r_{ij}=\frac{\mathrm{Cov}(x_i,\ x_j)}{\sqrt{Dx_i}\cdot\sqrt{Dx_j}}=\frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\cdot\sqrt{\sigma_{jj}}} \tag{1.5}$$

$$i,\ j=1,\ \cdots,\ p$$

注意，$\boldsymbol{x}$ 的协方差阵 $\boldsymbol{V}$ 及相关阵 $\boldsymbol{R}$ 均为对称阵，且相关阵 $\boldsymbol{R}$ 主对角线上的元素的值必为1，其余诸元素的绝对值小于1.

三　常用的公式及其性质

1．求数字特征的有关公式

设 $\boldsymbol{X}$ 为随机矩阵，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为常数矩阵，则容易得知：

$$E(\boldsymbol{AX})=\boldsymbol{A}E(\boldsymbol{X})$$
$$E(\boldsymbol{AXB})=\boldsymbol{A}E(\boldsymbol{X})\boldsymbol{B} \tag{1.6}$$

若 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 为随机向量，则

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Ax},\ \boldsymbol{By})=\boldsymbol{A}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\boldsymbol{B}' \tag{1.7}$$
$$D(\boldsymbol{Ax})=\boldsymbol{A}D(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{AVA}' \tag{1.8}$$

下面我们证明(1.7)式

证
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Ax},\ \boldsymbol{By})&=E(\boldsymbol{Ax}-E\boldsymbol{Ax})(\boldsymbol{By}-E\boldsymbol{By})'\\&=E[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-E\boldsymbol{x})][\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}-E\boldsymbol{y})]'\\&=E[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-E\boldsymbol{x})](\boldsymbol{y}-E\boldsymbol{y})'\boldsymbol{B}'\\&=\boldsymbol{A}[E(\boldsymbol{x}-E\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}-E\boldsymbol{y})']\boldsymbol{B}'\\&=\boldsymbol{A}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\boldsymbol{B}'\end{aligned}$$

由于 $D(\boldsymbol{Ax})=\mathrm{Cov}(\boldsymbol{Ax},\ \boldsymbol{Ax})$，故由(1.7)易得出(1.8)式.

2．协方差阵 $\boldsymbol{V}$ 的有关性质

任何随机向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_p)'$ 的协方差阵 $\boldsymbol{V}$ 都是对称阵，

而且 $\boldsymbol{V}$ 为非负定阵(半正定阵)或正定阵.

以后将"$\boldsymbol{V}$ 是正定阵"表示为 $\boldsymbol{V}>0$, "$\boldsymbol{V}$ 是半正定阵(非负定阵)"表示为 $\boldsymbol{V}\geqslant 0$.

由矩阵代数知识可知下列结论(证明从略,可参看[1]):

i) $\boldsymbol{V}>0$

$\Leftrightarrow$存在同阶非奇异方阵 $\boldsymbol{L}$, 使

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L}.$$

$\Leftrightarrow$存在正交阵 $\boldsymbol{\Gamma}$, 使

$$\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Gamma}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p\end{pmatrix}$$

其中 λ_i 为全部特征根, 且

$$\lambda_i>0,\ i=1,\ \cdots,\ p.$$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{V}$ 的所有主子行列式的值都大于零.

$\Leftrightarrow$ 对于任意列向量 $\boldsymbol{x}$, 二次型 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}\geqslant 0$, 且等式仅在 $\boldsymbol{x}=0$ 时成立.

ii) 若 $\boldsymbol{V}>0$, 对 $\boldsymbol{V}$ 进行分块, 使

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_{11} & \boldsymbol{V}_{12}\\ \boldsymbol{V}_{21} & \boldsymbol{V}_{22}\end{pmatrix}$$

则当 $\boldsymbol{V}_{11}$, $\boldsymbol{V}_{22}$ 为方阵时, 有

$$\boldsymbol{V}_{11}>0,\ \boldsymbol{V}_{22}>0.$$

iii) 若 $\boldsymbol{V}>0$, 则 $\boldsymbol{V}^{-1}$ 存在, 且 $\boldsymbol{V}^{-1}>0$.

iv) 若 $\boldsymbol{V}>0$, 则有

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{V}^{\frac{1}{2}[注]},\ \boldsymbol{V}^{-1}=\boldsymbol{V}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{V}^{-\frac{1}{2}},$$

而且 $$\boldsymbol{V}^{\frac{1}{2}}>0,\ \boldsymbol{V}^{-\frac{1}{2}}>0.$$

〔注〕 $\boldsymbol{V}^{\frac{1}{2}}$是一个矩阵 B, 满足 $BB=V$; $V^{-\frac{1}{2}}$ 是矩阵 B 的逆矩阵 B^{-1}.

3. 关于向量的微商

设 ξ 是 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)'$ 的函数，则定义

$$\frac{\partial\xi}{\partial\boldsymbol{x}}=\left(\frac{\partial\xi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial\xi}{\partial x_n}\right)' \tag{1.9}$$

这就是说，ξ 对列向量求导，得一列向量. 对于线性函数和二次型有下列结果:

i) 若 $\xi=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}$，则

$$\frac{\partial\xi}{\partial\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{\beta} \tag{1.10}$$

其中
$$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1, \cdots, \beta_n)'$$
为常向量.

证 由定义即可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial\boldsymbol{x}}&=\left(\frac{\partial\xi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial\xi}{\partial x_n}\right)'\\&=\left(\frac{\partial\sum_{i=1}^{n}x_i\beta_i}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial\sum_{i=1}^{n}x_i\beta_i}{\partial x_n}\right)'\\&=(\beta_1, \cdots, \beta_n)'=\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

ii) 若 $\xi=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，则

$$\frac{\partial\xi}{\partial\boldsymbol{x}}=\frac{\partial(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')\boldsymbol{x} \tag{1.11}$$

其中
$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$$
为常数矩阵.

特别，当 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$ 时，有

$$\frac{\partial\xi}{\partial\boldsymbol{x}}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

证
$$\begin{aligned}\xi=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\\&=\sum_{j=1}^{n}a_{jj}x_j^2+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l\neq j}(a_{lj}+a_{jl})x_jx_l\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=2a_{ii}x_i+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(a_{ij}+a_{ji})x_j$$

于是
$$\frac{\partial(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')\boldsymbol{x}$$

当 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$, 即得

$$\frac{\partial(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{1.12}$$

4. 分块矩阵的代数运算

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 阶的, 记作

$$\boldsymbol{A}_{n\times m}=(a_{ij}),\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

表示 $\boldsymbol{A}$ 有 n 行, m 列. 将 $\boldsymbol{A}$ 分块成

$$\underset{n\times m}{\boldsymbol{A}}=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix} & \begin{array}{l} r\\ n-r\end{array}\\ \begin{array}{cc} s & \quad m-s\end{array} & \end{array}$$

这里

$\boldsymbol{A}_{11}=(a_{ij})$ 为 $r\times s$ 阶的矩阵, $i=1,\ \cdots,\ r,\ j=1,\ \cdots,\ s$.

$\boldsymbol{A}_{12}=(a_{ij})$ 为 $r\times(m-s)$ 阶的矩阵.

$$i=1,\ \cdots,\ r,\ j=s+1,\ \cdots,\ m.$$

$\boldsymbol{A}_{21}=(a_{ij})$ 为 $(n-r)\times s$ 阶的矩阵

$$i=r+1,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ \cdots,\ s.$$

$\boldsymbol{A}_{22}=(a_{ij})$ 为 $(n-r)\times(m-s)$ 阶矩阵.

$$i=r+1,\ \cdots,\ n,\ j=s+1,\ \cdots,\ m.$$

i) 分块矩阵的运算

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 同是 $n\times m$ 阶矩阵, 且都作了相同的分块.

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix} & \begin{array}{l} r\\ n-r,\end{array}\\ \begin{array}{cc} s & \quad m-s\end{array} & \end{array}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix} & \begin{array}{l} r\\ n-r,\end{array}\\ \begin{array}{cc} s & \quad m-s\end{array} & \end{array}$$

则有

① $$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix} \tag{1.13}$$

② 对于任意实数 c, 有下式成立

$$c\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}c\boldsymbol{A}_{11} & c\boldsymbol{A}_{12}\\ c\boldsymbol{A}_{21} & c\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix} \tag{1.14}$$

③ $$\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}'_{11} & \boldsymbol{A}'_{21}\\ \boldsymbol{A}'_{12} & \boldsymbol{A}'_{22}\end{pmatrix} \tag{1.15}$$

ii) 分块矩阵的逆

若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是可乘的两个矩阵. 将 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 作相应的分块, 使得分块相应的乘积有意义, 即令

$$\underset{n\times m}{\boldsymbol{A}}=\begin{array}{@{}c@{}c@{}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix} & \begin{matrix}r\\ n-r\end{matrix}\\ \begin{matrix}\quad s & \quad m-s\end{matrix} & \end{array},\quad \underset{m\times l}{\boldsymbol{B}}=\begin{array}{@{}c@{}c@{}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix} & \begin{matrix}s\\ m-s\end{matrix}\\ \begin{matrix}\quad t & \quad l-t\end{matrix} & \end{array}$$

则

$$\underset{n\times l}{\boldsymbol{AB}}=\begin{array}{@{}c@{}c@{}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22}\\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix} & \begin{matrix}r\\ n-r\end{matrix}\\ \begin{matrix}\qquad t & \qquad\qquad\qquad l-t\end{matrix} & \end{array} \tag{1.16}$$

以上结果表明, 矩阵分块相乘时, 可以把每一子块当作"元素", 与不分块的矩阵乘法一样进行. 所要注意的是, 每子块相乘的顺序不能随便颠倒.

我们可以直接利用分块矩阵的乘法, 验证下面有关求逆矩阵的公式

① 设

$$\underset{n\times n}{\boldsymbol{A}}=\begin{array}{@{}c@{}c@{}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix} & \begin{matrix}r\\ n-r\end{matrix}\\ \begin{matrix}\quad r & \quad n-r\end{matrix} & \end{array},$$

且 $$|\boldsymbol{A}_{11}|\neq 0$$

则有
$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

② 设
$$\underset{n\times n}{A}=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \end{array},$$

且 A^{-1} 存在,则有
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix} A_{11}^{-1}A_{12} \\ \hline -I \end{pmatrix}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1} \mid -I) \tag{1.17}$$
$$(\text{当}\,|A_{11}|\neq 0)$$

或
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix} -I \\ \hline A_{22}^{-1}A_{21} \end{pmatrix}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}(-I \mid A_{12}A_{22}^{-1}) \tag{1.18}$$
$$(\text{当}\,|A_{22}|\neq 0)$$

③
$$|A|=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$
$$=|A_{11}|\cdot|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}| \tag{1.19}$$
$$(\text{当}\,|A_{22}|\neq 0)$$

或
$$|A|=|A_{22}|\cdot|A_{22}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}| \tag{1.20}$$
$$(\text{当}\,|A_{22}|\neq 0)$$

例如,分块矩阵

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} (n-1)\boldsymbol{A} & \sqrt{n}\,(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}) \\ -\sqrt{n}\,(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}) & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \qquad n \qquad & \qquad\qquad 1 \end{array} & \end{array}$$

的行列式的值可由(1.19)和(1.20)得出：

$$\begin{vmatrix} (n-1)\boldsymbol{A} & \sqrt{n}\,(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}) \\ -\sqrt{n}\,(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}) & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left|(n-1)\boldsymbol{A}+n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\right|$$

$$\overset{\text{或}}{=}\left|(n-1)\boldsymbol{A}\right|\cdot\left|1+\frac{n}{n-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{A}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})\right|$$

(当 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在时)

5．迹及其性质

对于任意给定的 $n\times n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，定义 $\boldsymbol{A}$ 的迹为方阵 $\boldsymbol{A}$ 主对角线上的全部元素的和．记作

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \tag{1.21}$$

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为任意阶的常数矩阵，$\boldsymbol{X}$ 为随机矩阵，且矩阵运算皆有意义．则容易验证下列诸性质．

i) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}+\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$ (1.22)

ii) $\operatorname{tr}(c\boldsymbol{A})=c\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ （c 为任意常数） (1.23)

iii) $\operatorname{tr}\boldsymbol{AB}=\operatorname{tr}\boldsymbol{BA}$ (1.24)

iv) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AX})$ 的数学期望为

$$E\operatorname{tr}(\boldsymbol{AX})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\cdot E\boldsymbol{X}) \tag{1.25}$$

四　多元变量的独立性

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_p)'$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_q)'$ 分别是 p 维，q 维随机向量，$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 相互独立性可用下列两种方式定义．

1° 称多元变量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 为相互独立，若它们的分布函数满足关系：

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F_1(\boldsymbol{x}) \cdot F_2(\boldsymbol{y}) \tag{1.26}$$

其中 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 是 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的联合分布函数，$F_1(\boldsymbol{x})$，$F_2(\boldsymbol{y})$ 分别是 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 的边缘分布函数.

2° 设多元变量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 的联合及边缘分布密度函数存在，分别记为 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $f_1(\boldsymbol{x})$, $f_2(\boldsymbol{y})$, 若

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f_1(\boldsymbol{x}) \cdot f_2(\boldsymbol{y}) \tag{1.27}$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 相互独立.

§2 多元正态分布

一 多元正态分布的定义

我们知道，一元正态分布的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \ \sigma > 0$$

上式可以改写成

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'(\sigma^2)^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

其中 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'$ 表示 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$ 的转置，由于这里 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\mu}$ 均为一维的向量，转置与否都相同，因此可以这样改写. 并使我们能方便地将其推广，给出多元正态分布的定义.

定义 2.1 若 p 元随机向量

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_p)'$$

的概率密度函数为

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1, \cdots, x_p) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\boldsymbol{V}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\} \\ &\qquad (\boldsymbol{V} > 0) \end{aligned} \tag{2.1}$$