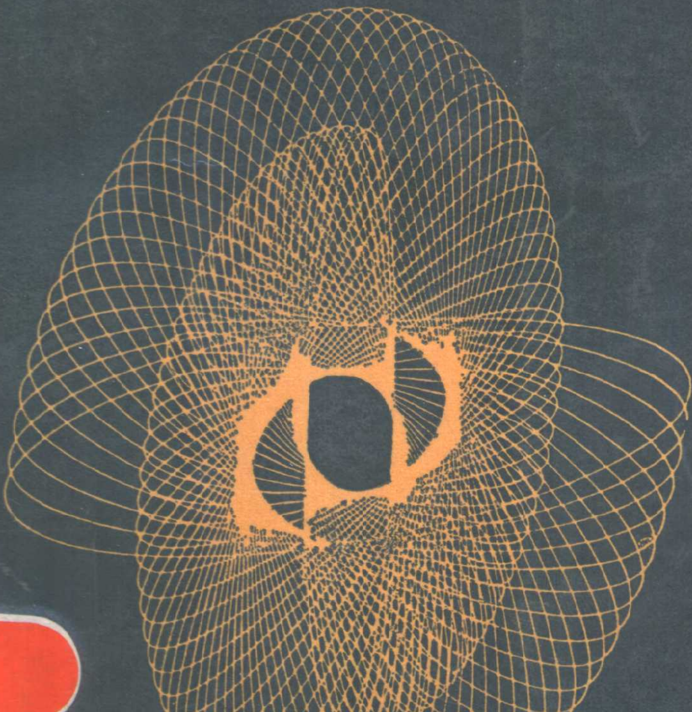
# 非线性奇异摄动现象：理论和应用

章国华　F·A·侯斯　著　　福建科学技术出版社



# 非线性奇异摄动现象：理论和应用

章国华　F・A・侯斯 著
林宗池　倪守平　郑钦贵 译

福建科学技术出版社
一九八九年・福州

**非线性奇异摄动现象：理论和应用**
章国华　F·A·侯斯 著
林宗池　倪守平　郑钦贵 译
*
福建科学技术出版社出版
（福州得贵巷27号）
福建省新华书店发行
福建新华印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/32 7.25印张 153千字
1989年4月第1版
1989年4月第1次印刷
印数：1—3,350
ISBN 7—5335—0221—3/G·26
定价：2.90元

# 作者中译本序

本书以“微分不等式”的基本方法研讨了各种各式的非线性奇异摄动边界问题，收集归纳了不少研究者近年来的许多成果。本书英文版印出后，获得国际数学界的良好评价，并已译成俄文出版，此次能译成中文在中国发行，作者们深感欣慰。

章国华

F·A·侯斯

# 中译本序言

随着生产建设和科学技术的发展，科技工作者面临着非线性问题的挑战，而奇异摄动理论是处理非线性问题的有力工具之一。我研究奇异摄动理论及其应用已有四十多年了，亲身经历了这一研究领域的生成和扩展的过程，近年来，奇异摄动理论在国内外得到日益广泛的应用，而且正在形成严谨的理论体系，国内的研究队伍迅速壮大，并取得了可喜的成果。今后，我们还应该进一步推广和普及奇异摄动理论，使之发挥更大的作用；因此，我认为林宗池教授等翻译出版这本书是十分有益的。

本书由加拿大Calgary大学的章国华教授和美国加州大学的F·A·Howes博士合著，系统地介绍了微分不等式理论在各种非线性奇异摄动边值问题中的应用，收集归纳了许多新近的结果，并且提供了大量实例，展示出所涉及的理论的广阔的应用前景。

微分不等式理论自30年代M·Nagumo奠基以来，目前已日趋完善。近二三十年来，已经成为处理非线性奇异摄动问题的一种重要手段，它的特点是，不仅可证明摄动问题解的存在，同时通过构造适当的不等式，可得到摄动解的精确估计；采用微分不等式理论能够简捷有效地重新获得用其它方法证明的结果，而且可以处理更复杂的问题，揭示渐近过程的实质。

据我了解，本书出版以来，受到了世界上许多科学家和

工程技术人员的重视和良好评价。不少权威性文摘、评论杂志如美国《数学评论》、《应用力学评论》、西德《数学文摘》、法国《纯粹数学和应用数学》等纷纷加以摘引、评述；苏联已出版了该书的俄译本，一本数学专著能这样迅速地在苏联翻译出版，是很难得的。这本专著能译成中文在国内发行，我感到很高兴。它无疑将有利于推动国内奇异摄动理论及其应用的研究，有利于培养这一学科分支的新生力量。本书中译本的出版，肯定会受到数学界、力学界、物理学界、化学界、生物学界和工程技术界的欢迎。

钱伟长

上海工业大学

上海市应用数学和力学研究所

1987.12.24

# 译者的话

早在1981年加籍华人章国华教授访问中国期间，我们就获悉他正准备和Howes教授合写这本专著。1983年，林宗池应邀访加期间，阅读了这本专著的手稿，认为是值得介绍给国内读者的一本好书，于是把手稿复印一份带回，并由林宗池译前言、第一章和第八章；郑钦贵译第二、三、四章；倪守平译第五、六、七章。译稿的部分章节承蒙福建师大数学系原系主任林辰教授审校过，后寄给著者之一章国华教授审校，表示满意。全部译稿我们三人相互轮流校对过，在付印之前，我们又根据原书和著者寄来的勘误表再次相互校对，最后由林宗池统校。原书有些地方写得比较简单难懂，故在译写时，有时添加一些附释，倘因此而引起错误，概由译者负责。

本书内容曾多次作为福建师大数学系硕士研究生专业必修课的教材和本科高年级学生选修课的教材之一。部分内容也曾由本书译者之一林宗池在全国近代数学和力学讨论会上宣讲和介绍过；亦曾向华东师大数学系部分师生、安徽师大数学系部分师生和杭州大学数学系部分师生宣讲和介绍过。《应用数学和力学》编辑部和杭州大学曾联合邀请林宗池在杭州举办一期讲座，再次宣讲和介绍了本书的内容，效果很好，颇受欢迎，听众们都希望中译本能尽快出版。某高校研究生部曾来函告知已把本书内容纳入该院博士研究生的培养计划。因此，本书的翻译出版，无疑地有利于培养这一学科

分支的新生力量，有利于促进国内奇异摄动理论及其应用的研究。

由于译者水平有限，在文稿翻译上可能还存在某些问题，欢迎广大读者批评指正。

我们向钱伟长教授、章国华教授表示敬意，衷心感谢他们在百忙中为本书写了中译本的序言。对于本书的翻译出版给予支持和帮助的领导和其他的同志们，我们也在这里向他们表示致谢！

译　者

1988.1

# 前　言

我们写这本专论有二个目的。一方面，我们想把论及某些类型的奇异摄动非线性边值问题的解的存在性及其渐近性态的许多新近的结果收集在一起。另一方面，为了进一步研究，我们希望沿着这个方向提出若干问题，这些问题我们自己大部分都不能回答。这本文献借助于始终如一地使用微分不等式的技巧研究了常微分方程的纯量和向量两个方面的边值问题。关于纯量问题遵循极大值原理的某些类型我们的结果已相当地完善。可是，我们不能处理含有“共振”性质的问题。这种问题的线性理论就已经是惊人地复杂了，至于任何类型的一般性的非线性理论目前似乎还没有任何希望。关于向量边值问题，甚至容许以不变区域形式导入高维的极大值原理的那些问题，我们的结果也还远没有完成。我们怀着不安的心情提供这些结果是希望抛砖引玉推动在微分方程的这个大有希望和非常重要的领域里出现更多的工作。

由于多年来国家科学基金会、国家科学与工程研究委员会的支持，才有可能获得这个研究报告。对于他们的慷慨和关心，我们借此机会向这两个机构表示我们最诚挚的谢忱。我们也感谢我们的同事和学生们，尤其是 Bob O'Malley, Adelaida Vasil'eva 和 Wolfgang Wasow。我们关于奇

异摄动理论方面的知识和兴趣是和他们分不开的。对于他们的友谊和支持这本专论只不过表示我们感谢的一点微意。

章 国 华　　F·A·侯斯

于Calgary　于Davis

## 著者简介

章国华博士，加拿大卡尔加里大学数学系教授，卡城华人文化社社长

F. A. Howes博士，美国加州大学Davis分校数学系教授

## 译者简介

林宗池，福建师范大学数学系教授，中国奇异摄动理论研究会副理事长

倪守平，福建师范大学数学系副主任，副教授

郑钦贵，福建省人才研究所副所长，副研究员

# 目　录

# 第一章 绪 论

我们主要的兴趣是关于拟线性与非线性的边值问题，对于这些问题，某些著名的方法，诸如匹配渐近展开法及二变量展开法都是不能直接应用的．例如，我们考虑下面的边值问题（参看O'Malley[75]，第五章）：

$$\varepsilon y'' = y'^2,\quad 0<t<1, \tag{A}$$

$$y(0,\ \varepsilon)=1,\quad y(1,\ \varepsilon)=0. \tag{B}$$

通常，这样的非线性边值问题，对于一切足够小的ε值，在[0，1]中是否都有解，这是不太明显的．然而，在本例中，对于一切正的ε值，我们能够通过求积分，在[0，1]中获得下面的精确解

$$y(t,\ \varepsilon)=-\varepsilon\ln[t+e^{-1/\varepsilon}(1-t)],$$

这个解对一切正的ε都是确定的．

这个解$y(t,\ \varepsilon)$的一个重要特色是，作为$(t,\ \varepsilon)$的函数，当$t$与ε接近于0时，它表现为非一致的，亦即，对于每一固定的$t>0$，

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} y(t,\ \varepsilon)=0, \tag{1.1}$$

但是，对于每一固定的$\varepsilon>0$

$$\lim_{t\to 0^+} y(t,\ \varepsilon)=1 \tag{1.2}$$

当ε值减少时，解$y(t,\ \varepsilon)$如图1·1所示．

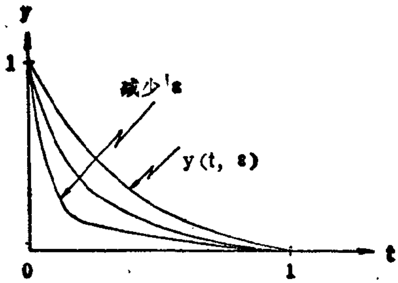



图1·1

由图形或关系式(1.1)、(1.2)，当$\varepsilon\to0^+$时，在(0, 1]的每一闭的子区间上解$y(t, \varepsilon)$关于t一致地趋近于0，但在整个区间〔0, 1〕上却并非如此。注意，$u(t)\equiv0$（对于固定的$\delta>0$，它是解$y(t, \varepsilon)$在〔$\delta$, 1〕上的极限）原来是原方程（A）所对应的退化方程

$$u'^2=0$$

满足右端边界条件（B）的解。

为了说明涉及匹配法及二变量渐近展开法的应用的困难，我们此刻暂时假定问题（A）、（B）的精确解尚未知晓，因此，我们就从形式上入手来做。这些方法的基本前提是（A）、（B）的解能够用两个关于$\varepsilon$的幂级数的所谓内、外展开式来描述。外展开式表示了远离非一致状态区域的解，并且仅仅是$\varepsilon$的幂级数，它的系数是t的函数。另一方面，内展开式的系数不仅是t的函数，而且也是"伸展"变量$\tau=t/\varepsilon$的函数，当$\varepsilon\to0^+$时，对于t的某一确定的范围，$\tau=t/\varepsilon$能够任意地大。变量$\tau$（参看〔55〕第二章；〔75〕第一章）可以认为是某一种变尺度的参量，它具有放大非一致状态区域的作用。为了明确这些思想，首先让我们研究外

展开式$y_0(t,\ \varepsilon)$，即我们把

$$y_0(t,\ \varepsilon)=u_0(t)+\varepsilon u_1(t)+\cdots=\sum_0^{\infty}\varepsilon^n u_n(t)$$

代入微分方程$\varepsilon y''=y'^2$，并使$\varepsilon$的同次幂的系数相等。容易指出$y_0$的第一、二项满足方程

$$u_0'^2=0 \tag{1.3}$$

及

$$u_0''=u_1'^2 \tag{1.4}$$

（1.3）的解是$u_0(t)=$常数，然而解(1.4)的问题实质上是等价于解原来的问题（A）、（B）。我们注意到$u_1(t)=$常数是（1.4）的一个解族。如果我们要求$y_0(t,\ \varepsilon)$满足原来边界条件（B），那么对于函数$u_0$与$u_1$的明显的选择是

$$u_0(t)\equiv0,\ u_1(t)\equiv0,\quad (\text{若}y_0(1,\ \varepsilon)=0)$$

$$u_0(t)\equiv1,\ u_1(t)\equiv0,\quad (\text{若}y_0(0,\ \varepsilon)=1)$$

这里的第一种选择$y_0(1,\ \varepsilon)=0$，是原来固有的要求(参看〔75〕，第五章），并且它能够从几何角度推导如下。如果外展开式$y_0(t,\ \varepsilon)$满足第二种选择$y_0(0,\ \varepsilon)=1$，那么对于〔0，$1-\delta$〕中的$t$，我们就预期

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}y(t,\ \varepsilon)=1,$$

其中$\delta>0$。在$t=1$的某一邻域中，为了满足另一个的边界条件$y(1,\ \varepsilon)=0$，$y(t,\ \varepsilon)$必定从1到0急速地减小。由于方程（A）要求$y'$恒号，于是$y''<0$。然而这是不可能的，因为$\varepsilon y''=y'^2>0$。因此，在$t=1$时，我们必须选择外展开式满足边界条件$y_0(1,\ \varepsilon)=0$。

在这种情况中，外展开式$y_0(t,\ \varepsilon)$应当恒等于0（达到$\varepsilon^2$级的项），此外，函数（参看〔75〕，第五章）

$$\tilde{y}_0(t, \varepsilon) = -\varepsilon \ln t$$

也是一个外展开式，且

$$\tilde{y}_0(1, \varepsilon) = 0,$$

对于$\varepsilon > 0$，这种函数在$t = 0$时具有奇异性，因此人们总想放弃它在 $(0, 1]$ 上立刻逼近于$y$。意外的是这个函数 $\tilde{y}_0$竟是作为从精确解所得出的外展开式。事实上，$\tilde{y}_0$在$t = 0$的奇异性恰好是需要抵消内展式在那里的奇异性。

构造解 $y$的内展开式同样是困难重重，因为根本就说不清适当的伸长变量$\tau$是什么。为此，我们可以做变量的规范变换（参看〔55〕，第二章；〔75〕，第五章）

$$\tau = \frac{t}{\varphi(\varepsilon)}, \varphi(\varepsilon) > 0 \text{且当} \varepsilon \to 0^+ \text{时，} \varphi(\varepsilon) \to 0^+;$$

并且试图通过比较变换后的微分方程的各项来确定 $\varphi(\varepsilon)$ 的渐近特性。显然，$\varepsilon y'' = y'^2$等价于

$$\frac{\varepsilon}{\varphi^2(\varepsilon)} \frac{d^2 y}{d\tau^2} = \frac{1}{\varphi^2(\varepsilon)} \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2,$$

从而没有达到变量替换的目的。利用各种各样的方法，O'Malley(〔75〕,第五章)总是能够构造一个内展式，它在$t=0$时具有奇异性，这个奇异性恰好抵消了函数 $y$ 在那里的奇异性。可是他的方法仍然不是明确的先验法，完全可以相信，含有$y'^2$的非线性的形如（A）、（B）的更复杂的问题不可能解决到这样的程度。

然而，采用我们的方法能够解决这种特别的问题，但是现在我们不讨论这种方法，我们把它推迟到第五章，那时我们将处理比这更大的一类边值问题。