

[美国] A. 爱尔台里主編

高級超越函数

(第二册)

科学技術出版社

高級超越函数

第二冊

[美國] 彼得曼遺稿編輯部編

主任 Arthur Erdélyi

A. 爱尔台里

張致中譯

1

科學技術出版社

內 容 提 要

本書就近代应用数学上所有一切特殊函数的歷史起源、定义、理論、有关的基本公式都作了較全面的系統介紹，并举出了相应的参考資料，包罗面很廣，是一部學術性及資料性的讀物。

本書共分三冊。第一冊所收有 1—6 六章，計： γ -函数；超比函数；勒上特函数；廣义超比級数；超比級数的進一步推廣；合流超比函数。

第二冊所收有 7—13 七章，計：貝塞尔函数；拋物柱及迴轉拋物面函数；不完全 γ -函数；正交多項式；球面及超球面調和多項式；多变量正交多項式；橢圓函数与橢圓積分。

第三冊所收有 14—19 六章，計：自守函数；拉美函数；馬蒂安函数；數論函数；其他函数；母函数。

本書供大專高年級学生、科学研究工作者、工程師等作參考。

高 級 超 越 函 数

第 二 冊

Higher Transcendental Functions Vol. II.

原 著 者 [美國] Staff of the Bateman Manuscript Project
Director: Arthur Erdélyi

原出版者 McGraw-Hill Book Co. Inc., 1953 年版

譯 者 張 致 中

*

科 学 技 術 出 版 社 出 版

(上海南京西路 2004 号)

上海市書刊出版業營業許可証出 079 号

中華書局上海厂印刷 新華書店上海發行所总經售

*

統一書号: 13119 · 117

开本 787 × 1092 耗 1/27 · 印張 15 23/27 · 字數 257,000

1958 年 2 月第 1 版

1958 年 2 月第 1 次印刷 · 印數 1—2,500

定价: (10) 2.40 元

前 言

本書的目的和歷史已在第一冊的引言中說明。現在這本第二冊中所包括的有貝塞爾函數及一些特殊合流超比函數，正交多項式及有關材料，橢圓函數及橢圓積分。編纂的方法仍和第一冊一樣。在本冊的各章中，麥格紐斯負責編寫第 9 及第 11 章，奧勃赫丁喬負責編寫第 7 章，特列柯米負責第 8, 9, 10 及 13 各章。由于本冊後面几章的定稿是在初稿作者離開 Pasadena 之後才行編成，所以給編輯工作增加了很多困難，在修正稿與初稿之間，有些地方有着劇烈的修改。

關於貝塞爾函數方面，在華特生“貝塞爾函數論”中已有的材料，我們祇作了簡略的介紹，而對該書刊行以後新發現的一些結果則作較為詳細的敘述。拋物柱函數方面，在本冊中也介紹得比較全面，但對迴轉拋物面函數則祇作了極簡單的引述，因為最近出版的 H. Buchholz 所著 *Die konfluente hypergeometrische Funktion* (Springer-Verlag, 1953) 一書已為這一函數提供了詳細的材料。在由積分所定義的一些函數（如誤差函數，指數函數等）中，我們採用的記法（無法一致）是純數學中認為最好的記法以及現有數學表使用者認為最方便的記法之間的一種折衷記法。在正交多項式的几章中，我們簡略地介紹了一些一般的理論，大都取自 Szegő 的著作，主要在說明古典正交多項式的性質，不過，我們認為介紹一些稍較陌生的多項式，离散變量的多項式，超球調和函數以及一些多變量雙正交多項式還是有用的。有關橢圓積分及橢圓函數的一章說得比較簡單，但我們希望在研究這些函數時應要用到的一些主要材料都能在這一章中找到，特別是，我們對於第三類橢圓積分的材料收集得比其他方面要多，凡是在研究拉美爾函數或橢球面波函數時需用的一些材料，實際上在本書中業已齊備。我們希望 13 章

中的許多公式的表列方法，將增加這一章的實用。

像在第一冊中一樣，在每章之末都附有參考文獻目錄。書目的多少隨各章的題材而不同。在橢圓積分及橢圓函數一章中所列的參考資料，僅是一些比較新的書和一些必須參考的經典著作。我們對以前已經刊行的專門書誌目錄中的著作提得較少，而對這些目錄刊行以後新出版的書籍或新發表的論文則提得較多。

書末有記法表及索引，第一冊中應用過的一些記法在這裡常要用到，我們不再加以說明，其定義可參看第一冊末的記法表。這裡所用各種參考方法仍和第一冊相同。文內，對參考文獻先寫作者姓名，其後是發表年分，詳細列於章末。同一節里的方程祇用一個數碼表示，不同節中的方程用章節及方程的數碼表示。章次是接續第一冊計數的，第一至第六章在第一冊，第七至第十三章在第二冊。例如 3-7(27) 是指第三章第七節中的方程 (27)，在第一冊中，9-7(12) 則是本書中第九章第七節的方程 (12)。

編者在編輯本書時所得到的幫助較少於第一冊，錯誤在所難免，歡迎批評指正。

A. 愛爾台里

目 錄

前 言	i
第 七 章 貝塞爾函数	1
第一部分：理論部分	1
7-1. 引言	1
7-2. 貝塞爾微分方程	4
7-2-1. 一般階的貝塞爾函数	4
7-2-2. 一般階的修正貝塞爾函数	5
7-2-3. 开尔芬函数及有关函数	6
7-2-4. 整数階的貝塞爾函数	7
7-2-5. 整数階的修正貝塞爾函数	10
7-2-6. 球面貝塞爾函数	10
7-2-7. 貝塞爾函数的積	12
7-2-8. 各种結果	12
7-3. 積分表示式	15
7-3-1. 貝塞爾系数	15
7-3-2. 泊松型的積分表示式	16
7-3-3. 回繞積分表示式	16
7-3-4. 許拉弗里, 古勃勒, 沙涅及有关積分表示式	19
7-3-5. 松本費尔特積分式	21
7-3-6. 巴尼斯積分式	24
7-3-7. 爱里積分式	25
7-4. 漸近展开式	26
7-4-1. 大的变数	26
7-4-2. 大的階	27
7-4-3. 过渡域	32
7-4-4. 均匀漸近展开式微分方程法	34
7-5. 有关函数	36
7-5-1. 紐孟多項式及有关多項式	36
7-5-2. 隆美耳多項式	38
7-5-3. 恩乔-韋勃函数	40
7-5-4. 斯特拉夫函数	42
7-5-5. 隆美耳函数	45
7-5-6. 几种别的記法及有关函数	48
7-6. 加法定理	48
7-6-1. 蓋根堡加法定理	49
7-6-2. 格喇夫加法定理	49
7-7. 積分公式	51
7-7-1. 不定積分	51
7-7-2. 定積分	51
7-7-3. 具有指数函数的無窮積分	55
7-7-4. 韋勃及謝希特林的間断積分	58
7-7-5. 沙涅及蓋根堡積分式及推廣式	59

7-7-6. 麥唐納及聶却尔生 公式.....61	第二部分: 公式89
7-7-7. 关于階的積分.....62	7-11. 初等关系及各种公 式 89
7-8. 貝塞尔函数与勒上 特函数間的关系.....64	7-12. 積分表示式 92
7-9. 貝塞尔函数的零点.....67	7-13. 漸近展开式 97
7-10. 任意函数的級数与 積分表示式.....72	7-13-1. 大的变数 97
7-10-1. 紐孟級数 72	7-13-2. 大的階 98
7-10-2. 卡普頓級数 76	7-13-3. 过渡成 101
7-10-3. 許洛米耳級数.....78	7-13-4. 均匀漸近公式 102
7-10-4. 富里哀-貝塞尔及 狄尼級数 81	7-14. 積分公式 102
7-10-5. 任意函数的積分表 示式.....84	7-14-1. 有限積分 102
	7-14-2. 無窮積分 105
	7-15. 貝塞尔函数的級数 113
	参考文献 121
第八章 拋物柱函数及迴轉拋物面函数130	
8-1. 引言 130	8-5-2. 关于参数的積分表 示式 140
拋物柱函数.....131	8-6. 零点及摹繪性質 142
8-2. 定义和基本性質 131	迴轉拋物面函数.....142
8-3. 積分表示式及積分 式 134	8-7. 特殊合流超比方程 的解 143
8-4. 漸近展开式 138	8-8. 包含迴轉拋物面函 数的積分和級数 145
8-5. 用 $D_p(x)$ 表示的函 数表示式 139	参考文献 147
8-5-1. 級数 139	
第九章 不完全 γ 函数及有关函数149	
9-1. 引言 149	9-4. 級数 155
不完全 γ 函数.....150	9-5. 漸近表示式 156
9-2. 定义和基本性質 150	9-6. 零点及摹繪性質 158
9-2-1. 整数 α 的情形 152	特殊不完全 γ 函数.....160
9-3. 積分表示式及積分 公式 153	9-7. 指数積分及对数積 分 160

9-8.	正弦及余弦積分 .. 162	其推廣	166
9-9.	誤差函數	參考文獻	168
9-10.	弗列司納耳積分及		
第十 章	正交多項式		170
10-1.	正交函數系	10-16.	雅可比及有關多項
10-2.	逼近問題		式的零點
10-3.	正交多項式的一般	10-17.	拉甘尔及漢米特多
性質	175		項式的零點
10-4.	儀器積分	10-18.	經典多項式的不等
10-5.	連分式		式
10-6.	經典多項式	10-19.	展開問題
10-7.	經典正交多項式的	10-20.	展開例子
一般性質	183	10-21.	正交多項式的某些
10-8.	雅可比多項式		類
10-9.	蓋根堡多項式	10-22.	离散變量的正交多
10-10.	勒上特多項式		項式
10-11.	車比雪夫多項式	10-23.	一离散變量的車比
10-12.	拉甘尔多項式		雪夫多項式及其推
10-13.	漢米特多項式		廣
10-14.	雅可比, 蓋根堡, 勒	10-24.	克羅却克及有關多
上特多項式的漸近			項式
性態	215	10-25.	查萊多項式
10-15.	拉甘尔及漢米特多		參考文獻
項式的漸近性態 ..	218		
第十一章	球面及超球面調和多項式		253
11-1.	前言		函數的母函數
11-1-1.	矢量	11-5-2.	馬克斯威極論
11-1-2.	蓋根堡多項式	11-6.	$p=2, h(n, p)$
11-2.	調和多項式		$= (n+1)^2$ 的情形
11-3.	面調和函數	11-7.	球面調和函數的變
11-4.	加法定理		換公式
11-5.	$p=1, h(n, p)=2n+1$	11-8.	漢米特-康拜·特·范
的情形	271		利多項式
11-5-1.	三維空間的面調和		參考文獻
			285

第十二章 多变量正交多項式	287
12-1. 引言	287
12-2. 二变量正交多項式的一般性質	288
12-3. 二变量正交多項式的其他性質	291
三角形中的正交多項式	292
12-4. 阿貝尔多項式	292
圓及球中的正交多項式	296
12-5. 多項式 V	296
12-6. 多項式 U	300
12-7. 展开問題及其他研究	302
多变量漢米特多項式	305
12-8. 漢米特多項式的定義	305
12-9. 漢米特多項式的基礎性質	308
12-10. 其他研究	311
参考文献	313
第十三章 橢圓函数与橢圓積分	315
13-1. 引言	315
第一部分: 橢圓積分	315
13-2. 橢圓積分	315
13-8. 橢圓積分的簡化	317
13-4. 橢圓積分的周期和奇点	322
13-5. 簡化 $G(x)$ 为范式	325
13-6. 勒上特橢圓積分的計值法	332
13-7. 勒上特橢圓典范積分的其他性質	334
13-8. 完全橢圓積分	337
第二部分: 橢圓函数	341
13-9. 橢圓積分的反演	341
13-10. 双周期函数	343
13-11. 橢圓函数的一般性質	345
13-12. 韋爾司特拉斯函数	348
13-13. 韋爾司特拉斯函数的其他性質	351
13-14. 用韋爾司特拉斯函数表示橢圓函数及橢圓積分的表达式	355
13-15. 韋爾司特拉斯函数	
的摹繪性質及退化情形	358
13-16. 雅可比橢圓函数	360
13-17. 雅可比橢圓函数的其他性質	364
13-18. 雅可比橢圓函数的摹繪性質及退化情形	368
13-19. θ 函数	372
13-20. 用 θ 函数表示的橢圓函数及橢圓積分的表达式, 反演問題	378
13-21. 橢圓函数的變換理論	383
13-22. 一階變換	384
13-23. 二階變換	388
13-24. 橢圓模函数	391
13-25. 保形映射	393
参考文献	399
索引	401
記法表	411
人名对照表(1)	414
人名对照表(2)	417

第七章 貝塞尔函数

第一部分 理論部分

7-1. 引言

貝塞尔函数可說是最常用的一种高級超越函数。大概說來，它的出現是与偏微分方程相联系的(通常是当方程中的变数分离開来的时候)，或者是与某些定積分有关。我們对这二种应用都將作扼要的敘述，并从后者着手。

在1770年，拉格郎日研究了一个行星环繞太陽的橢圓运动。設 a, b 为橢圓軌道的長半軸和短半軸，并設其离心率为 $\varepsilon = a^{-1}(a^2 - b^2)^{1/2}$ ；令 r, M, E 分別代表矢徑，平近点角及偏近点角。拉格郎日所得的方程为

$$(1) \quad M = E - \varepsilon \sin E,$$

$$(2) \quad r = a(1 - \varepsilon \cos E) = adM/dE.$$

这些式子產生了下面的展开式

$$(3) \quad \sin E = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nM), \quad \cos E = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nM).$$

1819年貝塞尔把这些式子的系数寫成積分式。例如：

$$A_n = (1/2\pi n)^{-1} \int_0^\pi \cos E \cos(nE - n\varepsilon \sin E) dE.$$

这里出現的積分通过簡單的运算可以用貝塞尔系数來表示[見7-3(2)及7-2(56)的遞推关系]，(3)式的第一个展开式变为

$$(4) \quad \sin E = (1/2\varepsilon)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nM) J_n(n\varepsilon)/n.$$

同样，(3)式的第二个展开式可变换为

$$(5) \quad \cos E = -1/2\varepsilon + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nM) J'_n(n\varepsilon)/n.$$

其后到 1824 年,貝塞尔以積分式[見 7-3(2)]为基础,对現在以其名字命名的函数作了研究.

貝塞尔函数的出現通常都与微分方程相联系. 在華特生的著作“貝塞尔函数論”(Watson, 1944) (这部著作是有关貝塞尔函数的标准著作)中,把这些函数的歷史上溯到 J. 柏努利(大約在 1700). 从欧拉(1764)及泊松(1823)开始,貝塞尔函数就与柱面坐标或球極坐标中的势、波动、或擴散的偏微分方程分不开. 不过,貝塞尔函数有时也与别的微分方程或坐标系有关.

設 x, y, z 为直角坐标, ρ, ϕ, z 为柱面坐标, r, θ, ϕ 为球極坐标,其关系为

$$(6) \quad x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z.$$

$$(7) \quad x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

在这些坐标系中,我們有:

$$(8) \quad \Delta F = F_{xx} + F_{yy} + F_{zz} = F_{\rho\rho} + \rho^{-1}F_{\rho} + \rho^{-2}F_{\phi\phi} + F_{zz},$$

$$(9) \quad \Delta F = F_{rr} + 2 \frac{F_r}{r} + \frac{F_{\theta\theta}}{r^2} + \cot \theta \frac{F_{\theta}}{r^2} + \frac{F_{\phi\phi}}{r^2 \sin^2 \phi}.$$

如果波动方程 $\Delta F = k^2 F = 0$ 的所求解的形式为 $f(\rho)g(\phi)h(z)$ 或 $f(r)g(\theta)h(\phi)$, 則在每一情形下,有人得出了 f 的常微分方程为:

$$(10) \quad \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \rho^{-1} \frac{df}{d\rho} + (k^2 - \alpha^2 - \nu^2 \rho^{-2}) f = 0.$$

$$(11) \quad r^{-1} \frac{d^2(rf)}{dr^2} + [k^2 - \nu(\nu+1)r^{-2}] f = 0.$$

式中 α 及 ν 为分离常数. 这些方程的通解分别为:

$$(12) \quad f(\rho) = Z_{\nu}[\rho(k^2 - \alpha^2)^{1/2}].$$

$$(13) \quad f(r) = r^{-1/2} Z_{\nu+1/2}(kr),$$

式中 Z_{ν} 代表任一貝塞尔函数, 或 ν 階貝塞尔函数的常系数綫性組合.

不同坐标系中的波动方程及其解可用以在物理上引导出貝塞爾函数的理論 (Weyrich, 1937). 从波源 (ξ, η, ζ) 發出的一个球面波, 頻率 ν , 波長 λ , 波数 $k = 2\pi/\lambda$, 可用下面的波动方程來說明

$$R^{-1}e^{-i2\pi(\nu t - R/\lambda)} = R^{-1}e^{-i2\pi\nu t + ikR}.$$

式中 R 为 (ξ, η, ζ) 及 (x, y, z) 两点間的距离. 如果包圍 z 軸的波源具有均匀的密度和相, 則經叠加后可得合成波动形式为

$$(14) \quad u = e^{-i2\pi\nu t} \int_{-\infty}^{\infty} [\rho^2 + (z - \zeta)^2]^{-1/2} \exp \{ ik[\rho^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2} \} d\zeta.$$

其中 $\rho^2 = x^2 + y^2$, 根据惠更斯原理可知这一函数所代表的是一柱面波. 令 $\zeta = z + \rho \operatorname{sh} \tau$, 方程(14)可寫成

$$(15) \quad u = e^{-i2\pi\nu t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\rho \operatorname{ch} \tau} d\tau.$$

这样就得出了第三类貝塞爾函数的松本費尔特積分表示式.

記法

在这一章里, 我們采用華特生貝塞爾函数論中的記法. 在文献上可以看到, 但在我們这里不用的一些記法也可以在这里提一提.

在格雷-馬鳩斯的著作(1922, p. 23 及 25)中用二个函数 $F_\nu(z)$ 及 $G_\nu(z)$,

$$(16) \quad F_\nu(z) = z^{-1/2} J_\nu(2z^{1/2})$$

$$(17) \quad G_\nu(z) = 1/2 i\pi H_\nu^{(1)}(z).$$

楊基-愛姆特(1945, p. 128) 用

$$(18) \quad A_\nu(z) = \Gamma(\nu+1) (1/2 z)^{-\nu} J_\nu(z).$$

在魏塔克耳-華特生(1946, p. 373)的著作中, 修正亨克尔函数 $K_\nu(z)$ 定义为

$$(19) \quad K_\nu(z) = 1/2 \pi [I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)] \operatorname{ctn}(\nu\pi).$$

这和我們在 7-2(13) 中的記法有所不同.

一个与紐孟函数 $Y_\nu(z)$, 7-2(4), 密切相关的函数以 $Y_\nu(z)$ 表

示 (Watson, 1944, p. 63) 或以 $\bar{Y}_\nu(z)$ 表示 (Gray-Mathews, 1922, p. 24),

$$(20) \quad Y_\nu(z) = \bar{Y}_\nu(z) = \pi Y_\nu(z) e^{i\nu\pi} \sec(\nu\pi).$$

一些“有关”函数的其他記法, 見 7-5-6 節.

7-2. 貝塞尔微分方程

7-2-1. 一般階的貝塞尔函数

貝塞尔函数是下面的貝塞尔方程的解:

$$(1) \quad \nabla_\nu w \equiv z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = z \frac{d}{dz} \left(z \frac{dw}{dz} \right) + (z^2 - \nu^2)w = 0;$$

ν, z 不受限制, 但是在目前我們將假定 ν 不为整数 (ν 取整数时見 7-2-4 節). 微分方程 (1) 是超比微分方程的一个極限情形 (見 Klein, 1933, p. 156); 它在 $z=0$ 上具有一个正則型的奇点, 在 $z=\infty$ 上具有一个非正則型的奇点; 所有其他的点都是这一微分方程的尋常点. 求一个綫性微分方程在正則型奇点的鄰域中的解的标准方法 (見 Whittaker-Watson, 1927, 10. 3) 引出了解

$$(2) \quad J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (1/2 z)^{2m+\nu} / [m! \Gamma(m+\nu+1)]$$

及 $J_{-\nu}(z)$. 第一个解 $J_\nu(z)$ 称为第一类貝塞尔函数, z 是貝塞尔函数的变量, ν 为其階. 容易看出, $z^{-\nu} J_\nu(z)$ 的級数絕對收敛, 且在 z 及 ν 的任何有界域中一致收敛. 根据康曼尔关系式 6-3(7), 方程 (2) 又可寫为:

$$(3) \quad J_\nu(z) = (1/2 z)^\nu {}_0F_1(\nu+1; -1/4 z^2) / \Gamma(\nu+1) \\ = (1/2 z)^\nu e^{-iz} {}_1F_1(\nu+1/2; 2\nu+1; 2iz) / \Gamma(\nu+1).$$

綫性組合

$$(4) \quad Y_\nu(z) = (\sin \nu\pi)^{-1} [J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)],$$

$$(5) \quad H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + i Y_\nu(z) \\ = [i \sin(\nu\pi)]^{-1} [J_{-\nu}(z) - J_\nu(z) e^{-i\nu\pi}],$$

$$(6) \quad H_{\nu}^{(2)}(z) = J_{\nu}(z) - iY_{\nu}(z) \\ = (i \sin \nu\pi)^{-1} [J_{\nu}(z)e^{i\nu\pi} - J_{-\nu}(z)]$$

也是(1)的解. Y_{ν} 称为第二类貝塞爾函數或紐孟函數. $H_{\nu}^{(1)}$ 及 $H_{\nu}^{(2)}$ 是第三类貝塞爾函數, 又称为第一类及第二类亨克尔函數. 由(5)及(6)可得

$$(7) \quad J_{\nu}(z) = \frac{1}{2} [H_{\nu}^{(1)}(z) + H_{\nu}^{(2)}(z)],$$

$$(8) \quad Y_{\nu}(z) = \frac{1}{2} [H_{\nu}^{(1)}(z) - H_{\nu}^{(2)}(z)]/i.$$

从定义可知

$$(9) \quad H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\nu\pi} H_{\nu}^{(1)}(z), \quad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\nu\pi} H_{\nu}^{(2)}(z).$$

又, 如以 $\bar{z}$ 表示 z 的共轭复数, 对于其他量也用同样記法, 則

$$(10) \quad \overline{J_{\nu}(z)} = J_{\nu}(\bar{z}), \quad \overline{Y_{\nu}(z)} = Y_{\nu}(\bar{z}), \quad \overline{H_{\nu}^{(1)}(z)} = H_{\nu}^{(2)}(\bar{z}), \\ \overline{H_{\nu}^{(2)}(z)} = H_{\nu}^{(1)}(\bar{z}),$$

特别是, 如階 ν 为实数而变量 z 为正数, 則 J_{ν} 及 Y_{ν} 將都是实数. 所有这四个貝塞爾函數在沿負实軸 0 至 $-\infty$ 間割割的 z 平面内都是單值的. 对于一般的 ν , 它們在 $z=0$ 上都有枝点. 第一类貝塞爾函數顯然是 ν 的整函數, 在后面我們將會看到, 如果对整數 $\nu=n$, 第二、第三类貝塞爾函數在适当的定义下也將是 ν 的整函數.

7-2-2. 一般階的修正貝塞爾函數

如果在貝塞爾微分方程(1)中以 iz 代 z , 則得

$$(11) \quad z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2)w = 0.$$

如 ν 不为整數(整數值的 ν , 見 7-2-5 節), 則 $J_{\nu}(iz)$ 及 $J_{-\nu}(iz)$ 是方程(11)的二个綫性独立解, 但最常用的是下面的函數

$$(12) \quad I_{\nu}(z) = e^{-i\frac{1}{2}\nu\pi} J_{\nu}(ze^{i\frac{1}{2}\pi}) = \sum_{m=0}^{\infty} (\frac{1}{2}z)^{2m+\nu} / [m! \Gamma(m+\nu+1)] \\ = \frac{(\frac{1}{2}z)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1(\nu+1; \frac{1}{4}z^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1/2 z)^{\nu} e^{-z}}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1(\nu+1/2; 2\nu+1; 2z) \\
&= 2^{-2\nu-1/2} z^{-1/2} M_{0, \nu}(2z) / \Gamma(\nu+1),
\end{aligned}$$

[与 6-9(11) 比較] 及 $I_{-\nu}(z)$. 这两函数称为第一类修正貝塞尔函数, 当 ν 是实数、 z 是正数时, 它們都是实数.

函数

$$\begin{aligned}
(13) \quad K_{\nu}(z) &= 1/2 \pi (\sin \nu \pi)^{-1} [I_{-\nu}(z) - I_{\nu}(z)] \\
&= (1/2 \pi / z)^{1/2} W_{0, \nu}(2z)
\end{aligned}$$

[与 6-9(14) 比較] 也是 (11) 的一个解. 这一函数称为第三类修正貝塞尔函数或白塞特函数 (虽然我們现在的定义是根据 MacDonald 的).

顯然我們有

$$(14) \quad K_{-\nu}(z) = K_{\nu}(z),$$

而从 (12), (5) 及 (6) 可知

$$\begin{aligned}
(15) \quad K_{\nu}(z) &= 1/2 i \pi e^{i 1/2 \nu \pi} H_{\nu}^{(1)}(ze^{i 1/2 \pi}) \\
&= -1/2 i \pi e^{-i 1/2 \nu \pi} H_{\nu}^{(2)}(ze^{-i 1/2 \pi}),
\end{aligned}$$

因此有

$$(16) \quad K_{\nu}(ze^{i 1/2 \pi}) = 1/2 i \pi e^{i 1/2 \nu \pi} H_{\nu}^{(1)}(ze^{i \pi}) = -1/2 i \pi e^{-i 1/2 \nu \pi} H_{\nu}^{(2)}(z),$$

$$(17) \quad H_{\nu}^{(1)}(z) = -\frac{2i}{\pi} e^{-i 1/2 \nu \pi} K_{\nu}(ze^{-i 1/2 \pi}).$$

如 ν 为实数而 z 为正数, 則 $K_{\nu}(z)$ 为实数.

7-2-3. 开尔芬函数及有关函数

开尔芬函数 $\text{ber}(x)$ 及 $\text{bei}(x)$ (x 实数) 由下面的方程定义

$$(18) \quad \text{ber}(x) + i \text{bei}(x) = J_0(xe^{i 3/4 \pi}) = I_0(xe^{i 1/4 \pi}).$$

將这一定义推廣到复数 z 及任意階貝塞尔函数上的关系如下:

$$(19) \quad \text{ber}_{\nu}(z) \pm i \text{bei}_{\nu}(z) = J_{\nu}(ze^{\pm i 3/4 \pi}),$$

$$(20) \quad \text{ker}_{\nu}(z) \pm i \text{kei}_{\nu}(z) = e^{\mp i 1/2 \nu \pi} K_{\nu}(ze^{\pm i 1/4 \pi}).$$

如果不用 (20), 那么可用

$$(21) \quad \operatorname{her}_\nu(z) + i \operatorname{hei}_\nu(z) = H_\nu^{(1)}(ze^{i\frac{3}{4}\pi}),$$

$$(22) \quad \operatorname{her}_\nu(z) - i \operatorname{hei}_\nu(z) = H_\nu^{(2)}(ze^{-i\frac{3}{4}\pi}).$$

因此

$$(23) \quad 2 \operatorname{ker}_\nu(z) = -\pi \operatorname{hei}_\nu(z); 2 \operatorname{kei}_\nu(z) = \pi \operatorname{her}_\nu(z),$$

当 ν 是实数且 z 是正实数的时候, 函数 $\operatorname{ber}_\nu(z)$, $\operatorname{bei}_\nu(z)$, $\operatorname{ker}_\nu(z)$, $\operatorname{kei}_\nu(z)$, $\operatorname{her}_\nu(z)$, $\operatorname{hei}_\nu(z)$ 都是实数函数 (詳見 McLachlan, 1934, p 119, 168).

7-2-4. 整数階的貝塞尔函数

整数階的第一类貝塞尔函数称为貝塞尔系数. 如 n 为一正整数, 则在定义 $J_{-n}(z)$ 的無窮級数中, 由于分母上的 γ 函数的極的关系, 前 $n-1$ 項將消失. 其余的 γ 函数可寫成階乘式, 因此有:

$$J_{-n}(z) = \sum_{m=n}^{\infty} (-1)^m (1/2 z)^{2m-n} / [m! (m-n)!],$$

或者, 以 $m = n + l$, $l = 0, 1, 2, \dots$

$$(24) \quad J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

这一关系对于所有整数的 n 都成立.

將 $\exp [1/2 z(t - t^{-1})]$ 依 t 的幕展开, 可得貝塞尔系数. 为了証明这一点, 祇須注意

$$e^{1/2 zt} e^{-1/2 z/t} = \sum_{l=0}^{\infty} (1/2 zt)^l / l! \sum_{m=0}^{\infty} (-1/2 zt^{-1})^m / m!$$

在这一展开式中 t^n 的系数, 恰巧是 $J_n(z)$. 于是可得母函数

$$\exp [1/2 z(t - t^{-1})] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z),$$

或者, 以 az 代 z , t/a 代 t , 可得貝塞尔系数的更普遍的表达式

$$(25) \quad \exp [1/2 z(t - a^2 t^{-1})] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (t/a)^n J_n(az)$$

$$= J_0(az) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(az) [(t/a)^n + (-t/a)^{-n}].$$

以 $\alpha=1$, $t=e^{i\phi}$, 就可得雅可比-恩乔公式:

$$\begin{aligned}
 (26) \quad e^{iz \sin \phi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} J_n(z) \\
 &= J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos(2n\phi) \\
 &\quad + 2i \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) \sin[(2n-1)\phi],
 \end{aligned}$$

如以 $t=ie^{i\phi}$, 則

$$\begin{aligned}
 (27) \quad e^{iz \cos \phi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{in\phi} J_n(z) \\
 &= J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z) \cos(n\phi).
 \end{aligned}$$

如 ν 为整数, 則 (4), (5), (6) 式的右边將變成不定形. 但是当 $\nu \rightarrow n$ (整数) 时, 这些右边部分的極限还是存在的, 因此可以把它作为整数階第二类及第三类貝塞尔函数的定义. 顯然, 我們是足可以計算下面这一式的

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z) \quad n=0, 1, 2, \dots$$

在 (4) 中应用罗司比塔規則, 可得

$$(28) \quad Y_n(z) = \pi^{-1} \left[\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-n}}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}.$$

从 (2) 及 1-7 (1)

$$(29) \quad \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} = J_\nu(z) \ln(1/2 z) - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (1/2 z)^{\nu+2m} \frac{\psi(\nu+m+1)}{m! \Gamma(\nu+m+1)},$$

$$\begin{aligned}
 (30) \quad \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} &= -J_{-\nu}(z) \ln(1/2 z) \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (1/2 z)^{\nu+2m} \frac{\psi(-\nu+m+1)}{m! \Gamma(-\nu+m+1)},
 \end{aligned}$$

如 $m \leq n-1$, 則由公式 1-17 (11) 及 1-17 (12) 可得

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \psi(-\nu+m+1) / \Gamma(-\nu+m+1) = (-1)^{n-m} (n-m+1)!,$$

因此, 由 (30) 及 (24), 得