

学习之友—— 职工数学问题分析和解答

黄在中 王 钧编



03083

01
3

学习之友——

职工数学问题分析和解答

黄在中 王 钧编

湖南科学技术出版社

学习之友——
职工数学问题分析和解答

黄在中 王 钧 编

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版

(长沙市展览馆路14号)

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1982年11月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：11.375 字数：281,000

印数：1—36,500

统一书号：13204·66 定价：1.20元

前 言

为了帮助广大职工学好数学，我们深入调查研究了职工的具体要求和实际困难，又注意到职工教材在全国广泛发行的情况，特意编写了《学习之友——职工数学问题分析和解答》。

本书有几个特点：一、在本书各章之前，都有内容提要或解题方法指导，便于读者了解这一章知识的全貌，并提纲挈领地掌握好各种类型问题的解法。所选择的问题具有典型性和代表性，能起到举一反三的作用；二、本书着重于对问题的分析，且层次分明，以便循循诱导读者从错综复杂的数量关系中探求解决问题的途径，找到简捷的处理方法。它有益于启发思考、提高解决问题的能力；三、本书对问题分析详细，过渡分明，来龙去脉交代清楚，浅显易懂，便于自学；四、本书通过多种方式帮助读者加深对问题的全面理解，并指出容易混淆的概念和容易犯错误的地方，揭示本质，纠正错误；五、本书最后，还附有全国各地职工数学测验的部分试卷，可供读者自我考试之用。

由于编者水平所限，本书可能存在不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

编 者

1982年4月

AB1-15/01

目 录

第一章	实数	(1)
一	实数的概念.....	(1)
二	实数的运算.....	(5)
第二章	代数式	(12)
一	整式.....	(12)
二	因式分解.....	(22)
三	分式.....	(30)
四	根式.....	(36)
第三章	方程和方程组	(43)
一	一元一次方程.....	(43)
二	一元二次方程.....	(47)
三	分式方程和无理方程.....	(61)
四	方程组.....	(69)
五	列方程解应用题.....	(84)
第四章	不等式	(98)
一	一元一次不等式.....	(98)
二	一元一次不等式组.....	(102)
三	一元二次不等式.....	(106)
四	分式不等式及绝对值不等式.....	(111)
第五章	指数和对数	(116)
一	指数.....	(116)
二	对数.....	(121)

第六章	函数	(128)
一	函数的基本概念.....	(128)
二	正比例函数、反比例函数和一次函数.....	(133)
三	二次函数与极值.....	(140)
第七章	几何图形的基本概念	(153)
第八章	三角形	(162)
第九章	四边形	(208)
第十章	相似形	(233)
第十一章	圆	(279)
第十二章	尺规作图	(324)
第十三章	解三角形	(334)
附 录	各地职工文化考查数学试题选编	(346)

第一章 实数

一 实数的概念

有理数（整数和分数）和无理数统称**实数**。我们通常的数学运算都是在实数范围内进行的。有关实数的基本概念是进行实数运算的基础，因此应深刻理解、牢固掌握。

实数主要的基本概念如下：（1）**数轴** 规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴。（2）**相反数** 只有符号不同的两个数，叫做互为相反数。例如 a 与 $-a$ 是互为相反数。（3）**绝对值** 一个正数的绝对值是它的本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。

（4）实数大小的比较：

①正数都大于零，也大于一切负数；

②负数都小于零，也小于一切正数；

③两个正数，绝对值大的数较大；

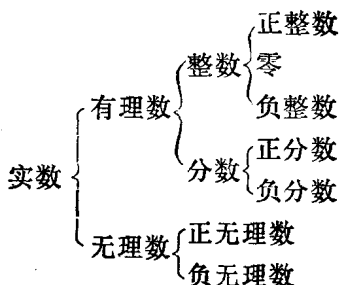
④两个负数，绝对值大的数反而小，绝对值小的数反而大。

在引入数轴以后，实数集中的数就和数轴上的点建立了一一对应的关系。这对我们理解和研究实数都将带来很大的方便。

绝对值是一个非常重要的概念，只有深刻理解，才能正确运用。两个负数比较大小容易出现错误，要通过阅读题解加深认识，防止错误的发生。

1. 有理数中包含哪些数？无理数中包含哪些数？实数中包含哪些数？

解 这个问题可由下表回答。



注意 有限小数与无限循环小数都可以化为分数，因此这两种小数都包含在有理数中。无限不循环小数就是无理数。

2. 写出 2, -4.5, 0, m 各数的相反数。

解 2 的相反数是 -2; -4.5 的相反数是 4.5;
0 的相反数是 0; m 的相反数是 -m。

3. 写出 +2, $\frac{1}{3}$, -4.5, 0 各个数的绝对值。

解 +2 的绝对值用 $|+2|$ 表示，依绝对值的定义，有

$$|+2| = 2, \quad \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3},$$

$$|-4.5| = 4.5, \quad |0| = 0.$$

4. $|a| = ?$

分析 因为 a 是一个字母，它可以表示正数、零、负数。所以 $|a|$ 在 a 分别取正数、零、负数时，它的表示式是不同的。因此我们就 a 的不同取值范围，分别进行讨论。

解 当 $a > 0$ 时（即 a 为正数），因为正数的绝对值是它的

本身, 所以 $|a| = a$;

当 $a = 0$ 时, 因为零的绝对值是零, 所以 $|a| = 0$;

当 $a < 0$ 时 (即 a 为负数), 因为负数的绝对值是它的相反数, 所以 $|a| = -a$.

综合上面三种情况, 得

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

5. 写出下列各数的倒数:

(1) -6 ;

(2) $\frac{2}{3}$;

(3) -0.2 ;

(4) 0 .

解 我们知道, 1 除以一个数的商, 叫做这个数的倒数, 因此

(1) -6 的倒数是 $-\frac{1}{6}$; (2) $\frac{2}{3}$ 的倒数是 $\frac{3}{2}$;

(3) $\because 1 \div (-0.2) = 1 \times \left(-\frac{10}{2}\right) = -5$,

$\therefore -0.2$ 的倒数是 -5 ;

(4) $\because 0$ 不能作除数,

$\therefore 1 \div 0$ 无意义, 故 0 没有倒数.

注意 一个数和它的倒数的乘积是 1.

6. 比较下列每对数的大小:

(1) $+1$ 和 -10 ;

(2) 0 和 -100 ;

(3) -1.99 和 -1.98 ;

(4) $-\frac{4}{5}$ 和 $-\frac{3}{4}$.

分析 要比较以上各对数的大小, 应先进行观察. 如果这

两个数分别属于正数、零、负数这三类数中的某两类，那么立即就可以得出结果。比方说一个是正数，另一个是负数，根据有理数比较大小的法则，马上就可以决定正数大于负数。但是，如果比较大小的两数同为正，或同为负，那么应先比较它们的绝对值，然后才能决定它们的大小。

解 (1) $\because$ 正数大于一切负数， $\therefore +1 > -10$;

(2) $\because$ 负数都小于零， $\therefore 0 > -100$;

(3) $\because |-1.99| > |-1.98|$

又 $\because$ 两个负数，绝对值大的反而小。

$\therefore -1.99 < -1.98$;

(4) $\because \left| -\frac{4}{5} \right| = \frac{4}{5} = \frac{16}{20}$,

$\left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4} = \frac{15}{20}$,

$\therefore \frac{16}{20} > \frac{15}{20}$, 故 $\left| -\frac{4}{5} \right| > \left| -\frac{3}{4} \right|$,

$\therefore -\frac{4}{5} < -\frac{3}{4}$.

7. 按照从小到大的顺序，用“ $<$ ”号把下列各数连接起来，

$-4\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $|-0.6|$, -0.6 , 0 , -4.2 , $\frac{3}{2}$.

解 $-4\frac{1}{2} < -4.2 < -0.6 < 0 < |-0.6| < \frac{2}{3} < \frac{3}{2}$.

8. 写出绝对值大于2而小于6的所有整数，并把表示这些整数的点画在数轴上。

解 绝对值大于2而小于6的正整数是3、4、5。绝对

值大于2而小于6的负整数是-3、-4、-5。因此，绝对值大于2而小于6的所有整数是-5、-4、-3、3、4、5。这些点在数轴上表示如图1—1

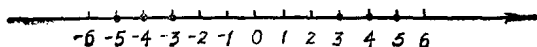


图1—1

二 实数的运算

实数有六种基本运算，它们是加、减、乘、除、乘方、开方。其中加、减称为第一级运算，乘、除称为第二级运算，乘方、开方称为第三级运算。实数运算的要点如下：(1) 要掌握好六种运算的基本法则，特别要熟记各种运算的符号法则。(2) 要掌握好实数的运算顺序：先进行第三级运算（乘方或开方），再进行第二级运算（乘或除），最后进行第一级运算（加或减）。在同一级运算中，应该从左到右依次进行。(3) 算式中如有括号，一般应先进行括号内的运算，但必要时，也可采取先去括号的办法。(4) 要善于利用运算定理和运算性质进行简捷计算。

1. 计算：(1) $-3 - 9$ ；(2) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 。

解 (1) 本题表示-3与-9相加，依加法法则：同号相加取原来的符号，并把绝对值相加。故得 $-3 - 9 = -12$ 。

(2) 本题表示 $-\frac{1}{2}$ 与 $+\frac{1}{3}$ 相加，依加法法则：异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值。故得

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = -\frac{1}{6}.$$

2. 计算: (1) $(-20) - (+5) + (+3) - (-7);$

(2) $-3 - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - 5 + \frac{1}{10} - 2 + 4\frac{1}{5}$

解 (1) 在本题中, 有加法, 也有减法. 根据有理数减法的法则, 减去一个数, 等于加上这个数的相反数, 这样, 便可将减法都化成加法来做.

$$\begin{aligned} & (-20) - (+5) + (+3) - (-7) \\ &= (-20) + (-5) + (+3) + (+7) \\ &= (-25) + (+10) = -15. \end{aligned}$$

(2) 本题是代数和的形式, 根据加法交换律, 可以分别把正数和负数集中起来计算, 然后再求它们的代数和.

$$\begin{aligned} & -3 - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - 5 + \frac{1}{10} - 2 + 4\frac{1}{5} \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{10} + 4\frac{1}{5} - 3 - \frac{1}{2} - 5 - 2 = 4\frac{7}{10} - 10\frac{1}{2} \\ &= 4\frac{7}{10} - 9\frac{15}{10} = -5\frac{8}{10} = -5\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

3. 计算: (1) $(-0.02) \times (-1.5);$

(2) $(+1\frac{1}{2}) \times (-\frac{2}{3});$

(3) $(-3) \times (-\frac{5}{6}) \times (-1\frac{4}{5})$

解 (1) $(-0.02) \times (-1.5) = 0.03;$

(2) $(+1\frac{1}{2}) \times (-\frac{2}{3}) = -\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = -1;$

$$(3) \quad (-3) \times (-\frac{5}{6}) \times (-1\frac{4}{5}) = -3 \times \frac{5}{6} \times \frac{9}{5} = -4\frac{1}{2}.$$

注意 同号得正，异号得负。这仅仅是两数相乘的符号法则，此法则对第(3)题便不适用。几个不等于零的有理数相乘时，积的符号应由负因数的个数来决定。当负因数有奇数个时，积为负；当负因数有偶数个时，积为正。因此可知，(3)题的积为负。

4. 计算 (1) $-3.5 \div \frac{7}{8} \times (-\frac{3}{4})$,

(2) $-3200 \div [(-32) \times (-25)]$.

解 (1) $-3.5 \div \frac{7}{8} \times (-\frac{3}{4}) = \frac{7}{2} \times \frac{8}{7} \times \frac{3}{4} = 3$.

(2) $-3200 \div [(-32) \times (-25)]$

$$= -3200 \div (-32) \div (-25)$$

$$= (+100) \div (-25) = -4.$$

注意 计算第(2)题时，利用了除法的运算性质：一个数除以几个数的积，等于把这个数连续除以各个因数。

5. 计算：(1) $(-3)^4$; (2) $(-2)^5$;

(3) -3^4 ; (4) $-2 \times (-5)^2$.

解：(1) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$;

(2) $(-2)^5 = -32$; (3) $-3^4 = -81$;

(4) $-2 \times (-5)^2 = -2 \times 25 = -50$.

注意 负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数。但(3)中的 -3^4 并不是 (-3) 的4次幂，而是 3^4 的相反数，所以结果为 -81 。

6. 利用10的幂，将下列各数记为 $a \times 10^n$ 的形式(其中 a 是大于或等于1而小于10的数)。

(1) 1,000,000; (2) 30,000; (3) 57,000,000.

解 (1) $1,000,000 = 10^6$;

(2) $30,000 = 3 \times 10000 = 3 \times 10^4$;

(3) $57,000,000 = 5.7 \times 10,000,000 = 5.7 \times 10^7$.

注意 这种记法是把一个正数记成 $a \times 10^n$ 的形式, 读者容易看出, n 比原数的整数位数少1. 这种记法在科学技术上较为常用, 故称为科学记数法.

7. 计算 $10 - 0.6 \times \left(-\frac{5}{7}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right)$.

分析 本题中含有加、减、乘、除四种运算, 按照运算顺序先做乘、除运算, 再做加减运算. 式中第二个数 -0.6 不必化成分数, 而只要将它与 $-\frac{5}{7}$ 的分子相乘就可以了.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & 10 - 0.6 \times \left(-\frac{5}{7}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right) \\ & = 10 + \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \times \frac{3}{2} = 10 + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} = 10\frac{6}{7}. \end{aligned}$$

8. 计算 $5 - 2^3 - \left[(-3)^2 - 2^2 \times \frac{1}{4} - 8.5\right] \div \left(-\frac{1}{2}\right)^2$.

分析 本题中除了含有加、减、乘、除的运算外, 还有乘方运算和括号, 应先计算乘方和括号.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & 5 - 2^3 - \left[(-3)^2 - 2^2 \times \frac{1}{4} - 8.5\right] \div \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\ & = 5 - 8 - \left[9 - 4 \times \frac{1}{4} - 8.5\right] \div \frac{1}{4} = -3 - (-0.5) \times 4 \\ & = -3 - (-2) = -3 + 2 = -1. \end{aligned}$$

9. 计算 $-2^2 + (-2)^2 - \left|(-1)^5 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\right| \div \frac{1}{6}$

$$-\sqrt{(-1)^2}.$$

$$\text{原式} = -4 + 4 - \left| (-1) \cdot \frac{1}{6} \right| + \frac{1}{6} - \sqrt{1}$$

$$= 0 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 1 = -1 - 1 = -2.$$

10. 计算

$$\frac{23\frac{11}{12} + 10.125 \div \left(-\frac{3}{4}\right)^3}{(-1)^{999} - \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{4}}}.$$

分析 本题的计算步骤是先将分子、分母分别化简，然后用分子除以分母即可得出结果。

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{23\frac{11}{12} + 10\frac{1}{8} \div \left(-\frac{27}{64}\right)}{-1 - \frac{1}{\frac{5}{12}}} \\ &= \frac{23\frac{11}{12} - \frac{81}{8} \times \frac{64}{27}}{-1 - 1 + \frac{5}{12}} = \frac{23\frac{11}{12} - 24}{-1 - \frac{12}{5}} = \frac{-\frac{1}{12}}{-\frac{17}{5}} \\ &= \frac{1}{12} \div \frac{17}{5} = \frac{1}{12} \times \frac{5}{17} = \frac{5}{204}. \end{aligned}$$

11. 计算下列算术平方根的值或近似值：

(1) $\sqrt{84681}$ ；(2) $\sqrt{2}$ (精确到0.01)。

解 (1)把84681从右向左每隔两位用撇号分开，得到三段。

计算时，根据左边第一段先确定平方根的百位数字，然后依次确定平方根的十位数字和个位数字。(2)的计算方法也是一样。见下面的计算

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad \begin{array}{r} 2 \ 9 \ 1 \\ \sqrt{8 \ 46 \ 81} \\ 4 \\ \hline 49 \ 4 \ 46 \\ 4 \ 41 \\ \hline 581 \ 5 \ 81 \\ 5 \ 81 \\ \hline 0 \end{array} \\
 \therefore \sqrt{84681} = 291.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad \begin{array}{r} 1. \ 4 \ 1 \ 4 \\ \sqrt{2.00 \ 00 \ 00} \\ 1 \\ \hline 24 1 \ 00 \\ 96 \\ \hline 281 4 \ 00 \\ 2 \ 81 \\ \hline 2824 1 \ 19 \ 00 \\ 1 \ 12 \ 96 \\ \hline 6 \ 04 \end{array} \\
 \therefore \sqrt{2} \approx 1.41.
 \end{array}$$

注意 (2) 题开方到1后，没有开尽，添两个零成一段再开方，得1.4，还开不尽，再添两个零成一段再开方，直到算出平方根精确到0.01为止（根据计算近似数的规定，要多算一位）。

$\sqrt{2}$ 是一个无理数，即一个无限不循环的小数，因此它是开不尽的，我们只能求出它的近似值。

12 改正下列计算中的错误：

$$(1) \quad -2 - 1 = -1; \quad (2) \quad -2 + 4 = -6;$$

$$(3) \quad -10 - \frac{1}{2} \times 2 = -10; \quad (4) \quad (-2)^5 = -6;$$

$$(5) \quad -3^2 = 9; \quad (6) \quad \left(1\frac{1}{3}\right)^2 = 1\frac{1^2}{3^2} = 1\frac{1}{9}.$$

解 以上各题的计算都是错误的，现更正如下：

$$(1) \quad -2 - 1 = -3 \text{ (同号相加);}$$

$$(2) \quad -2 + 4 = +2 \text{ (异号相加);}$$

$$(3) \quad -10\frac{1}{2} \times 2 = -\frac{21}{2} \times 2 = -21;$$

$$(4) \quad (-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8;$$

$$(5) \quad -3^2 = -(3^2) = -9.$$

$$(6) \quad \left(1\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}.$$