高等教育自学考试辅导丛书

离散数学辅导与练习

计算机应用专业（独立本科段）

（2001年版）

左孝凌
张桂芸 编著

经 济 科 学 出 版 社

责任编辑：莫霓舫
责任校对：徐领弟
版式设计：周　昊
技术编辑：邱　天

离散数学辅导与练习
左孝凌　张桂芸　编著
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100036
总编室电话：88191217　发行部电话：88191540
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
北京天宇星印刷厂印刷
河北三河韩各庄装订厂装订
787×1092　16 开　10.25 印张　260000 字
2001 年 9 月第一版　2001 年 9 月第一次印刷
印数：00001—10100 册
ISBN 7-5058-2667-0/F·2061　定价：15.60 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

序　言

离散数学是计算机专业的基础核心课程，因为它与计算机各专业课程紧密相关，如数据结构、数据库、操作系统、人工智能、编译等都如影随形密不可分，因此学好离散数学是顺利进入计算机专业学习的关键性举措。作为这门基础课的自学教材，着重概念、推理，更需融含解题技巧，但是羁于自学条件，教材内容应力求言简意赅。对这门课程普遍反映是论题独立，概念繁复，因此，如何指导本书自学，乃是很多学生的迫切要求。自学方法各人迥异，所谓法无定法，乃知非法法也。首先要根据个人自学条件，读通教材，逐题审验，寻找答案，这样逐步达到举一反三、融会贯通的目的。同时在自学中，注意思维训练与解题技巧并存。解题不仅需知其然，而且要有论据、论证，达到知其所以然。

本书按章分类，每章都有内容概述和习题解答参考两个部分。第一部分内容概述是离散数学中相应章节的概括，也是解答习题所涉及的课程范围，这相当于是一个详细的复习提纲，这部分希望能够达到提纲挈领，正确映示自学课程的内容与范围。

第二部分是习题解答参考，这也是每个自学学生必须完成的作业范围。为了使学生在自学中能够得到解惑与辨正，我们提供了这些习题解答。但是我们提供的仅是对问题的一般解法，具体解题思路也是一家之见，并非都成典范。希望大家在阅读教材基础上，逐题练习后再参考答案，否则本末倒置，先读解答不做练习，这样无异饮鸩止渴贻误学业。

本书由上海交通大学左孝凌教授主编，天津师范大学张桂芸副教授编写了第四章代数结构的习题解答，并提供了模拟考试的试题与解答，左孝凌教授编写了全部内容概述，以及其余各章的习题解答。

关于试题仅供参考，这些试题主要是界定本书内容，提供试题类型，其题型比例以及试题比例，均以考试命题实测为准。

全书成书仓促，疏漏难免，希望读者不吝指正。

编　者

2001.5

目 录

第一章　命题演算

A.内容概述

1.1　命题概念

命题　具有惟一真值的陈述句。

真值　真值是语句为真或为假的性质。

当一个陈述句对其判断为真时，就说此陈述句的真值为真；当一个陈述句对其判断为假时，就说它的真值为假。真值为真记作 T，真值为假记作 F。

命题标识符　表示命题的符号称命题标识符。

命题常量　一个命题标识符如表示确定命题，就称为**命题常量**。

命题变元　如果命题标识符只标志为命题的位置，称为**命题变元**。

1.2　复合命题与联结词

原子命题　不能分解为更简单的命题称**原子命题**。

复合命题　经过一些联结词复合而成的命题，即**复合命题**。

下面对命题逻辑常用的联结词，给予定义。

否定　设 P 为一命题，P 的否定是一个新的命题，记作 $\neg P$，若 P 为 T，$\neg P$ 为 F；若 P 为 F，$\neg P$ 为 T。

合取　两个命题 P 和 Q 的合取是一个复合命题，记作 $P \wedge Q$，当且仅当 P，Q 同时为 T 时，$P \wedge Q$ 为 T，其余情况 $P \wedge Q$ 为 F。

析取　两个命题 P 和 Q 的析取是个复合命题，记作 $P \vee Q$，当且仅当 P，Q 同为 F

时，$P \vee Q$ 的真值为F，否则 $P \vee Q$ 的真值为T。

条件 给定两个命题 P 和Q，其条件命题是一个复合命题，记作 $P \rightarrow Q$，当且仅当 P 的真值为T，Q 的真值为F 时，$P \rightarrow Q$ 的真值为F，其余情况 $P \rightarrow Q$ 的真值为T。

双条件 给定两个命题 P 和Q，其复合命题 $P \leftrightarrows Q$，称作双条件命题，读作 P 当且仅当Q，当 P 与Q 的真值为相同时，$P \leftrightarrows Q$ 的真值为T，否则 $P \leftrightarrows Q$ 的真值为F。

1.3 命题公式与真值表

命题演算的合式公式

命题演算的合式公式规定为：

(1) 单个命题变元本身是一个合式公式。

(2) 如果 A 是合式公式，那么 $\neg A$ 是合式公式。

(3) 如果 A 和B 是合式公式，那么 $(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$ 和 $(A \leftrightarrows B)$ 都是合式公式。

(4) 当且仅当有限次地应用 (1)、(2)、(3) 所得到的包含命题变元，联结词和圆括号的符号串是合式公式。

命题公式 今后称命题逻辑中的合式公式为**命题公式**或**简称公式**。

子公式 设 A_i 是公式A 的一部分，且 A_i 是一个合式公式，称 A_i 是A 的子公式。

指派 设 P 为一命题公式，P_1，P_2，…，P_n 为出现在P 中的所有命题变元，对 P_1，P_2，…，P_n 指定一组真值称为**对P 的一种指派**。

成真指派 设 P 为一命题公式，P_1，P_2，…，P_n 为出现在P 中的所有命题变元，若对 P_1，P_2，…，P_n 指定一种指派，使 P 的值为真，则称这组值为**成真指派**。

成假指派 若对上述 P_1，P_2，…，P_n 指定一种指派，使 P 的值为假，则称这组值为**成假指派**。

真值表 将命题公式 P 中在所有指派下取值情况列成表，称为 P 的**真值表**。

等价式 给定两个命题公式 A 和B，设 P_1，P_2，…，P_n 为所有出现于A 和B 中的原子变元，若给 P_1，P_2，…，P_n 任一组真值指派，A 和B 的真值都相同，称 A 和B 是等价的，记作 $A \Leftrightarrow B$。

永真式 设 A 为一命题公式，若 A 在它的各种指派情况下，其取值均为真，则称公式 A 为**重言式**或**永真式**。

永假式 设 A 为一命题公式，若 A 在它的各种指派情况下，其取值均为假，则称公式 A 为**矛盾式**，或**永假式**。

可满足式 设 A 为一命题公式，若 A 在各种指派情况下，至少存在一组成真指派，则称 A 是**可满足式**。

1.4 等价变换与蕴含式

等价置换 设 X 是合式公式 A 的子公式，若有 Y 也是一个合式公式，且 $X \Leftrightarrow Y$，如果将 A 中的 X 用 Y 置换，得到公式 B，则 $A \Leftrightarrow B$，即 B 是 A 的等价置换。

蕴含式 当且仅当 $P \rightarrow Q$ 是一个重言式时，我们称“P 蕴含 Q”记作 $P \Rightarrow Q$。

蕴含式性质

(1) 对任意公式 A，有 $A \Rightarrow A$；
(2) 对任意公式 A，B 和 C，若 $A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow C$；
(3) 对任意公式 A，B 和 C，若 $A \Rightarrow B$，$A \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow (B \wedge C)$；
(4) 对任意公式 A，B 和 C，若 $A \Rightarrow C$，$B \Rightarrow C$，则 $A \vee B \Rightarrow C$。

等价式与双条件式 设 A，B 为两个命题公式 $A \Leftrightarrow B$，当且仅当 $A \leftrightarrows B$ 为一个重言式。

等价式与蕴含式 设 A，B 为两个命题公式，$A \Leftrightarrow B$，当且仅当 $A \Rightarrow B$ 及 $B \Rightarrow A$。

表 1.1 给出了常用的命题定律。

表 1.1

对合律	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	1
幂等律	$P \vee P \Leftrightarrow P \quad P \wedge P \Leftrightarrow P$	2
结合律	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	3
交换律	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	4
分配律	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	5
吸收律	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	6
德摩根律	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	7
同一律	$P \vee F \Leftrightarrow P, P \wedge T \Leftrightarrow P$	8
零　律	$P \vee T \Leftrightarrow T, P \wedge F \Leftrightarrow F$	9
否定律	$P \vee \neg P \Leftrightarrow T \quad P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$	10

1.5 最小联结词组与范式

最小联结词组 由“$\neg$”，“$\wedge$”，“$\vee$”，“$\rightarrow$”，“$\leftrightarrows$”这五个联结词中若干个组成的命题公式，必可由$\{\neg, \vee\}$或$\{\neg, \wedge\}$组成的命题公式所替代。$\{\neg, \vee\}$及$\{\neg, \wedge\}$称作命题公式的最小联结词组。

联结词次序 联结词次序规定为：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrows$。$\wedge$，$\vee$两者之间以出现先后为序。

合取范式 一个命题公式称为合取范式，当且仅当它具有形式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$（$n \geqslant 1$），其中 A_1，A_2，…，A_n 都是由命题变元及其否定组成的析取式。

析取范式 一个命题公式称为析取范式，当且仅当它具有形式 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$，其中，$A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 都是由命题变元及其否定所组成的合取式。

范式的惟一性 任何一个命题公式，都可以求它的合取范式或析取范式，但是一个命题公式的合取范式或析取范式并不是惟一的。

命题公式表述为主范式时，才是惟一的。

布尔合取（小项） n 个命题变元的合取式称作布尔合取或小项，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次。n 个命题变元共有 2^n 个小项。

布尔析取（大项） n 个命题变元的析取式称作布尔析取（大项）。其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次。

主析取范式 在给定的命题公式中，如果有一个等价公式，它仅由小项的析取所组成，则该等价式称作原式的**主析取范式**。

主析取范式的惟一性 任意含 n 个命题变元的非永假命题公式 A，其主析取范式是惟一的。

主合取范式的惟一性 任意含 n 个命题变元的非永真命题公式 A，其主合取范式是惟一的。

真值表的主范式求法

(1) 在真值表中，一个公式的真值为 T 的指派所对应的小项的析取，即为此公式主析取范式。

(2) 在真值表中，一个公式的真值为 F 的指派所对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式。

主范式的等值演算法

对于一个给定 n 个变元的命题公式A，都可通过等值变换，化为惟一的主析取范式或主合取范式。

主范式之间的关系

设命题公式中含有 n 个命题变元，且 A 的主析取范式中含有k 个小项 m_{i1}，m_{i2}，m_{i3} …，m_{ik}，则 A 的主合取范式必含有 2^n-k 个大项。

如果命题公式 A 的主析取范式为：$\sum(i_1, i_2, \cdots, i_k)$，

则 A 的主合取范式为：

$\Pi(0, 1, 2, \cdots, i_1-1, i_1+1, \cdots, i_k-1, i_k+1, \cdots, 2^n-1)$

从 n 个命题变元的公式A 的主析取范式，求合取范式的步骤：

(1) 求出 A 的主析取范式中未包含小项的下标。

(2) 把 (1) 中求出的“下标”写成对应大项；

(3) 把 (2) 中写成的大项合取，即为 A 的主合取范式。

类似的，可从 n 个命题变元的公式A 的主合取范式求析取范式步骤与以上类似。

对含 n 个命题变元的公式A，可作判定如下：

(1) 若 A 可化为与其等价的、含 2^n 个小项的主合取范式，则 A 为永真式。

(2) 若 A 可化为与其等价的、含 2^n 个大项的主合取范式，则 A 为永假式。

(3) 若 A 的主析取范式不含 2^n 个小项，或 A 的主合取范式不含 2^n 个大项，则 A 为可满足的。

1.6 推理理论

有效推理 从前提（公理或假设）出发，根据确认的推理规则，推导出一个结论，这个过程，称作有效推理（或形式证明）。

有效结论 设 H_1，H_2，…，H_n，C 是命题公式，当且仅当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$，称 C 是一组前提H_1，H_2，…，H_n 的有效结论。

推理 在实际应用中，我们常常把本门学科的一些定律、定理和条件，作为假设前提。尽管这些前提在实际环境中实非永真，但在推理过程中，却总是假设命题为 T，并使用一些公认规则，得到另外命题，形成结论。这种过程就是推理或论证。

表 1.2 等价公式及蕴含公式表

E_1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
E_2	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
E_3	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
E_4	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

E_5	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
E_6	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
E_7	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
E_8	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
E_9	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
E_{10}	$P \vee P \Leftrightarrow P$
E_{11}	$P \wedge P \Leftrightarrow P$
E_{12}	$R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$
E_{13}	$R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
E_{14}	$R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow T$
E_{15}	$R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow F$
E_{16}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
E_{17}	$\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
E_{18}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
E_{19}	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$
E_{20}	$P \leftrightarrows Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
E_{21}	$P \leftrightarrows Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
E_{22}	$\neg(P \leftrightarrows Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrows \neg Q$

表 1.3

I_1	$P \wedge Q \Rightarrow P$
I_2	$P \wedge Q \Rightarrow Q$
I_3	$P \Rightarrow P \vee Q$
I_4	$Q \Rightarrow P \vee Q$
I_5	$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$
I_6	$Q \Rightarrow \neg P \rightarrow Q$
I_7	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$
I_8	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$
I_9	P，$Q \Rightarrow P \wedge Q$
I_{10}	$\neg P$，$P \vee Q \Rightarrow Q$
I_{11}	P，$P \rightarrow Q \Rightarrow Q$
I_{12}	$\neg Q$，$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$
I_{13}	$P \rightarrow Q$，$Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$
I_{14}	$P \vee Q$，$P \rightarrow R$，$Q \rightarrow R \Rightarrow R$
I_{15}	$A \rightarrow B \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$
I_{16}	$A \rightarrow B \Rightarrow (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$

表 1.2 和表 1.3 中的等值公式和蕴含公式都可用真值表法或等值演算法给出证明。

逻辑结论 设有一组假设前提 H_1，H_2，…，H_n（即假设命题为 T），利用一些公认的推理规则，根据已知的等价或蕴含公式，推演得到的一个结论 C，称 C 为 H_1，H_2，…，H_n 的逻辑结论。

记作 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \vdash C$。

有效推理定理 推理 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \vdash C$ 是有效推理的充分必要条件是 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \rightarrow C$ 为永真式。

常用的推理规则

（1）前提引入规则：在证明的任何步骤上，都可以引入前提，简称 P 规则。

（2）结论引入规则：在证明的任何步骤上，所证明的结论都可以作为后续证明的前提，称为 T 规则。

（3）置换规则：在证明的任何步骤上，命题公式中任何子命题公式都可以用与之等值的命题公式置换，它也记为 T 规则。

永假式与不相容

若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ 是永假式，称 H_1，H_2，$\cdots H_n$ 是不相容的，若 H_1，H_2，$\cdots H_n$ 是可满足式，则称 H_1，H_2，$\cdots H_n$ 是相容的。

永假式与逻辑结论

若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$ 为永假式，则 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \vdash C$ 成立。

在上式中，假设 $\neg C$ 为真，作假设前提，使得 H_1，H_2，…，H_n，$\neg C$ 永假式，则 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \vdash C$ 成立。

（4）CP 规则

若 H_1，H_2，…，H_n，$R \vdash C$

则 H_1，H_2，…，H_n，$\vdash R \rightarrow C$

B. 习题解答参考

1.1 命题概念

1.2 复合命题与联结词

1.2.1 分析下列语句，哪些是命题，哪些不是命题；如果是命题，指出其真值。

a）北京是中国的首都。

b）上海是全国人口最多的城市。

c）今天天气多么好啊！

d）$11+1=100$。

e）雪是黑色的，当且仅当 $5>10$。

f）全体起立！

g）不存在最大素数。

h）$x+y \geqslant 16$。

i）白色加红色可以调和成粉红色。

j）明天你去看电影吗？

k）火星上有生物。

解 a）是命题，真值为 T。

b）是命题，真值为 F。

c）不是命题。

d）是命题，真值要确定进位制决定。

e）是命题，真值为 T。

f）不是命题。

g）是命题，真值为 T。

h）不是命题。

i）是命题，真值为 T。

j）不是命题。

k）是命题，真值要根据将来科学发展而定，但本题最终将可确定真值。

1.2.2　试给出三个语句是真命题，三个语句是假命题，三个不是命题的实例。

解　三个真命题：

1）上海是个大城市。

2）如果 a 和 b 是偶数，则 $a+b$ 是偶数。

3）四边形 $ABCD$ 是平行四边形，当且仅当它的对边平行。

三个假命题：

1）昆明 2000 年冬天下过黑雪。

2）我二年来天天炒股，每次都赢。

3）$5+9\leqslant 12$。

三个不是命题：

1）此处不准抽烟！

2）如果 $x+y\geqslant 5$，则 $y=3$。

3）明天杭州下雨吗？

1.2.3　将下列命题符号化。

a）小李不但聪明而且用功。

b）昨天晚自习时，小赵做了二三十道数学题。

c）如果天下大雨，他就在体育馆内锻炼。

d）除非下大雨，否则他不在室内运动。

e）不经一事，不长一智。

解　a）设 P：小李聪明，Q：小李用功。

故 a）可符号化为 $P\wedge Q$。

b）设 P：昨天晚自习时，小赵做了二三十道数学题。语句 b）可符号化为 P。

c）设 S：天下大雨，R：他在体育馆内锻炼。c）可符号化为：$S\rightarrow R$。

d）设 P：天下大雨，Q：他不在室内运动，本例可符号化为：$\neg P\rightarrow Q$。

e）设 P：经一事，Q：长一智。

本例可符号化为：$Q\rightarrow P$。

1.2.4　将下列复合命题，分成若干原子命题。

a) 今天天气炎热，且有雷阵雨。

b) 如果你不去比赛，那么我也不去比赛。

c) 我既不看电视，也不去看电影，我准备做作业。

d) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，当且仅当它的对边平行。

解 a) 设 P：今天天气炎热，Q：今天有雷阵雨。

本例可表示为原子命题的复合：$P \wedge Q$。

b) 设 P：你去比赛，Q：我去比赛。

本例可表示为复合命题：$\neg P \rightarrow \neg Q$。

c) 设 P：我不看电视，Q：我不看电影，R：我准备做作业。

符号化为：$P \wedge Q \rightarrow R$。

d) 设 Q：四边形 $ABCD$ 是平行四边形，S：四边形 $ABCD$ 的对边平行。

本例表示为复合命题：$Q \leftrightarrows S$。

1.2.5 试给出四个语句，符号化后是合取式、析取式、条件式和双条件式。

解 a) 我们既要重视物质文明建设，又要重视精神文明建设。

设 P 表示：我们要重视物质文明建设；

Q 表示：我们要重视精神文明建设。

本例符号化后可表示为：$P \wedge Q$。

b) 你可以乘车去，也可以骑自行车去。

设 p 表示：你可以乘车去；q 表示：你可以骑自行车去。

本例符号化后可表示为：$p \vee q$。

c) 如果我有足够的钱，我就捐资办学。

设 p 表示：我有足够的钱；q 表示：我捐资办学。

本例符号化后表示为：$p \rightarrow q$。

d) x 是偶数与 x 被 2 整除是一个意思。

设 p 表示：x 是偶数；q 表示：x 被 2 整除。

本例符号化后可表示为：$p \leftrightarrows q$。

1.3 命题公式与真值表

1.3.1 判别下列公式哪些是合式公式，哪些不是合式公式。

a) $(Q \rightarrow R \wedge S)$；

b) $(P \leftrightarrows (R \rightarrow S)))$；

c) $((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P))$；

d) $(RS \rightarrow K)$；

e) $((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)))$。

解 a) 规定运算符次序前，不是合式公式；但如规定运算符次序后，亦可看作合式公式。

b) 是合式公式。

c) 不是合式公式（括弧不配对）。

d) 不是合式公式（RS 之间缺联结词）。

e) 是合式公式。

1.3.2 根据定义，说明下列公式如何形成合式公式。

a) $(A \to (A \vee B))$;

b) $((\neg A \wedge B) \wedge A)$;

c) $((\neg A \to B) \vee (B \to A))$。

解 a) A 是合式公式，$(A \vee B)$ 是合式公式，$(A \to (A \vee B))$ 是合式公式。

上述过程可简记为：

A; $(A \vee B)$; $(A \to (A \vee B))$.

同理可记：

b) A; $\neg A$; $(\neg A \wedge B)$; $((\neg A \wedge B) \wedge A)$。

c) A; $\neg A$; B; $(\neg A \to B)$; $(B \to A)$;

$((\neg A \to B) \to (B \to A))$。

1.3.3 设 P，Q 的真值为 0；R、S 的真值为 1；求下列各命题公式的真值。

a) $P \vee (Q \wedge R)$;

b) $(P \rightleftarrows R) \wedge (\neg Q \vee S)$;

c) $(P \wedge (Q \vee R)) \to ((P \vee Q) \wedge (R \wedge S))$;

d) $\neg (P \vee (Q \to (R \wedge \neg P))) \to (R \vee \neg S)$。

解 a) 的真值为 0（假）；

b) 的真值为 0（假）；

c) 的真值为 1（真）；

d) 的真值为 1（真）。

1.3.4 求下列公式的真值表。

a) $P \to (Q \vee R)$;

b) $(P \to Q) \rightleftarrows (\neg P \vee Q)$;

c) $(P \to (Q \vee R)) \rightleftarrows ((P \wedge \neg Q) \to R)$。

解 a) 见表 1.4 (a)。

表 1.4 (a)

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \to (Q \vee R)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	F	T

b）见表 1.4（b）。

表 1.4（b）

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrows (\neg P \vee Q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

c）见表 1.4（c）。

表 1.4（c）

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \rightarrow (Q \vee R)$	$(P \wedge \neg Q) \rightarrow R$	S
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T

其中，S：$(P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrows ((P \wedge \neg Q) \rightarrow R)$。

1.3.5 试以真值表证明下列命题。

a）合取运算的结合律；

b）析取运算的结合律；

c）合取（$\wedge$）对析取（$\vee$）之分配律；

d）德·摩根律。

解 上述各运算律，即是要用真值表证明以下各式。

a）$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$；

b）$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$；

c）$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$；

d）$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$；

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$。

a）如表 1.5（a）所示：

表 1.5（a） $\quad$ $\boldsymbol{P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R}$

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

b）如表 1.5（b）所示：

表 1.5（b）　$P\vee(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\vee R$

P	Q	R	$Q\vee R$	$P\vee(Q\vee R)$	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\vee R$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	F	F	F	F

c）如表 1.5（c）所示：

表 1.5（c）　$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$

P	Q	R	$Q\vee R$	$P\wedge(Q\vee R)$	$P\wedge R$	$P\wedge Q$	$(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

1.3.6　下表为含有两个变元的命题公式的各种情况真值表，对于每一列试写出一个至多包含此两变元的命题公式。

解　表 1.6 可表示如下：

表 1.6

P	Q	1	2	3	4	5	6	7	8
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F	T	F	T
P	**Q**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F	T	F	T

由上表可得有关公式为：1. F；2. $\neg(P\vee Q)$；3. $\neg(Q\rightarrow P)$；4. $\neg P$；5. $\neg(P\rightarrow Q)$；6. $\neg Q$；7. $\neg(P\leftrightarrows Q)$；8. $\neg(P\wedge Q)$；9. $P\wedge Q$；10. $P\leftrightarrows Q$；11. Q；12. $P\rightarrow Q$；13. P；14. $Q\rightarrow P$；15. $P\vee Q$；16. T

1.4 等价变换与蕴含式

1.4.1 判断下列各式，哪些是永真式，哪些是永假式，哪些是可满足式，方法不限。

a) $P\rightarrow(P\vee Q\vee R)$;

b) $(P\rightarrow\neg P)\rightarrow\neg P$;

c) $\neg(Q\rightarrow P)\wedge P$;

d) $(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\rightarrow\neg P)$;

e) $(\neg P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\rightarrow\neg P)$;

f) $(P\vee\neg P)\rightarrow((Q\wedge\neg Q)\wedge\neg R)$;

g) $(P\wedge\neg P)\rightleftarrows Q$;

h) $(P\rightleftarrows Q)\rightarrow\neg(P\vee Q)$。

解 a) 原式$\Leftrightarrow\neg P\vee(P\vee Q\vee R)\Leftrightarrow T\vee Q\vee R\Leftrightarrow T$，故 a) 是永真式。

b) 原式$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg P)\rightarrow\neg P\Leftrightarrow\neg P\rightarrow\neg P\Leftrightarrow P\vee\neg P\Leftrightarrow T$；故 b) 是永真式。

c) 原式$\Leftrightarrow\neg(\neg Q\vee P)\wedge P\Leftrightarrow Q\wedge\neg P\wedge P\Leftrightarrow F$，故 c) 是永假式。

d) 原式$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\rightarrow(\neg Q\vee\neg P)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg Q\vee\neg P)$

$\Leftrightarrow(P\vee\neg Q\vee\neg P)\wedge(\neg Q\vee\neg Q\vee\neg P)\Leftrightarrow(T\vee\neg Q)\wedge(\neg Q\vee\neg P)$

$\Leftrightarrow(\neg Q\vee\neg P)$,

故 d) 是可满足式。

e) 原式$\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)\vee(\neg Q\vee\neg P)\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg Q\vee\neg P)$

$\Leftrightarrow(\neg Q\vee\neg P)\wedge(\neg Q\vee\neg P)\Leftrightarrow\neg Q\vee\neg P$，

故 e) 是可满足式。

f) 原式$\Leftrightarrow T\rightarrow(F\wedge\neg R)\Leftrightarrow T\rightarrow F\Leftrightarrow F$，故 f) 是永假式。

g) 原式$\Leftrightarrow F\rightleftarrows Q$，故原式是可满足式。

h) 见表 1.7:

表 1.7

P	Q	$P\rightleftarrows Q$	$\neg(P\vee Q)$	$(P\rightleftarrows Q)\rightarrow\neg(P\vee Q)$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T

由表 1.7 可知 h) 为可满足式。

1.4.2 证明下列等价式：

a) $P\rightarrow(Q\rightarrow P)\Leftrightarrow\neg P\rightarrow(P\rightarrow\neg Q)$;

b) $\neg(P\rightleftarrows Q)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q)$;

c) $\neg(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$;

d) $P\rightarrow(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\rightarrow R$;

e) $(P\rightarrow R)\vee(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\rightarrow R$;