

数 学 自 学 指 南

〔苏〕H.B.巴格莫洛夫 著

王 书 编译

电子工业出版社

内 容 简 介

本书是根据〔苏〕H. B. 巴格莫洛夫著的《数学自学指南》一书编译的。

本书的特点是结构新颖，内容充实，适于自学。每章开头简要介绍基础知识，然后精选典型例题。为便于自学，例题与习题穿插安排，以利于读者模仿。在本书中，凡是可能的地方，把习题按类型进行了分类。在每章的“综合题”中，还配备了对于进行练习来说是必须数量的习题，以加深读者巩固基础知识，掌握解题方法，提高综合运用数学知识的能力。每章最后还配有两组不同的自测题，读者可以自我检查学习效果。可供高中学生、中学数学教师、自学青年、中师、中专和中技师生阅读、参考。

数 学 自 学 指 南

〔苏〕H. B. 巴格莫洛夫 著

王 书 编译

责任编辑：平 凡

电子工业出版社出版（北京海淀区万寿路）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京通县曙光印刷厂印刷

开本：787×1092毫米1/32 印张：14.25 字数：318千字

1988年1月第一版 1988年1月第一次印刷

印数：1—7000 册 定价：5.10元

ISBN 7-5053-0148-9/G19

序 言

Н. В. 巴格莫洛夫著的《数学自学指南》(Практические Занятия По Математике) 一书包括“计算数学”、“代数与分析”和“几何”三部分。本书是根据第二和第三两部分编译的。

本书的特点是结构新颖, 内容充实, 适于自学。每章开头简要介绍基础知识, 然后精选典型例题, 讲解通俗易懂, 深入浅出。在本书中, 凡是可能的地方, 把习题按类型进行了分类。为便于自学, 例题与习题穿插安排, 以利于读者模仿。在每章的“综合题”中, 还配备了对于进行练习来说是必须数量的习题, 以加深读者巩固基础知识, 掌握解题方法, 提高综合运用数学知识的能力。每章最后还配有两组完全不同的自测题, 读者可以自我检查学习效果。只要读者有决心, 完全可以在没有教师讲解或指导的情况下, 靠自学从头到尾地读完这本书, 掌握书中讲述的概念与解题的方法和技巧。

本书可供高中学生、中学数学教师、自学青年、中师、中专和中技师生阅读参考, 对于立志走自学成材道路的社会青年也是一本理想的读物。

在编译过程中, 魏仲和、王元瑞等同志校阅了部分章节, 在此表示谢意。

由于时间仓促, 再加上编译水平有限, 书中难免存在缺点和错误, 请读者批评指正。

王 书

1986年10月1日.

目 录

第一篇 三角函数

第一章 三角函数与三角函数的性质	(1)
§1. 弧和角的弧度制	(1)
§2. 单位圆	(9)
§3. 三角函数值	(12)
§4. 三角函数值的符号和三角函数的奇偶性	(17)
§5. 基本的三角恒等式	(27)
小测验	(35)
§6. 三角函数的周期性	(36)
§7. 正弦和余弦的半周期的性质	(41)
§8. 诱导公式	(44)
§9. 综合题	(47)
小测验	(49)
第二章 反三角函数与三角方程	(51)
§1. 反三角函数, 按照已知三角函数值 作弧 (角)	(51)
§2. 三角方程与三角不等式	(62)
小测验	(79)
第三章 两角和与差的三角函数	(81)
§1. 两个自变量代数和的三角函数 (加法公式)	(81)

§ 2. 综合题	(93)
小测验	(96)
§ 3. 倍角三角函数	(97)
§ 4. 半角三角函数	(100)
§ 5. 综合题	(111)
小测验	(114)
§ 6. 三角函数的积化和差	(115)
§ 7. 三角函数的和差化积	(119)
§ 8. 简谐振动	(130)
§ 9. 综合题	(134)
小测验	(137)

第二篇 平面解析几何

第四章 平面上的向量

§ 1. 基本概念和定义	(138)
§ 2. 向量的加法和减法、向量的数乘	(142)
§ 3. 直角坐标系	(148)
§ 4. 向量的长度、平面上两点之间的距离、向量同 坐标轴所成的角	(154)
§ 5. 线段的定比分点	(157)
§ 6. 两向量的数量积	(160)
§ 7. 直角坐标变换	(164)
§ 8. 极坐标	(167)
§ 9. 综合题	(170)
小测验	(172)

第五章 平面上的直线和它的方程

§ 1. 直线的一般方程、直线的向量方程和典型 方程	(173)
-------------------------------------	---------

§2. 直线的截距式方程	(179)
§3. 直线的斜截式方程	(181)
§4. 直线的点斜式方程	(187)
§5. 直线的两点式方程	(188)
§6. 两条直线的交点	(190)
§7. 两条直线间的角	(192)
§8. 两条直线平行的条件	(199)
§9. 两条直线垂直的条件	(201)
§10. 综合题	(205)
小测验	(208)
第六章 平面上点的集合、二次曲线	(209)
§1. 平面上点的集合	(209)
§2. 圆	(213)
§3. 椭圆	(223)
§4. 双曲线	(229)
§5. 顶点在坐标原点的抛物线	(237)
§6. 顶点不在坐标原点的抛物线	(242)
§7. 曲线的切线和法线	(250)
§8. 综合题	(260)
小测验	(262)

第三篇 立 体 几 何

第七章 空间向量	(263)
§1. 基本概念、空间直角坐标系	(263)
§2. 空间向量的数量积	(273)
§3. 向量积	(276)
§4. 综合题	(279)
小测验	(280)

第八章 空间的直线和平面	(282)
§ 1. 立体几何的基本概念、空间的平行关系	(282)
§ 2. 空间中的垂直、二面角和多面角	(288)
§ 3. 综合题	(292)
小测验	(294)
第九章 空间的直线和平面的方程	(296)
§ 1. 平面	(296)
§ 2. 空间直线	(304)
§ 3. 平面和直线的关系	(310)
§ 4. 综合题	(314)
小测验	(315)
第十章 多面体及其表面积	(317)
§ 1. 棱柱	(317)
§ 2. 棱柱的表面积	(321)
§ 3. 棱锥	(323)
§ 4. 棱锥的表面积	(327)
§ 5. 综合题	(328)
小测验	(330)
第十一章 旋转体	(331)
§ 1. 圆柱	(331)
§ 2. 圆锥、圆台	(332)
§ 3. 球面、球体	(334)
§ 4. 球面的内切和外接	(337)
§ 5. 综合题	(340)
小测验	(341)
第十二章 多面体和旋转体的体积	(342)
§ 1. 多面体的体积	(342)
§ 2. 旋转体的体积	(348)
§ 3. 利用定积分计算旋转体的体积	(354)

§ 4. 综合题	(360)
小测验	(362)
第十三章 旋转体的表面积	(364)
§ 1. 圆柱的侧面积和全面积	(364)
§ 2. 圆锥的侧面积和全面积	(366)
§ 3. 圆台的侧面积和全面积	(368)
§ 4. 球面和它的部分的面积	(369)
§ 5. 利用定积分计算旋转体的表面积	(370)
§ 6. 综合题	(374)
小测验	(375)
习题答案	(376)

第一篇 三角函数

第一章 三角函数与三角函数的性质

§ 1. 弧和角的弧度制

1. 用弧度制度量的基本公式

当用弧度制去度量弧（相应于它所对的圆心角）时，我们用弧度作为度量的单位，即弧长等于半径的弧叫做1弧度。

弧的弧度数可按下列公式计算

$$\alpha = \frac{l}{R} \quad (1.1)$$

这里， α ——弧的弧度数， l ——圆的弧长， R ——这弧的半径。

由角度制变为弧度制的公式为

$$\alpha = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \quad (1.2)$$

这里 α 为角度制的弧（角）的度数。

1° 等于0.0175弧度。

由弧度制变为角度制的公式为

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot a \quad (1.3)$$

1 弧度等于 $57^\circ 17' 44.8'' \approx 57.3^\circ$ 。

圆弧的长等于圆弧的弧度数与这个弧的半径的乘积：

$$l = a \cdot R \quad (1.4)$$

扇形的面积等于扇形的弧的弧度数与圆半径平方乘积的一半。

$$S_{\text{扇形}} = \frac{aR^2}{2} \quad (1.5)$$

2. 有关点的旋转运动的基本概念

物体绕固定轴作旋转运动时有两种不同的速度概念，即线速度和角速度。

物体作旋转运动时物体上任何一点的速度称为线速度。

沿着半径为 R 的圆作匀速圆周运动的质点的线速度 v 可按下面的公式计算。

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad (1.6)$$

这里 T 是旋转周期，即质点旋转一周所用的时间。

线速度 v 同 R 和 n （每秒钟内质点转动的圈数）之间的关系用下面的公式表示。

$$v = 2\pi Rn \quad (1.7)$$

每秒钟内转的圈数 n 和旋转周期 T 之间的关系用下面的公式表示。

$$T = \frac{1}{n} \quad (1.8)$$

作匀速圆周运动的物体上任意一点到轴心的半径在一秒钟内所转过的角度称为角速度。角速度用每秒若干弧度（弧度/秒）来表示。

角速度 ω 和旋转周期 T 之间的关系用下面的公式表示。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.9)$$

角速度 ω 和每秒转的圈数 n 之间的关系用下面的公式表示。

$$\omega = 2\pi n \quad (1.10)$$

到转动轴的距离为 R 的质点的线速度与它的角速度之间的关系表示为下式。

$$v = \omega R \quad (1.11)$$

作变速旋转运动的物体上任意一点在时间 t 内角度 φ 的变化速度称为它的角速度 ω 。这时，角速度为旋转角度 φ 关于时间 t 的导数。

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.12)$$

角速度可用 弧度/秒 表示。

角的加速度 ϵ 是角速度 ω 关于时间 t 的导数。

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad (1.13)$$

角的加速度用 弧度/秒² 表示。

1. 求下列各角的弧度精确值：

1) 240° ; 2) 300° ; 3) 315° ; 4) 360° 。

解：按照公式 (1.2) 得：

$$1) \alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 240^\circ = \frac{4\pi}{3};$$

$$2) \alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 300^\circ = \frac{5\pi}{3};$$

$$3) \alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 315^\circ = \frac{7\pi}{4};$$

$$4) \alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 360^\circ = 2\pi.$$

2. 把下列角度化成精确的弧度值:

$$1) 30^\circ; \quad 2) 45^\circ; \quad 3) 60^\circ; \quad 4) 90^\circ;$$

$$5) 120^\circ; \quad 6) 135^\circ; \quad 7) 150^\circ; \quad 8) 180^\circ;$$

$$9) 210^\circ; \quad 10) 225^\circ; \quad 11) 270^\circ; \quad 12) 330^\circ.$$

3. 查表求下列角的弧度数:

$$1) 15^\circ 18'; \quad 2) 71^\circ 10'; \quad 3) 15^\circ 17'; \quad 4) 115^\circ 44';$$

$$5) 215^\circ 10'; \quad 6) 312^\circ 19'; \quad 7) 57^\circ 25'; \quad 8) 87^\circ 30'.$$

4. 利用对数计算尺求下列角的弧度数:

$$1) 14.5^\circ; \quad 2) 27.3^\circ; \quad 3) 75^\circ;$$

$$4) 130^\circ; \quad 5) 38.7^\circ; \quad 6) 86^\circ.$$

5. 把下列各弧度的角化为角度制的角:

$$1) \frac{7\pi}{6}; \quad 2) \frac{5\pi}{4}; \quad 3) \frac{2\pi}{3}.$$

解: 按照公式 (1.3) 得:

$$1) \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{7\pi}{6} = 210^\circ;$$

$$2) \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{4} = 225^\circ;$$

$$3) \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = 120^\circ.$$

6. 求下列弧度的角度数:

$$1) \frac{5\pi}{36}; \quad 2) \frac{7\pi}{12}; \quad 3) \frac{11\pi}{18}; \quad 4) \frac{5\pi}{9};$$

$$5) \frac{11\pi}{20}; \quad 6) \frac{13\pi}{30}; \quad 7) \frac{11\pi}{6}; \quad 8) \frac{4\pi}{3}.$$

7. 查表求下列各弧度的角度数:

$$1) 0.03008; \quad 2) 0.5728; \quad 3) 1.0472;$$

$$4) 1.3454; \quad 5) 1.4850; \quad 6) 1.7453.$$

8. 半径为0.65米的车轮转动了1.4弧度, 求车轮转过的路程的长度。

解: 根据公式 (1.4), 我们求得

$$l = 1.4 \times 0.65 = 0.9 \text{ (米)}.$$

9. 如果长度为0.84米的弧含有1.5弧度, 求这条弧所在圆周的半径。

10. 已知一个扇形的弧含有0.85弧度, 而扇形的半径为0.38米, 求扇形的弧长。

11. 扇形的弧为0.94弧度。如果扇形的半径为0.65米, 求扇形的面积。

解: 根据公式 (1.5), 我们求得

$$S_{\text{扇形}} = 0.5 \times 0.94 \times 0.65^2 = 0.20 \text{ (米}^2\text{)}.$$

12. 圆的半径为0.56米, 而扇形的面积为0.72米², 求扇形的弧的弧度数。

13. 面积为0.39米²的扇形的弧为1.4弧度, 求扇形的半径。

14. 半径为0.45米的皮带轮作匀速旋转运动时每分钟转

180转，求轮子边缘某点的线速度。

解：求每秒的转数：

$$n = \frac{180}{60} = 3。$$

根据公式 (1.7)，我们求得轮子外缘的线速度：

$$v = 2\pi \times 0.45 \times 3 \approx 8.5 \text{ (米/秒)}。$$

15. 轮子上距中心0.56米的点在轮子匀速旋转时的线速度为4.6米/秒，求轮子的旋转周期。

解：利用公式 (1.6)，我们求得：

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \times 0.56}{4.6} \approx 0.77 \text{ (秒)}。$$

16. 半径为0.24米的车轮在匀速转动时轮缘的线速度为4.8米/秒，求轮子每秒钟的转数。

17. 飞轮匀速转动时，轮缘上的点的线速度为1.6米/秒，旋转周期为 $\frac{\pi}{4}$ 秒，求飞轮的半径。

18. 轮子作旋转运动时，距旋转轴0.12米的点的线速度为0.48米/秒，求轮子的旋转周期。

19. 轧辊匀速转动时每秒钟转600转，求轧辊的角速度和旋转周期。

解：轧辊每秒钟的转数为：

$$n = \frac{600}{60} = 10。$$

我们利用公式 (1.10) 和 (1.8) 可以求得：

$$\omega = 2\pi \cdot 10 = 20\pi \text{ (弧度/秒)}，$$

$$T = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ (秒)}。$$

20. 半径为0.64米的飞轮在匀速旋转时, 其边缘上的线速度为256米/秒, 求飞轮的角速度。

解: 利用公式 (1.11) 并将 v 和 R 用已知数值代替, 我们求得:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{256}{0.64} = 400 \text{ (弧度/秒)}。$$

21. 半径为0.125米的车轮以24弧度/秒的角速度作匀速旋转运动, 求车轮外缘上的点的线速度。

22. 轧辊匀速旋转时的角速度为 10π 弧度/秒, 求轧辊每秒钟的转数。

23. 齿轮匀速旋转时的角速度为 $\frac{\pi}{3}$ 弧度/秒, 求它的旋转周期。

24. 飞轮在刹闸时的旋转角度 φ 与时间 t 的关系为 $\varphi = 3 + 8t - t^2$, 求:

1) 在 $t = 3$ 秒时飞轮旋转的角速度;

2) 在时刻 t 的角加速度;

3) 飞轮停止的时刻。

解: 1) 角速度是旋转角度 φ 关于时间 t 的导数, 即

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 8 - 2t。在 t = 3 \text{ 秒时的角速度为:}$$

$$\omega_{t=3} = 8 - 2 \times 3 = 2 \text{ (弧度/秒);}$$

2) 角加速度 ε 是角速度 ω 关于时间 t 的导数, 即

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -2 \text{ (弧度/秒}^2\text{);}$$

3) 设 $\omega = 0$, 我们求得时间 t :

$$8 - 2t = 0, \quad t = 4 \text{ (秒)}。$$

5 物体按照规律 $\varphi = 10t - t^2$ 绕轴旋转, 求:

1) 物体在 $t = 2$ 秒时旋转的角速度;

2) 在 t 秒时的角加速度;

3) 物体停止旋转的时刻。

26. 三角形的三个内角的比是 $1:3:5$, 求它们各等于多少弧度。

27. 四个点把圆周分为 $3:4:5:6$ 四部分, 试按弧度制计算对应弧的值。

28. 如果五边形的内角之比为 $2:4:5:6:7$, 试计算各角的弧度数。

29. 以 $R = 0.12$ 米为半径画弧, 使它等于 2.5 弧度, 求弧长。

30. 一条弧等于 $\frac{4\pi}{15}$ 弧度, 求它所对的圆周角的弧度数。

31. 一条弧等于 $\frac{5\pi}{9}$ 弧度。试问弧上的点和弧所对弦的

两端的连线所组成的角是多少弧度?

32. 计算钟表的时针、分针和秒针的角速度 (弧度/秒)。

33. 半径为 0.6 米的车轮以每分钟 480 转的速度匀速转动, 求:

1) 轮子的角速度;

2) 轮上距轴心 0.1 米的点的线速度;

3) 车轮外缘的线速度。

34. 一个物体绕固定轴旋转的规律是: $\varphi = 5 + 18t - 3t^2$ (φ —弧度数, t —秒), 求这个物体停止旋转的时刻。

§ 2. 单 位 圆

以坐标原点为圆心，以1个单位长为半径的圆叫做单位圆。单位圆的方程为 $x^2 + y^2 = 1$ (图1)。

单位圆上的一点 $A(1, 0)$ 绕坐标原点旋转角 α 后到达点 $M_\alpha = R^\alpha(A)$ 。旋转 R^α 由下列条件给定：a) 旋转中心(坐标原点)；b) 旋转角 α ；c) 旋转方向。和点 $(1, 0)$ 一样，点 M_α 也在单位圆上。

按照逆时针旋转的方向为正方向，而按照顺时针旋转的方向为负方向。

点 $A(1, 0)$ 是弧的计量的起点(无论是正的还是负的)。

第I象限的弧在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$

内，第II象限的弧在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

内，第III象限的弧在区间 $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ 内，第IV象限的弧在区间

$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ 内。

具有已知起点 A 和终点 M 的弧(给定了始边和终边的角)存在一个无穷集合。这个弧(角)的集合不论是正的还是负的，可统一用下列公式表示。

$$\alpha = 2\pi k + \alpha_1, \text{ 或 } \alpha = 360^\circ k + \alpha_1 \quad (1.14)$$

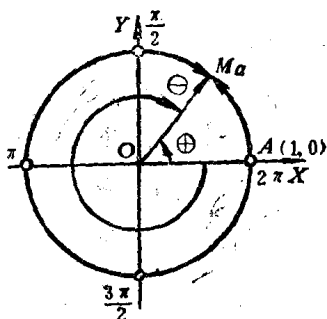


图 1