理工类

全国高等教育自学考试

活页文丛

线性代数

全国高等教育自学考试指导委员会 组编

1.2

中国人民大学出版社

线性代数

全国高等教育自学考试

活 页 文 丛

（理工类）

线性代数

全国高等教育自学考试指导委员会　组编

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/全国高等教育自学考试指导委员会 组编.
北京：中国人民大学出版社，2001.
（全国高等教育自学考试活页文丛．理工类）

ISBN 7-300-03652-X/G·749
Ⅰ．线…
Ⅱ．全…
Ⅲ．线性代数-高等教育-自学考试-自学参考资料
Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 57296 号

全国高等教育自学考试
活页文丛（理工类）
线性代数
全国高等教育自学考试指导委员会 组编

出版发行：中国人民大学出版社
（北京中关村大街 31 号　邮编 100080）
邮购部：62515351　门市部：62514148
总编室：62511242　出版部：62511239
E-mail：rendafx@public3.bta.net.cn
经　　销：新华书店
印　　刷：三河市新世纪印刷厂

开本：850×1168 毫米 1/32　印张：4.875
2001 年 1 月第 1 版　2001 年 1 月第 1 次印刷
字数：95 000

定价：8.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　　言

凡参加高等教育自学考试者，都希望自考教材能够跟上时代的变化与发展，反映学科的新成果、新动态，提供与现实生活和工作密切相关的信息。我们也一直在朝这个方向努力。但我们面临着来自两个方面的挑战：一方面，教材的编写、出版、供应等环节都需要一定的时间。一般说来，一本教材从确定编写到首次应用至少需要两年左右。况且，多数教材都不可能仅使用一两次就立即修改或重编。另一方面，社会生活变化迅速，科技发展日新月异，这给我们保持与社会、科技发展变化同步带来极大的困难。教材的相对稳定性与时代变化的快速性形成了矛盾，客观上形成了我们的教材不能满足考生需要的问题。经过广泛的调查研究，我们终于找到了弥补的办法：在教材未修订、重编期间，编纂《全国高等教育自学考试活页文丛》，把与教材密切相关且已变化很大的、达到自考质量标准又必不可少的内容及时地提供给广大考生。

在全国统一命题中，这些变化也将引起注意。希望考生在学习课程大纲和教材时也要重视学习相应的《全国高等教育自学考试活页文丛》。应当指出，这并没有增加考生的学习负担，因为我们或者用新内容取代了教材中相应的内容，或者对原有的内容仅作了有限的补充。为帮助考生学习，我们还在《全国高等教育自学考试活页文丛》中开辟了学习指导与自测练习专栏。

把学校办在自学者的家中，把成才之路铺到自学者的脚下，是我们的根本宗旨。欢迎考生、自考工作者和每一位关心自考工作的有识之士提出意见和建议，为办好《全国高等教育自学考试活页文丛》共同努力。

全国高等教育自学考试指导委员会

目　录

全国高等教育自学考试活页文丛

活页文丛编辑部

主　编

刘长占

周蔚华

副主编

王建民

陈　卫

费小琳

本册主编

汤新国

怎样学好“线性代数”？怎样学可以提高效率，用较少的气力取得较好的效果？这是很多参与本课程考试的同志都会关心的问题.

每门课程都有自己的特点，它的众多内容都有自己的结构.学习时必须了解它的特点和独特的结构，抓住问题、发展的线索、要点和有意义的难点，依据课程考试大纲的要求，由浅入深、由表及里扎扎实实地学习.

下面，就我们的理解，对本课程的性质、内容结构、各部分的要点及需注意的问题作一些说明，供大家参考.

课程总说明

“线性代数”是工科各专业本科的专业基础课.它所讨论的问题主要是线性方程的求解和矩阵的对角化，以及化二次型为标准形.

从概念上讲，通过 n 维向量的概念，这些问题可以抽象为 n 维向量空间及其上的线性变换的问题.为解决这些问题，形成了向量组的线性相关性和秩的理论，以及线性变换（或矩阵）的特征值和特征向量的理论.这些理论是本课程的基础理论.

从实际计算的角度来看，这些问题又都可以用矩阵的形式来表述，并通过矩阵的代数运算和行列式计算得到最终的解决.所以矩阵代数和行列式是本课程中处理问题的基本工具和

基本方法．当然，它本身也是一种基本理论．

这些理论和方法，不仅在数学的各个分支中有广泛的应用，而且在众多的科技领域和社会科学的领域，特别是计算机科学中也都有大量的应用．计算数学中的所有方法，无例外地都以线性代数为基础，所以，本课程不仅是基础理论性的课程，而且也是一门有很强应用背景的应用数学课程．

要学好这门课程，首先必须了解它所要讨论的有哪些问题，在讨论的过程中引进了哪些基本概念，形成了哪些基本理论，得到了哪些重要的结论，用到的工具和方法又有哪些．掌握了从问题的提出、展开和深化、直至最终（或在一定程度上）解决的过程，就抓住了课程的纲，就能学得主动、学深学透，就能避免只见树木不见森林，学完了还糊涂一片．

课程的内容和结构

“线性代数”的内容共分 5 部分：矩阵和行列式，向量空间，矩阵的秩和线性方程组，特征值和特征向量，实二次型．下面，对这些内容在课程中的地位和作用分别进行说明．

矩阵和行列式，是解决线性代数和许多数学问题的工具和方法，同时它也是带有浓厚的代数或计算色彩的理论．因此，这部分是整个课程的基础，是学习的一个重点．

向量空间是线性代数的蕴涵几何意味的一种理论．一个线性方程，矩阵的一个行（列），都可以看成一个向量．线性方

程组中各个方程和矩阵中各个行（列）之间的许多关系实质上就是向量之间的一种线性关系. 分析这种关系对于剖析一个线性方程组的解的情况和结构，或了解一个矩阵的行、列的线性结构，具有关键的意义. 这部分内容比较抽象，概念和推理多，比较难学，但这是线性代数理论的基础和精髓. 通过它的学习可以培养抽象思维能力和严密的逻辑推理能力，提高自己的数学素质. 学好了这一部分，学习其他部分就不会感到很困难了.

线性方程组的求解，是线性代数的基本问题之一和发展的起源，有极其广泛的应用，也是学习本课程的一个重点. 一个线性方程组可以用它的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 和增广矩阵 $\overline{\mathbf{A}}$ 来表征. 方程组解的情况集中反映在 $\mathbf{A}$ 和 $\overline{\mathbf{A}}$ 的秩上. 矩阵的秩是刻画其行（列）的线性关系和众多子式的特征的一个最重要的数量指标，是本课程中最深刻的一个概念. 从向量组的线性相关性到向量组的秩，进而到矩阵的秩，是课程中理论性最强，最难学，可也是最精彩的部分. 秩的概念联系到矩阵、行列式、向量组、线性方程组、线性变换和二次型，希望大家从它的内涵和多种应用上很好掌握. 线性方程组相容性的判定和解的结构是这部分的最终也是最重要的结果，而用初等行变换化矩阵为行最简形则是本课程最基本的计算之一，有多种应用.

矩阵（或线性变换）的特征值和特征向量，是线性代数中有广泛和重要应用的一部分内容，也是数值代数中讨论的一个主题. 其几何背景是：在平面或空间（2 或 3 维向量空间）

中，一个简单的几何变换（如绕原点的旋转）φ 把点（向量）P 变成Q，设 P 和Q 在坐标系（向量空间的一个基）（Ⅰ）中的坐标依次为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$（2 或 3 维向量），φ 用$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 可表示为 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{A}$ 是一个 2 或 3 阶方阵，称之为 φ 在（Ⅰ）下的矩阵. 一般来说，对于任选的（Ⅰ），$\boldsymbol{A}$ 比较复杂. 有意义的问题是：如何选取一个好的坐标系（基）Ⅱ，使 φ 在（Ⅱ）下的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 最为简单. 假设从（Ⅰ）到（Ⅱ）的坐标变换式为$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{u}}$（$\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵），P 和 Q 在（Ⅱ）中的坐标依次为 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{y}}$，则$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{y}}$. 所以 φ 在（Ⅱ）中的表示式为$\boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{y}}$，或$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{y}}$，从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. 即 $\boldsymbol{B}$ 是$\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是相似变换矩阵. 最简单而又可能的矩阵是对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$. 当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Lambda}$ 时就导致特征值和特征向量. 如果（Ⅰ）和（Ⅱ）都是直角坐标系（标准正交基），则 $\boldsymbol{C}$ 是正交矩阵. 特征值的计算就是求行列式$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$（这是 λ 的一个多项式）的根，特征向量的计算则是求齐次线性方程组的非零解. 正交矩阵是一类特殊矩阵，有许多应用. 为了更好地了解和构造这种矩阵，引进了向量的内积运算. 由此可以计算向量的长度和夹角. 添加了这种度量运算的向量空间即所谓的欧氏空间，它比只有线性运算的向量空间更具体，也更贴近实际（很难想象没有了长度和角度概念的几何会是什么样）. 这一章的基本问题是矩阵的对角化，即对给定的 $\boldsymbol{A}$，求可逆或正交矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$.

实二次型就是定义在向量空间上的系数为实数的二次齐次函数，求它的标准形是线性代数中又一类具有广泛应用背景的问题. 其几何意义是：把平面上有心二次曲线的方程 $ax^2+2bxy+cy^2=1$，或空间中有心二次曲面的方程 $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz=1$ 化成标准方程. 这两个方程的左端表示式就是 2 元或 3 元二次型. 求二次型的标准形有二种方法：一种是用满秩线性变换，即配方的方法；另一种是用正交变换（直角坐标变换）的方法，这就导致特征值和特征向量的计算. 这部分最后讨论的一个问题是实二次型（实对称矩阵）的分类和正定性. 这里要用到前面的一些知识.

各部分内容的要求、重点和注意事项

要学好各部分的内容，首先必须注重它的基本概念，掌握基本的计算，这是基础；其次，还必须在它们与其他部分的联系和各种应用上下功夫. 下面分别对各部分作具体的阐述.

为避免重复或疏漏，大家应以课程考试大纲的第二大部分为准，把它与这里的阐述结合起来，反复加以思考.

由于各部分内容是互相联系的，我们在阐述时无法顾及教材中的先后顺序. 为了与教材的有关内容相对照，我们往往用加(　)的形式，说明在教材中的哪些页、哪些定义、定理或例子（注：这里所说的教材，是指由全国高等教育自学考试指导

委员会组编，魏战线编写的《线性代数》. 辽宁大学出版社出版，1999 年. 这是自学考试用的指定教材).

1. 矩阵代数

(1) 有关的术语

大家必须首先知道关于矩阵的各种术语和符号，即清楚一个矩阵指的是什么，什么叫矩阵的行、列，其(i,j)元位于何处，$m\times n$ 矩阵指的是什么，什么叫方阵和矩阵或方阵的阶及其主对角线（《线性代数》第 2 页)，知道两个矩阵相等的含义（《线性代数》第 4 页定义 1.2). 还应注意矩阵的表示（包括简写）和使用的符号（《线性代数》第 2 页).

这些看似小事，但许多初学者往往就在这些地方出错.

需注意，由于行、列数或阶数的不同，零矩阵 $\boldsymbol{0}$ 和单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 有无穷多个，同是一个 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{0}$，在不同的场合可以有不同的阶数或行、列数（《线性代数》第 2，3 页).

(2) 矩阵的运算

矩阵有 4 种运算：加（减）法（《线性代数》第 15 页定义 1.5)，数乘矩阵（《线性代数》第 17 页定义 1.6)，矩阵乘法（《线性代数》第 19 页定义 1.7）和转置（《线性代数》第 27 页定义 1.8). 大家一定要注意在什么条件下可以做矩阵的加法和乘法运算，如 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{AB}$ 就不能写成$\boldsymbol{A}(1-\boldsymbol{B})$而应写成$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})$,因为$1-\boldsymbol{B}$ 没有意义. 在矩阵的这些运算中，乘法用得最多且又不易掌握. 要注意$\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}=(\boldsymbol{AB})_{m\times n}$.

利用矩阵的乘法，线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

和线性变换

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_n+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases}$$

用矩阵可依次表示为（《线性代数》第 23 页例 1.7，《线性代数》第 24 页例 1.8）

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \text{ 和 } \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

（3）矩阵的运算规则

矩阵毕竟不是数（除非是 1 阶矩阵），它的运算规则有一些是与数的运算规则不同的，大家务必注意. 这里主要有两点，即一般说来（《线性代数》第 21 页例 1.6）

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}\ （乘法不适合交换律），$$

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0} \nRightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}\ 或\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}\ （乘法有零因子）.$$

前者是指即使 $\boldsymbol{AB}$ 有意义，$\boldsymbol{BA}$ 也可能没有意义，在有意义时也不一定等于 $\boldsymbol{AB}$. 由后者可知

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} \nRightarrow \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}\ 或\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\ （消去律不成立）.$$

还应注意

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}（而不是\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}!）.$$

对方阵可作方幂运算（《线性代数》第 26 页），并有

$$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}^{m+n}, (\boldsymbol{A}^m)^n = \boldsymbol{A}^{mn},$$

但一般

$$(\boldsymbol{AB})^r \neq \boldsymbol{A}^r\boldsymbol{B}^r.$$

（4）几类特殊矩阵

1）数量矩阵 $k\boldsymbol{E}$（k 是数，$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵）.

其特点是它与任意矩阵的乘积（在可乘的条件下）可交换. 即如 $\boldsymbol{X}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的任意方阵，$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA}$，则 $\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{E}$.

又 $k\boldsymbol{E}$ 可逆$\Leftrightarrow k \neq 0$，且$(k\boldsymbol{E})^{-1} = \frac{1}{k}\boldsymbol{E}$.

注意，如 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶，则行列式

$$|k\boldsymbol{E}| = k^n.$$

2）对角矩阵（《线性代数》第 4 页）.

即形如$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$的矩阵，其非主对角线元均为 0.
可简记作$\mathrm{diag}[d_1,d_2,\cdots,d_n]$，这是最简单的一类矩阵.

显然，对角矩阵的和、积及数乘也都是对角矩阵.

3）（反）对称矩阵.

即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$（或 $-\boldsymbol{A}$）的一类矩阵. 显然，这种矩阵必须是方阵（《线性代数》第 30～31 页）.

如设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵$\Leftrightarrow$ $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

$\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵$\Leftrightarrow$ $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

由此可见，反对称矩阵的主对角线元全是 0（即 $a_{11}=\cdots=a_{nn}=0$）.

[思考题] 矩阵的对称性或反对称性在矩阵的各种运算下是否保持?

二次型的矩阵是对称矩阵吗?

4）三角矩阵（《线性代数》第 3 页）.

主对角线以上（下）的元素全为 0 的方阵称为下（上）三角矩阵. 这类矩阵在计算方法中有用.

[思考题] 三角矩阵在矩阵的各种运算下是否仍是同类三角矩阵?

5）分块矩阵和矩阵的分块运算.