高等学校教材

最优系统基础

张德昌 编著

西北工业大学出版社

高 等 学 校 教 材

最优系统基础

张德昌 编著

西 北 工 业 大 学 出 版 社

1990 年 2 月 西安

内 容 简 介

本书介绍最优控制的数学方法，内容以极大值原理为主，兼顾动态规划法。全书共八章，分别介绍最优控制问题的提法，极大值原理及证明，线性系统时间最优控制及二次型性能指标的最优控制，动态规划法和最优性的充分条件，极大值原理在变分法中的应用，极大值原理在微分对策中的应用等。附录中介绍了线性系统的能控性和能观测性问题。

本书不要求读者具有控制理论知识和较专门的数学知识。具有工科大学本科的数学基础即可阅读。

本书可供应用数学、力学及控制类专业的本科生和研究生用作教材或教学参考书，也可供从事上述专业的科研工作者及工程技术人员参考。

高等学校教材

最优系统基础

编　　著　张德昌

责任编辑　刘彦信

责任校对　樊　力

西北工业大学出版社出版

（西安市友谊西路 127 号）

陕西省新华书店发行

西北工业大学出版社印刷厂印装

ISBN 7-5612-0247-4/TP·40(课)

开本 787×1092 毫米　1/32　8.25 印张　171 千字

1990 年 2 月第 1 版　1990 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—2000 册　　定价：1.66 元

前　言

1981年起，作者在西北工业大学为一般力学专业开始讲授“最优系统基础”课。它作为一般力学专业本科高年级的选修课年年开设，又是一般力学专业中运动稳定性和有控力学方向的研究生的必修课。作者还为应用数学专业高年级本科生、惯性导航专业和控制类专业的研究生讲授过这门课。1985年，作者在美国东伊利诺大学向该校数学系的教师和研究生讲授过这门课的部分内容。本书就是根据历次所用教材整理充实修改编成的。

“最优系统”是个模糊的概念。不过国内外从事理论工作和实际工作的专家们都常用它。在50年代的文献、专著和教科书中就已出现了这个名词。工程技术人员谈到最优系统时，总知道这意味着什么。实际上这表示在解决问题的不同阶段的这种或那种优化方面的设想。简单地说，采用了最优控制或最优策略的受控系统叫做最优系统。本书主要介绍最优控制的数学方法，同时又利用了最优系统这个名词的模糊方面，使书中包括了少量的最优控制之外的内容。

控制与力学有密切关系。许多著名的在控制理论方面做出了卓越贡献的专家原来就是从事力学工作的。最优控制理论的产生和发展与火箭动力学及轨道计算有密切关系。最优控制理论的两个基本方向，即极大值原理和动态规划，分别与古典力学中的正则方程和哈米顿雅可比方程有关。

为适应力学和数学专业的研究生和大学生的具体情况，本书内容主要是理论和方法，尽量少用控制方面的术语，也不特别介绍控制方面的背景。为了适应控制专业的研究生和大学生的情况，书中没有应用较专门的数学工具，并对各部分有关的数学知识都分散做了介绍。具有工科大学的一般数学知识的读者阅读本书时不会感到困难。

全书共八章。第一章介绍最优控制问题的提法。第二章介绍极大值原理的内容并举例说明其应用。第三章详细讨论了定常线性系统时间最优控制问题。第四章为极大值原理的证明。这是一个初等证明，不涉及特别专门的数学工具，不过对各种情况讨论比较详细，并尽可能照顾到数学上的严密性。其中§4-1至§4-4为极大值原理的简单证明。第五章讨论最优性的充分条件。介绍了连续系统的动态规划法。最后的充分性定理只介绍了内容，未作证明。第六章介绍了变分法与极大值原理的关系。第七章讨论二次型性能指标的线性最优系统。第八章为极大值原理在微分对策中的应用。考虑到力学和数学专业的读者不一定系统学过现代控制理论，附录一中介绍了线性系统的能控性和能观测性问题（这部分内容在第七章和第八章中都涉及到）。附录二中介绍了少许逻辑问题，这可能有助于理解某些定理的证明。书末列出了与本书内容有关的参考文献。

书中各章大都相对独立，使用时可根据需要灵活取舍，标有星号的章节可以不作为课内讲授内容。作为研究生教材，全书内容大致相当于60学时课堂讲授内容；用作本科高年级大学生的选修课教材，可选用第一、二、三、六及七各章的主要内容，大致相当于课内讲授30—40学时的内容。

西安交通大学许庆余教授在百忙中仔细审阅书稿，提出了许多宝贵意见，使本书得以改进。在此，谨向许庆余教授表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中缺点和错误在所难免，诚恳欢迎批评指正。

张 德 昌

1989 年 3 月

目　　录

第一章　最优控制问题

自第二次世界大战结束以来，自然科学和技术科学都在突飞猛进地发展。其中控制理论以其丰富的新思想和新方法显得十分突出。这与电子计算技术的兴起和发展有密切关系。由于电子计算技术，使创造和实现复杂的控制成为可能。

在科学发展中，优化的思想常起着重要作用。在控制理论中，对控制品质的研究就包含着优化的思想。40年代中期，火箭轨道计算问题中要求使能达到既定高度和射程的火箭燃料尽可能省。这种问题与自动控制的古典问题有很大不同。这使专家们致力于优化问题的研究。于是一门新学科开始产生并逐渐充实发展。古典力学的辉煌成就也发挥了作用，力学的正则方程和 Hamilton-Jacobi 方程提供了有益的启示。50年代后半期到60年代初，苏联科学院院士 Л. С. Понтрягин 和他领导的学者们提出并证明了极大值原理，美国学者 R. Bellman 和他的同事们提出并发展了动态规划法。这样，终于出现了一门新学科：最优控制理论。现在，它已成为现代控制理论的重要组成部分。

本书研究受控系统及寻求最好的(最优的)控制的方法。我们不涉及具体的受控系统本身，只讨论它的数学模型。本章介绍该模型。

§1-1　例：火箭在空间的运动

火箭在空间的运动可由下列常微分方程组描述：

$$\frac{dx^1}{dt}=x^4,$$

$$\frac{dx^2}{dt}=x^5,$$

$$\frac{dx^3}{dt}=x^6,$$

$$\frac{dx^4}{dt}=\frac{1}{m}(F^1+u^1\cos u^2),$$

$$\frac{dx^5}{dt}=\frac{1}{m}(F^2+u^1\cos u^3),$$

$$\frac{dx^6}{dt}=\frac{1}{m}(F^3+u^1\cos u^4),$$

$$\frac{dm}{dt}=f^0(u^1).$$

上列式中，x^1，x^2，x^3 为火箭的位置坐标；x^4，x^5，x^6 为火箭的速度在坐标轴 x^1，x^2，x^3 上的投影；u^1 为火箭推力的大小；$\cos u^2$，$\cos u^3$，$\cos u^4$ 为推力的方向余弦；F^1,F^2,F^3 为除推力外作用在火箭上的所有外力在坐标轴 x^1，x^2，x^3 上的投影之和；m 为火箭的质量；$f^0(u^1)$ 为一非负函数，t 为时间。

设 $x^7=m$。七个量 $x^1,\cdots,x^7$ 表示了火箭的位置、速度和质量，即火箭的状态。这七个量随时间 t 变化，称为状态变量。或者，这七个量作为一个整体，称为状态矢量。以

这七个量作坐标，构成七维欧几里德空间。火箭的每一状态与此空间的一个点对应。此空间称为火箭的状态空间。与时间 t 的连续变化对应，火箭的不同状态在状态空间中描出一条曲线，称为状态轨线，或简称轨线。状态空间与火箭的实际运动空间是不同的，状态轨线与火箭的实际运动轨迹也是完全不同的概念。

在上列微分方程组中，火箭的推力由其大小 u^1 和方向余弦 $\cos u^2$，$\cos u^3$，$\cos u^4$ 共同表示。u^1，u^2，u^3，u^4 可由我们根据要实现的目的来确定。让这些量按一定规律变化，则在给定 x^1，x^2，…，x^7 的边值后，上列微分方程组有确定的解，即火箭有确定的运动。可见，状态变量 $x^1,\cdots,x^7$ 随 u^1，…，u^4 变化。我们通过 u^1，…，u^4 来控制火箭的运动。u^1，…，u^4 称为控制参数，或简称控制。

我们不能随意让 u^1，…，u^4 取值，而必须考虑技术条件的限制和要求。例如，u^1，…，u^4 可能应满足下列关系式：

$$0\leqslant u^1\leqslant C\quad (C=\text{const.}>0),$$

$$0\leqslant u^i\leqslant \pi\quad (i=2,3,4),$$

$$\cos^2 u^2+\cos^2 u^3+\cos^2 u^4=1,$$

其中第一式表示推力的大小总是正的，并且有个上限；后二式为方向角和方向余弦应满足的几何条件。这些关系式一起，在以 u^1，u^2，u^3，u^4 为坐标的欧几里德空间中构成一个区域 U，控制 (u^1, u^2, u^3, u^4) 只能在这个区域取值，该区域叫做控制域。

我们研究火箭在时间间隔 $[t_0,t_1]$ 上的运动，t_0 为初瞬时，t_1 为末瞬时（它们可能不固定）。设我们要用火箭

击中某固定目标，则在末瞬时火箭的状态变量应满足下列条件：

$$x^1(t_1)=C^1,\ x^2(t_1)=C^2,\ x^3(t_1)=C^3,$$

其中C^1，C^2，C^3为三个已知常数。这三个等式在状态空间中构成一个点集，称为目标集。我们的目的是要使火箭的状态由给定的初状态过渡到目标集中任一点所代表的末状态。在具体问题中，由于目的不同，目标集也是各式各样的。

上面我们设初瞬时火箭的状态给定，对应于状态空间中一个确定点。在有的问题中，初状态不是一个确定点，只要是状态空间中某给定点集中任一点即可。这个点集可以称为初态集。

我们靠选择控制来使火箭的状态由初状态过渡到末状态。我们不讨论实现此目的的控制是否存在，只假定它存在，并且还可能很多。也就是说，可以用许多种方法来实现我们的目的。那么，怎样选择最好的方法，即怎样选择最优的控制呢？首先必须说明，怎样才算最优。也就是说，必须有一个指标用来评价控制的性能（控制的好坏）。这个指标，根据问题的要求事先给定。比如，以火箭燃料消耗为控制的性能指标，则使燃料消耗为最小的控制就是最优控制。燃料消耗可用下列积分表示：

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_1} f^0(u^1)\,dt.$$

于是，我们的任务是：从能实现使火箭的状态由初态集中一点过渡到目标集中一点的所有控制中，寻求出能使$J(u)$取极小值的控制。

§1-2 受控系统的状态矢量和容许控制

所谓受控系统，指的是某一研究对象，它在任一瞬时 t 的状态由 n 个函数 $x^1(t)$，…，$x^n(t)$ 来表示，并且它的状态受某些函数 $u^1(t)$，…，$u^r(t)$ 的影响。我们只研究受控系统在初瞬时 t_0 到末瞬时 t_1 这段区间上的运动。上述各函数均定义在区间 $[t_0, t_1]$ 上。引入矢量函数：

$$x(t)=\begin{pmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix}, \qquad u(t)=\begin{pmatrix} u^1(t) \\ \vdots \\ u^r(t) \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

$x(t)$ 称为受控系统的状态矢量，$x(t)$ 的分量称为状态坐标。以 x^1，…，x^n 为坐标轴的欧几里德空间称为受控系统的状态空间。以 X 表示状态空间。点 x 称为映象点。受控系统运动过程中，$x(t)$ 随时间 t 变化，映象点在状态空间中描出一条曲线。该曲线称为受控系统的状态轨线，简称轨线。系统的实际运动与其映象点在状态空间中沿轨线运动相对应。

$u(t)$ 为控制矢量，简称控制。$u(t)$ 的分量 $u^1(t)$，…，$u^r(t)$ 称为控制参量。我们靠 $u(t)$ 来对受控系统施加影响，即靠 $u(t)$ 来控制受控系统的运动。因此，很自然地将 $u(t)$ 称为系统的输入。

通常，$u(t)$ 不能任意取值，而受到某些限制。例如，设控制参量 $u^1(t)$ 代表受控系统上“舵”的位置，则由于具体结构限制，$u^1(t)$ 应满足条件

$$\alpha \leqslant u^1(t) \leqslant \beta,$$

其中 α 及 β 为二常数，分别代表“舵”的两个边界位置。当

以电流强度、电压、温度、速度等作控制参量时，情况也很类似。

一般情况下，设在以 $u^1,\cdots,u^r$ 为坐标的 r 维欧几里德空间中给定了某点集 U，它称为控制域。对任一瞬时 t，控制 u 只能在控制域 U 上取值，即对任一瞬时 t，$u(t)\in U$ 成立。这可写为：

$$\forall t\in[t_0,\ t_1]:\ u(t)\in U$$

或

$$u(t)\in U\quad(\forall t\in[t_0,\ t_1]).$$

上二式中，符号 $\forall$ 表示“对于一切”，“对于任一个”。

应用上很重要的情况是 U 为有界闭集的情况。此时，$u(t)$ 也可在 U 的边界上取值，这对应于控制参量达到边界值。

控制 u 的重要特征是“无惯性”，也就是说，受控系统的舵可在一瞬间由一个位置转到另一位置。例如，继电器的动作基本上是这样的。“无惯性”对应于 u^1，…，u^r 的跳跃变化，所以我们采用分段连续函数作为 $u^1(t)$，…，$u^r(t)$。无惯性的假设是合理的。比如，设 u^1 代表“舵”的角位置，而此“舵”有惯性，则

$$\frac{du^1}{dt}=v^1$$

为“舵”的角速度，它的惯性就小得多。我们可以不用 u^1 作控制参量，而将它作为状态坐标，改用 v^1 作为控制参量。把 v^1 看成“无惯性”的，可能就已具备了足够的精度。可见，只要适当选择控制参量，“无惯性”的假设是合理的。

归纳起来说，控制 $u(t)$ 应满足以下条件：

（1） $u(t)\in U(\forall t\in[t_0,\ t_1])$；

（2） $u(t)$ 为定义在区间 $[t_0, t_1]$ 上的分段连续矢函数，即每个 $u^i(t)$，$i=1, \cdots, r$，都是分段连续函数；并且间断点个数有限；在间断点左右，$u^i(t)$ 的值是有界的。在间断点上，$u^i(t)$ 的值无关紧要。

满足以上条件的控制称为容许控制。

§1-3 运 动 方 程

受控系统的运动由下列常微分方程组描述：

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = f^1(x^1, \cdots, x^n, u^1, \cdots, u^r), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \dfrac{dx^n}{dt} = f^n(x^1, \cdots, x^n, u^1, \cdots, u^r), \end{cases} \tag{1.2}$$

式中 $f^i(x^1, \cdots, x^n, u^1, \cdots, u^r)$，$i=1, \cdots, n$，或简写为 $f^i(x, u)$，为定义在 $X\times U$ 上的连续函数，其偏导数 $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ $(i, j=1, \cdots, n)$ 存在且连续，此处 $X\times U$ 为由一切可能的 (x, u)，其中 $x\in X$，$u\in U$，所构成的集。设

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} f^1(x, u) \\ \vdots \\ f^n(x, u) \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

微分方程组 (1.2) 可写成矢量形式如下

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u). \tag{1.2a}$$

方程(1.2)或其简写形式 (1.2a) 称为受控系统的运动方程。