

科學圖書大庫

三角學

複習手冊

譯者 嚴夢輝

校閱者 郭從古

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

三角學

複習手冊

譯者 嚴夢輝

校閱者 郭從古

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

科學圖書大庫

版權所有

不許翻印

中華民國六十八年三月二十日再版

三角學

複習手冊

基本定價 1.80

譯者 嚴夢輝 電子學校專科部教官

校閱者 郭從古 中央研究院數學研究所專任編纂

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686號

發行者 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第15795號

承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話 9719739

原 序

本書是對見之於高中和大專教材中的傳統三角學的一項複習。因為銳角三角函數是整個三角學基本概念之所繫，所以講解的很詳細；此外，並複習各特別角的函數（ $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ，象限角及應注意的限制）。比例插值法的用法，通常多「語焉不詳」，本書則作澈底論述。由於解三角形多半依賴對數表的插值，這項題材的熟練，當可使讀者獲致有用的技能。最後一章的圓函數，強調三角函數與圓函數之間的相互關係，可為研讀微積分學奠立基礎。

本書之編纂雖然不是為了用作教本，但因所提供的要點頗有助於深入研究三角學及其他使用三角學的數學課程，所以本書對準備攻讀近代三角，微積分，及大專一般數學的讀者，實有特殊的價值。本書適於高中三年級或大專一年級作為三角學的基本

Handwritten signature or mark at the bottom left.

複習。讀者如學過二年的高中代數和一些幾何，即可順利研讀本書。

致讀者

程序教材的內容係出之以問答方式。讀者每研讀一條題材時，即應對它作答，然後再研讀下一條題材。對大部份學生來說，做出每一項目的正確答案，命中率是很高的。學生和教師都應時刻記着學習順序的重要性。細心閱讀並解答每一欄，把所得的答案和書中的答案加以比較。如由學生自己寫出「問題欄」的答案，那就是相當可靠的主動反應了。

程序教材的結構，可加強教師和學生對教材作有系統的運用。一般而言，新的題材都是編在一組組的「概念欄」裡，每一組「概念欄」之後，接着便有一個或幾個考核欄，以測驗讀者是否已經接受了這一概念。欄號的上下方均加有橫線者即為考核欄，例如47即是。如有學生做錯了某一考核欄，最好要他重新研讀這欄以前的那一組「概念欄」；但若對考核欄作答正確，他便可繼續研讀下一組的各欄。每章開始時都有一個章前測驗，可以顯出學生的個別弱點。每章結束時則有一個章後測驗，以測驗學生對該章題材學習的心得。如學生的錯誤，超過章後測驗說明中規定的最大限度，那麼他必須重新複習。複習時應依下列各點按部就班地去做：

(a)研讀並解答需要複習的那一部份程序教材中的每一考核欄。

(b)對某一考核欄如作答錯誤，應重新研讀這欄以

前的那些「概念欄」。

如學生對程序教材使用得當，並依上述的指示去複習，那麼他會發覺這是一個很有效的學習辦法。

教材評價

數學程序教材的評價方法，在某些方面來說，與標準教本大致相同，但其中仍有若干重要的差異存在。下面的建議也許在評價時有所幫助：

施教對象，數學的水準和取材 以本書來說，施教對象及數學水準和取材，可由澈底審查(a)目次，(b)考核欄，(c)自我（章前）測驗，(d)總成效（章後）測驗等四項作最有效的評估。由於材料的有系統結構和編排，我們以這四點作為評價的基礎所得的準確性，將與披閱全書的結果非常接近。

程序教材的取材和效果 程序教材有效學習的標準如何，雖然還有爭論，但成效測驗的資料，似乎是學生學習心得的合理證據。本書第三次修訂稿曾由65個學生參加試驗，成效測驗的平均得分及解答錯誤的平均百分比如下：

	章前測驗	章後測驗	平均錯誤率
	平均得分	平均得分	
甲組	41%	82%	8.2%
乙組	32.6%	79.8%	6.4%

甲組是由某社區學院的31個一年級學生組成。兩組學生都曾在高中學過一些三角並修讀大學「基礎」數學的課程。本書且曾用作大專數學的先修複習教材。

除自我測驗及終了測驗以外，完成本書所需的時間，一般學生約為11至15小時。上述甲組學生的平均時間是13.7小時，乙組學生的平均時間是12.4小時。

致 謝

本書原稿的整理和編輯，曾蒙Mary Haupt Smith小姐協助，除此之外，她在Myra McFadden小姐的幫忙之下，還準備了圓函數這一章的大部份材料。作者和程序教材的編者們對於她們玉成本書所作的貢獻，謹致深切的謝意。

霍 偉 廉
(William Hauck)

目次

原序	v
第一章 三角函數	1
1 至 84 欄	
第二章 查表和插值	37
85 至 143 欄	
第三章 直角三角形解法	63
144 至 182 欄	
第四章 恒等式	85
183 至 210 欄	
第五章 非銳角函數	103
211 至 253 欄	
第六章 徑的度量	121
254 至 276 欄	
第七章 正弦定律	131
277 至 342 欄	
第八章 圓函數	173
343 至 404 欄	
附錄	197
輔助資料	205
索引	229
考核欄	
16, 22, 33, 47, 57, 68, 79, 93, 99, 103, 124,	
142, 165, 173, 176, 181, 196, 205, 230, 238,	
250, 267, 290, 299, 303, 309, 312, 336, 361,	
366, 375, 382, 387, 400.	

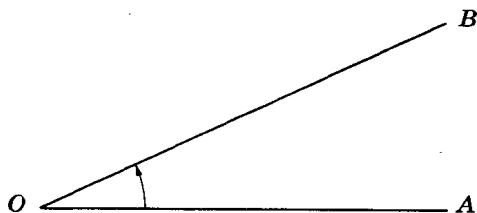
第一章

三角函數

三角這門數學，主要是藉幾何的圖形，處理角與距離的度量問題。雖然假定你已學過幾何，但在未研讀本程序教材之前，我們還是要給你溫習一下若干與角和三角形有關的簡單概念。

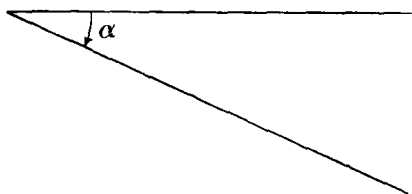
角

在幾何中，角常定義為自同一點作二直線而構成的圖形。角的更一般的概念包括一直線繞一點旋轉：



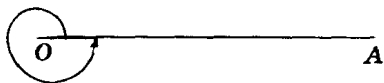
上圖的角，是 OA 線繞 O 點作逆時針旋轉至所示的 OB 位置而成。構成此角的 O 為頂點，亦即旋轉時

所繞的點，凡用三個字母來命名的角，中間的字母始終表示頂點；因此上面形成的角，稱為 AOB 角。一個角常用一個單獨希臘字母來表示：

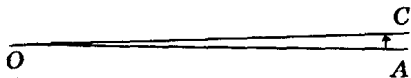


由 AOB 角及 α 角可以看出來，一角可用逆時針或順時針的方向旋轉而產生。

由一周轉（revolution）所構成的角是這樣的：

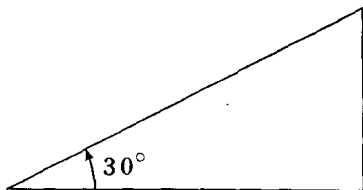


一度的角，是由旋轉一周轉的 $\frac{1}{360}$ 構成：



$$1 \text{ 度} = \frac{1}{360} \text{ 周轉}$$

度是角的度量單位，用符號 $^{\circ}$ 來表示。例如三十度的角，寫成 30° ，它是 1° 角的三十倍，或一周轉的 $\frac{1}{12}$ ：



度可以再分成「分」和「秒」：

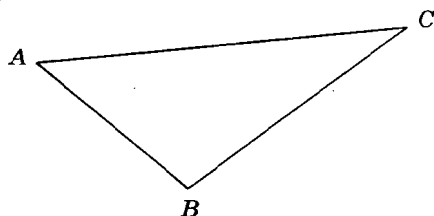
1 度 = 60 分

1 分 = 60 秒

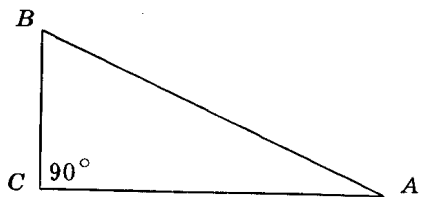
五十度四分十秒的角，寫成 $50^{\circ}4'10''$ ，一直角是一個含有 90° 的角。

三角形

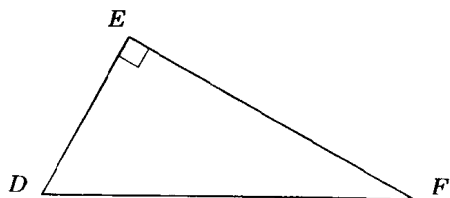
三角形可定義為恰好由三根直線構成的一個平面封閉圖形：



三角形的各邊可具有任何長度。用以命名一個三角形的字母，常按英文字母的順序來書寫，因此上述三角形稱為三角形 ABC 。直角三角形是含有一個直角的三角形：



直角可用符號 $\sphericalangle$ 來表示。下圖中的 E 角是一個直角：



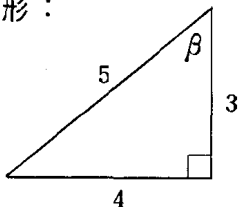
三角形 DEF 是一個直角三角形。

角和三角形乃研討三角函數的基本要素，也是本章講述的主題。每一角都有六個三角函數。第一章研讀完畢後，你應該能寫出這六個函數，並且能夠指出它們間的關係。

章前測驗

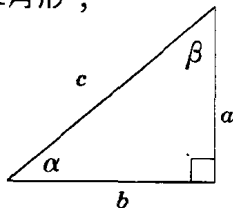
在未開始進行本章的程序教材之前，請先做這一測驗，看看你對三角函數已經了解到什麼情況。做完測驗後，用附錄甲來核對你的答案。本測驗的每一項，都與程序教材的某些欄相關，相關的欄號已列在附錄甲中各答案的後面。讀者如有某項做錯，應特別注意與該錯誤有關的欄中的講解。

1. 已知下列三角形：



用分數的形式，寫出 β 角的全部三角函數。

2. 試就圖示之三角形，



用 a, b, c 作答：

a. $\tan \beta \cdot \cot \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$

b. $\tan^2 \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$

c. $\frac{1}{\sec \beta} = \underline{\hspace{2cm}}$

第一部份

常用的三角函數有兩個，一是正弦，另一是餘弦。學會計算這兩個函數，其他四個函數便能運用自如了。不管一角的邊長如何，這角的三角函數都是相同的。計算這些函數時，畢達哥拉斯定理很有用。

注意：參考輔助資料甲，解答第 1 至 7 欄。

1 研考三角形 ABG . 30° 角的對邊是 _____。

BG

2 三角形 ABG 的斜邊是 _____。

AG

3 在三角形 ABG 中，斜邊不算，和 30° 角相鄰的邊是 _____。

AB

4 寫出三角形 ACF 的下列各邊：

- | | |
|----------|---------------------|
| (1) AC | (1) 30° 角的鄰邊 |
| (2) AF | (2) 斜邊 |
| (3) CF | (3) 30° 角的對邊 |
-

5 研考三角形 ADE .

- (1) AD 邊是 30° 角的 _____ 邊。
 (2) AE 邊是該三角形的 _____ 邊。
 (3) DE 邊是 30° 角的 _____ 邊。
- (1) 鄰
 (2) 斜
 (3) 對

6 研考三角形 ABG 及比率 30° 的對邊

斜邊

此比率可以求之如下：

$$\frac{30^\circ \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{15 \text{ 單位}}{30 \text{ 單位}} = \frac{1}{2}, \text{ 或 } .5$$

試求下列各三角形的同樣的比率：

- (1)
- ACF
- (2)
- ADE

(1) $\frac{1}{2}$ 或 .5(2) $\frac{1}{2}$ 或 .5

7 不論這直角三角形各邊的長度如何，比率

 30° 的對邊

斜邊

必等於 .5. 這一比率定義為 30° 角的正弦 (sine, 讀音 sain)。任何 30° 角的 _____ 都是 .5.

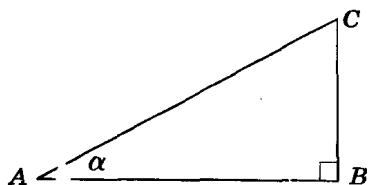
正弦 (簡寫 sin)

$$8 \quad \sin 30^\circ = \frac{30^\circ \text{的對邊}}{\text{斜邊}}$$

30° 角的對邊和斜邊都是一個 _____ 三角形的邊。

直角

9 任何一定角的正弦都是某一定的常數。



$$\sin \alpha = \frac{\alpha \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{(1) \quad}{(2) \quad}$$

(1) BC

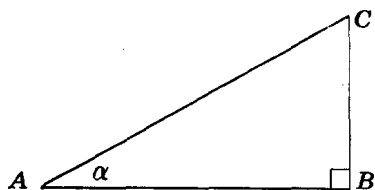
(2) AC

用字母命名各邊作答。

10 已知：AB = 10

$$BC = 7$$

$$AC = 12.2$$

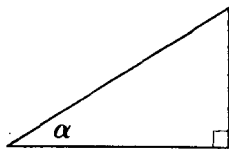


$$\sin \alpha = \frac{\alpha \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}}$$

求 α 的正弦精確至百分之一。

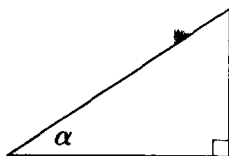
$$\sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

11

 α 的對邊

$$\sin \alpha = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$$

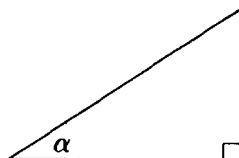
12



斜邊

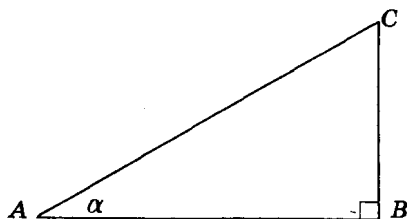
$$\sin \alpha = \frac{\alpha \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}}$$

13

 $\sin \alpha$

$$= \frac{\alpha \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}}$$

14

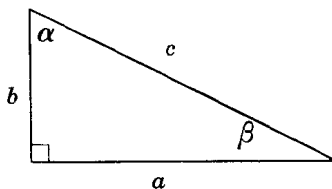


$$\sin \alpha = \frac{\alpha \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}}$$

直角

三角形 ABC 是一個 _____ 三角形。

15



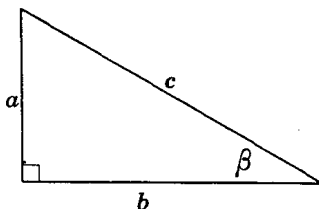
$$\sin \alpha = \frac{\alpha \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}}$$

如 $a = 12$, $b = 4$, 及 $c = 12.6$, 試計算 $\sin \alpha$ 精確至百分之一。

.95

$$\sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

16



(1) $\sin \beta = \underline{\hspace{2cm}}$

用文字寫出一個比率。

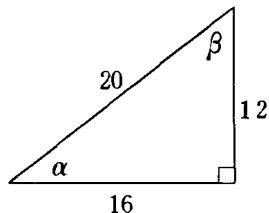
(1) $\frac{\beta \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}}$

(2) $\sin \beta = \underline{\hspace{2cm}}$

用三角形的各邊寫出一個比率。

(2) $\frac{a}{c}$

17



求下列各函數值：

(1) $\frac{3}{5}$ 或 .6

(1) $\sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\frac{4}{5}$ 或 .8

(2) $\sin \beta = \underline{\hspace{2cm}}$