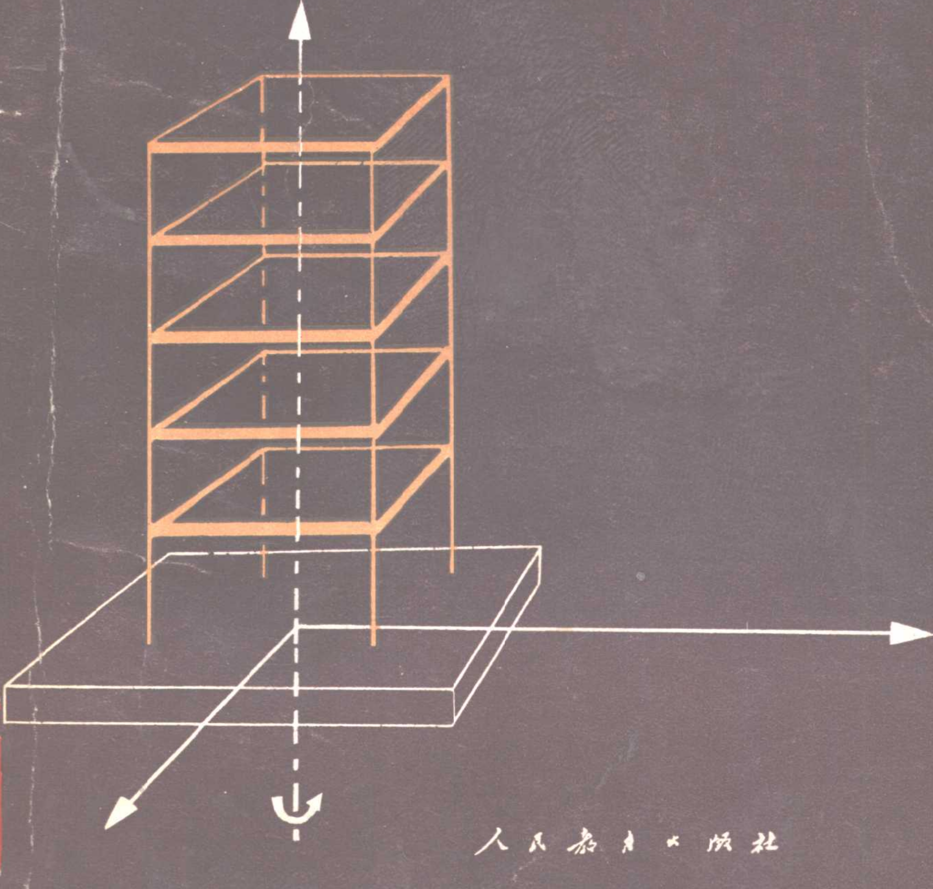
应用分析动力学

王光远　编著



人民教育出版社

应用分析动力学

王光远　编著

人民教育出版社

内 容 提 要

本书以分析力学的方法阐明结构振动的基本理论。书中第一篇讲述与结构振动有关的分析力学知识，着重讨论虚功原理、Lagrange 方程和 Hamilton 原理的理论概念和应用方法。第二篇应用第一篇讲述的理论研究保守系、滞变（复）阻尼体系和非耦联（修正）粘滞阻尼体系微幅振动的基本规律。书中还利用相对运动的理论阐述了地运动对结构的干扰的计算方法。本书可以作为高等学校力学和工程结构类专业研究生的教材，也可供有关专业高年级学生、大学教师、工程技术和科研人员参考。

本书责任编辑　余美茵

应用分析动力学

王光远　编著

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 8.75　字数 205,000

1981 年 6 月第 1 版　1982 年 8 月第 2 次印刷

印数 7,501—11,500

书号 15012·0338　　定价 0.88 元

前　言

本书是在一九七九年在重庆举办的结构力学讲习会所用讲义的基础上修订而成的，它也是笔者给研究生开设的结构动力学课程的基本理论部分。

在教学中用一般结构力学的方法讲授结构振动理论，对所研究的对象和推导出的计算公式往往有一定的局限性，甚至有些理论用结构力学的方法是很难证明的。例如，在一般结构动力学中，用 Rayleigh 能量法求出的频率的近似值都大于其精确值，并用相当于有附加约束来予以解释。实际上，这个概念是很不完整的，它只对求基本频率有效，用能量法求出的高振型的频率既可能大于也可能小于其精确值，而用能量法求出的最高振型的频率反而必然小于其精确值(参阅本书§6.6)。

用分析力学的方法可以较严格地阐明有限自由度体系振动的普遍规律和计算方法，而且所得规律可推广于无限自由度体系。这是它的很大的优点。但是它也有缺点，那就是由于它所研究的对象具有普遍性，因而也就比较抽象，物理概念也不那么直接。与此相反，由于用结构力学方法研究的对象比较简单(往往只研究每个质点仅具有一个位移方向的体系)，因而具有形象鲜明，概念清楚的优点。

所以，对初学者来说，讲授结构振动理论，用结构力学的方法较为合适，而在提高性的课程中则可采用分析力学的方法。

在编著本书时，特别注意克服采用分析力学方法时的上述缺点，在理论阐述和所给的例题和习题中尽可能较形象地给出较明

确的物理概念。

本书共分两篇。第一篇介绍分析力学的基本知识，着重阐述虚功原理、Lagrange 方程和 Hamilton 原理。第二篇讲述有限自由度体系的振动理论，全部利用虚功原理和 Lagrange 方程进行推导。

在编写第一篇时，虽然着重于工程力学上的应用，但对有关定义、定理和概念也力争尽可能地阐述得比较严格。看来，在严格性方面，即使对某些非常经典的内容，也还有值得商榷的余地。例如，功的定义是最古典和最常用的概念之一，但按照一般的功的定义，在研究摩擦力所作功的计算方法时，往往造成概念上的混乱。在§1.4 中我们将介绍我国已故学者孟昭礼教授关于功的定义的精辟见解。再如，有些著作在介绍质点系的虚功原理时，常常由于疏忽而把体系原处于静止状态这个初始条件遗漏，简单地把满足虚功方程(主动力在任意虚位移上所作元功之和等于零)作为质点系平衡的必要和充分条件。实际上，离开了上述的初始条件，原理将失去其充分性。也就是说，满足虚功方程的并不只是平衡体系。例如，非自由质点系的惯性运动(自然运动)，由于所有主动力均等于零，显然满足虚功方程，但体系并不处于平衡状态。在§2.6 中我们将讨论在非零初速度条件下，虚功方程的适用范围，并提出质点系"广义自然运动"的概念和相应的"广义虚功原理"。又如，关于连续变形体的虚功原理，目前出现了一些与过去不同的陈述方法，这牵涉到对连续体虚功原理的物理实质的认识问题，也与质点系虚功原理有联系。因此，虽然它不属于分析力学的范围，但为了能全面地认识这个极为重要的力学基本原理，在§2.7 中，我们讨论了这个问题，介绍了孟昭礼和 Wilbur 对这个问题的见解，并补充了原理充分性的证明。

在第二篇中，介绍了保守系微幅振动的基本性质，并用

Lagrange 方程推导了滞变(复)阻尼体系和非耦联(修正)粘滞阻尼体系振动的规律和计算方法。研究对象主要是任意有限自由度体系，包括附有刚性质量块的体系和用有限元法计算具有分布质量的弹性体系。而将一般结构动力学中的研究对象(其特点是质量方阵为对角阵)只当作一种特例看待。工程结构所受的动力干扰，除外力外，还有地基运动对结构的作用。由于这是一种典型的相对运动问题，所以在第九章中，我们没有采用一般常用的方法，而是直接利用相对运动的理论来阐述地基运动干扰的计算方法，包括地面大幅振动的情况。这样，不仅扩大了研究的范围，而且概念更为直接、更为清晰，方法也更为简便。

本书与拙著《建筑结构的振动》相比，本书着重于基本理论和基本计算方法，而后者则着重于各种工程结构的具体应用；本书着重于有限自由度体系，而后者着重于无限自由度体系；本书采用分析力学的方法，而后者采用结构力学的方法。所以二者基本上不相互重复。

本书承钱令希同志审阅，并提出宝贵意见。在编写过程中，还得到严宗达、何钟怡、邓秀泰、张凯、钟宏九等同志的帮助，特此一并致谢。

本书在教学过程中，虽经几次修改，但由于编者水平所限，不妥之处在所难免，希望读者批评指正。

王光远

一九八一年五月

目　　录

第一篇　分析力学基础

第一章　基本概念

§1.1　引　　言

力学原理是从人类总的经验中总结概括和抽象出来的，因而具有充分的普遍性。同时，它还将受到未来一切实践的检验。这些原理构成了力学这门学科的基础，亦即其他命题都可以作为原理的逻辑推论而得出。

在力学中有很多命题都可以作为原理。这些原理可以相互沟通，也就是说，从一个原理可以推导出其余的原理。在很多情况下，被推出的原理和作为出发点的原理具有相同的应用范围，这时可以认为它们等价。但不同的原理具有不同的表达形式，因而在不同场合下应用时的方便程度就有所不同。

牛顿定律是力学原理，因而所有其余的力学原理都可以从牛顿定律导出。在本篇中，我们将从牛顿定律出发推出其他几个在结构动力学中常用的原理。

力学原理可以分为**微分形式**和**积分形式**两种，前者适用于运动的每一瞬时，而后者适用于运动的非无限短的任何时段。

力学原理又可以分为**变分原理**和**非变分原理**两类。非变分原理描述所有真实运动的公共性质。变分原理提供一种准则，把真实运动与在同样条件下运动学上可能的其他运动区分开来。

因此，力学原理可分类如下：

$$\text{力学原理}\begin{cases}\text{微分的}\begin{cases}\text{非变分的(如牛顿定律)}\\\text{变分的(如虚功原理)}\end{cases}\\\text{积分的}\begin{cases}\text{非变分的(如能量守恒)}\\\text{变分的(如哈密尔顿原理)}\end{cases}\end{cases}$$

分析力学的主要内容是：(1) 以变分原理为基础阐述力学的普遍规律;(2) 由普遍规律推导运动的基本微分方程;(3) 研究这些微分方程的性质及其积分方法。

在分析力学中主要研究质点系的运动规律。所得结论一般均可直接推广到任何机械体系。但在个别情况下，推广应用于变形连续体时，由于力学模型不同，有些量(如虚功原理中的内力总功)将具有不同的物理含义 (参见 § 2.7)。由于刚体的各部分间没有相对位移，因而可以把它们看作由刚性系杆连接而成的几何不可变的质点系。

分析力学是个内容非常丰富的学科(参看文献[1]—[4])。在本篇中将只介绍研究结构振动时常用的一些原理和方法，重点讨论虚功原理、Lagrange 方程和 Hamilton 原理。

§ 1.2 约束及其分类

在研究一个质点系的运动时，首先必须规定一个基础坐标系，也就是说必须指明运动与什么坐标系相关联。在工程问题中，可以不考虑地球的运动，这时可以认为基础坐标系与地球固结在一起。直接与基础坐标系相关联的运动称为“绝对运动”。

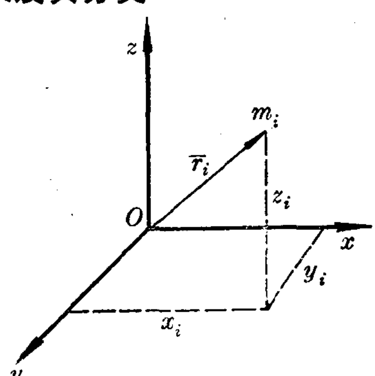


图 1-1

质点系中任何一个质点 m_i 的位置可以用图 1-1 所示半径向

量 $\bar{r}_i$ 来表示，也可以用直角坐标(x_i, y_i, z_i)来表示。

如果质点系的每一个质点都可以相对于基础坐标系在各方向自由运动则称为自由质点系，或简称为自由系，否则称为非自由系。

对非自由系各质点的位置和速度所加的几何的或运动学的限制称为"约束"。设有N个质点所组成的非自由系，每个约束都使这N个质点的位置和速度受到某种限制，也就是使这些变量满足某种函数关系。因此，在最一般情况下每个约束所起的作用均可解析地用"约束方程"表示如下：

$$f(t, \bar{r}_1, \cdots, \bar{r}_N, \dot{\bar{r}}_1, \cdots, \dot{\bar{r}}_N)=0 \tag{1-1}$$

式中 t 为时间，$\bar{r}_i$ 为质点 m_i 的半径向量(图 1-1)，$\dot{\bar{r}}_i$ 为 m_i 的速度。为简便计，上式所表明的这种关系式(约束方程)可简写为

$$f(t, \bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i)=0 \tag{1-2}$$

今后我们常用这种简化表示方法。用直角坐标时可表示为

$$f(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)=0 \tag{1-3}$$

以上三种表示方式所代表的意义是相同的。

各种约束主要可以按以下三种情况来分类：

(1) 约束可以按约束方程中不显含 t 和显含 t 而分为**稳定约束**(或固定约束)**和非稳定约束**(或非固定约束)。

稳定约束不随时间而改变，其约束方程为

$$f(\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i)=0 \tag{1-4}$$

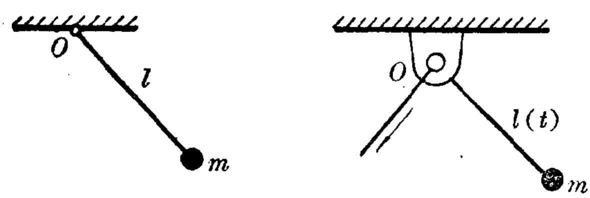
例如图 1-2a 中，若质点m由无重刚杆铰联于支座O，则其约束方程为

$$r=l \qquad 即 \quad r-l=0$$

或 $$x^2+y^2+z^2-l^2=0$$

与时间无关，所以是稳定约束。

非稳定约束随时间而改变，其约束方程为



(a)　　(b)

图　1-2

$$f(t, \bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i)=0 \tag{1-5}$$

例如，图 1-2b 中联结质点m的无重柔索穿过O点的环而运动时，长度 l 随时间变化，约束方程中显含 t，因而是非稳定约束。再如，当图 1-2a 的地基在运动时，约束方程中也将显含 t，从而变为非稳定约束。

只有稳定约束的质点系称为稳定系，否则称为非稳定系。

（2）约束还可以分为完整约束和非完整约束。**完整约束**的约束方程中不包含坐标对时间的导数，即其约束方程为

$$f(t, \bar{r}_i)=0 \tag{1-6}$$

非完整约束的约束方程中包含有坐标对时间的导数，即其约束方程为

$$f(t, \bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i)=0 \tag{1-7}$$

只限制体系中质点的位置而不限制其速度的约束称为**几何约束**，其约束方程具有式（1-6）的形式。因而几何约束是一种完整约束。

不仅限制质点的位置，而且还限制其速度的约束称为**运动约束**。显然其约束方程具有式(1-7) 的形式。但是这种约束又可分为两类。一类是其约束方程可以直接通过对其本身的积分（不借助于动力学方程）而转化为式(1-6)的形式。从这个意义来说，这种约束既是运动约束，又具有几何约束的性质，所以把它也归于完

整约束。不能完成上述积分的运动约束称为非完整约束。

总之，几何约束和其约束微分方程可以直接积分成有限形式的运动约束统称为完整约束，而其约束微分方程不能直接积分成有限形式的运动约束称为非完整约束。

完整约束又称为有限约束，非完整约束又称为微分约束。

例如图 1-3 中的刚性圆盘沿水平面运动。则盘心 C 到水平面的距离不变，即存在约束条件

$$Z_C=a$$

这是一个几何约束。如果水平面绝对光滑，则对此圆盘只有这样一个约束。如果水平面摩擦力很大，圆盘只能滚动而不能滑动，则除了上述约束外，还有一个运动约束，即圆盘与水平面的接触点 A 的速度必须等于零。其约束方程为

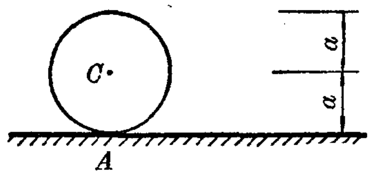


图 1-3

$$v_A=\dot{x}_C-a\dot{\varphi}=0$$

式中 $\dot{x}_C$ 为盘心 C 点的速度，$\dot{\varphi}$ 为圆盘的转速。这个微分方程显然可积分成

$$x_C=a\varphi$$

式中 x_C 和 φ 为决定圆盘位置的两个坐标。这个约束方程具有式(1-6)的形式，因而按定义这个运动约束是个完整约束。

以上例子只具有两个完整约束。如果将图 1-3 中的圆盘改为圆柱，此结论仍然不变。

但是，如果图 1-3 代表一个刚性圆球沿粗糙水平面滚动，则情况将有很大不同。这时圆球受到一个几何约束 $Z_C=a$ 外，还有两个运动约束，即接触点 A 的速度的两个水平分量均等于零。可以证明[2]，这两个运动约束的约束微分方程不能积分成有限形式，因而它们是非完整约束。

只有完整约束的质点系称为完整系，否则称为非完整系。

(3) 约束还可以分为**单向约束**(可解约束)及**双向约束**。双向约束的约束方程为等式，而单向约束的约束方程为不等式。

例如，如果图 1-2a 中联接质点 m 的是无重刚杆，则约束方程为 $r=l$，是双向约束；如果联接质点 m 的是无重柔索，则约束方程为 $r\leqslant l$，是单向约束。对于此例，当等号成立时与双向约束相同，当 $r<l$ 时与无约束相同。

在工程力学中绝大多数情况下我们所遇到的都是完整的和双向的约束。今后我们所研究的问题就只具有这种约束；此外如果不特别加以说明，我们所研究的约束还将是稳定的，这时质点系的约束方程将为

$$f_k(\bar{r}_i)=0 \qquad (k=1, 2, \cdots, M) \tag{1-8}$$

即

$$f_k(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots, \bar{r}_N)=0 \qquad (k=1, 2, \cdots, M) \tag{1-9}$$

式中 N 为质点数，M 为约束数。

在下节中我们还将结合自由度的定义进一步讨论有关约束的一些概念。

§1.3 自由度与广义坐标

在研究非自由质点系的运动时，用直角坐标来表明各质点的位置有一个很大的缺点，就是由于约束的存在使得这些坐标值不是独立的变量，而且不需要这些坐标值的全部即可决定所有质点的位置。以图 1-4 所示双质点系为例，两杆均为无重刚杆，设此体

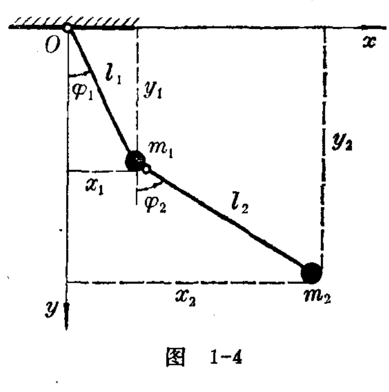


图 1-4

系只能在 xOy 平面中运动。由于两根刚杆所起的约束作用，质点 m_1 和 m_2 的直角坐标 x_1, y_1 和 x_2, y_2 之间必须满足两个约束方程

$$x_1^2+y_1^2=l_1^2$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l_2^2$$

由此两方程可以消去两个坐标，因而只有两个可以独立改变的几何参数。

定义　能决定体系几何位置的彼此独立的量称为该体系的广义坐标。其主要特点是各自能独立变化，所以亦称为“**独立坐标**”。

显然，在一般情况下，如果体系有 N 个质点($m_1, m_2, \cdots, m_N$)，具有 k_1 个完整约束，则广义坐标的个数 n 为

$$n=3N-k_1 \tag{1-10}$$

这是因为每一个完整约束可以在 $3N$ 个直角坐标(x_i, y_i, z_i) 中消去一个可以独立改变的坐标。图 1-4 因为是平面运动，所以其广义坐标的个数

$$n=2N-k_1=2\times2-2=2$$

注意在确定广义坐标的个数 n 时，式(1-10)中的 k_1 是完整约束的数目，不包括非完整约束，因为后者与体系的几何位置不发生直接关系。例如图 1-3 所示圆球，完整约束 $Z_C=a$ 消去了一个可以独立改变的坐标，但粗糙面对圆球的两个非完整约束只在某瞬间限制接触点的速度，而不能减少可以独立改变的几何参数。所以，不管平面光滑与否，能确定圆球几何位置的独立参数都是 $n=5$ 个，即球心 C 的两个线位移和球绕 C 点的三个角位移。

一个体系的广义坐标可以有不同的选择方法。例如对于图 1-4 所示体系，可以选择(x_1, x_2)为广义坐标，同样也可以选择 (y_1, y_2)、(x_1, y_2)、(x_2, y_1)或(φ_1, φ_2)为广义坐标，但是不能选择(x_1, y_1)或 (x_2, y_2) 为广义坐标。这是因为它们不是相互独立的参数。广义坐标的选择主要根据我们解题的方便来决定。

广义坐标的量纲并不必须为长度，也可以是角度（如上例的φ_1和φ_2），甚至可以是面积或体积。例如有一个任意形状的匀质的各向同性弹性体，表面受到均布的法向压力。在此压力作用下物体形状不变，只有体积的变化。因此，如果该物体的任一体积元在空间被固定，则各质点的位置都只决定于该物体的体积。这样就可以把体积作为该物体唯一的广义坐标。

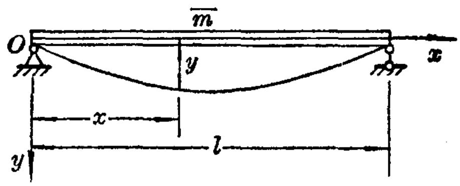


图 1-5

再以图 1-5 所示简支梁为例。如梁截面的尺寸远小于其长度，则可近似地把梁看作一个一维的体系。如果此梁只能在 xOy 平面内运动，则此梁的全部位置可用各截面的位移 $y(x)$ 来表明。因此，它有无限多个广义坐标。但是相邻截面的挠度必须是连续的，它们不是可以独立改变的量，所以不能直接用挠度作为广义坐标。可是我们知道梁的挠度曲线也可以用三角级数

$$y(x)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j\sin\frac{j\pi x}{l} \tag{1-11}$$

来表明，其中 $a_j(j=1, 2, \cdots)$是可以独立改变的参数。因此，可以选择 $a_j(j=1, 2, \cdots)$作为此梁的广义坐标。这里应注意到，梁的挠度 $y(x)$和广义坐标 $a_j(j=1, 2, \cdots, \infty)$虽然都包含无限多个量，但前者是个不可数集合，而后者是可数集合，因为广义坐标是可以独立改变的量，显然任何体系的广义坐标都必须是可数集合。将此例所提供的概念加以推广，任何弹性体系的运动均可按振型分解并采用广义坐标解决。关于有限自由度体系的振型分解法，在本书第二篇中将详细讨论；关于无限自由度体系的振型分解法，可参