高等工程专科学校试用教材

工科数学

第一册
（高等数学）

胡映电　吾用仪　吴圣沂　编
蔡燧林　主审

中国计量出版社

高等工程专科学校试用教材

工 科 数 学

第 一 册

（高等数学）

胡映电　吾用仪　吴垩沂　编
蔡燧林　主审

中国计量出版社

新登(京)字024号

内 容 提 要

本书是根据大专课程指导委员会专科数学“教学基本要求”，并结合工科数学教学实践和作者长期从教经验所编的。全书共两册，本书为第一册，内容为高等数学部分，包括：一元函数微积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数等。第二册为线性代数与概率统计。

本书既保证了数学教材的系统性与完整性，又体现了工科大专的教学特点，做到重点突出、循序渐进、学以致用。为启迪学生思维、提高解题能力，每章后均有例题选解和习题，可作习题课内容，也可作自学材料。本书除作大专或相近院校的教材之外，也可供中专以上水平工程技术人员参阅和自学。

高等工程专科学校试用教材
工 科 数 学
第 一 册
(高 等 数 学)
胡映电 吾用仪 吴圣沂 编
綦燧林 主审
责任编辑 王晓莹

中国计量出版社出版
北京和平里西街甲2号
北京市华星计算机公司激光照排
中国计量出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

开本850×1168/32 印张19.75 字数521千字
1992年8月第1版 1992年8月第1次印刷
印数1—5000
ISBN 7-5026-0524-X/TB·401
定价12.00元

编　者　的　话

近几年来，我国普通高等专科教育有了很大的发展，且越来越受到社会的重视。我们在组织实施专科的数学教学中，深感有一套从专科培养目标出发且便于教学的适宜教材的急迫性。五年前，我们为此成立了教材编写组，随即编印了讲义。在编写中，注意了力求反映我们三十余年工科数学教学的经验，且边试用边修改。特别是在大专课程指导委员会颁发专科数学各科的“教学基本要求”以后，我们又重新全面地作了审核修订，终于在中国计量出版社的大力支持下定稿出版。

本教材从大专的要求出发，本着以应用为目的，以够用为度。因此，教材中涉及的知识覆盖面较宽，保持了数学自身的系统性、逻辑性。重点讲清基本概念和基本方法，适当减弱了严密的理论推证，尽量采用形象、直观的说理和从特殊到一般的论述方法，符合认识规律。在编写风格上溶汇了讲课和习题课的特点，力求做到启发引导思路，分析讲解清楚，归纳总结解题方法与步骤。每章后面还配有例题选解，适当增加难度，开拓解题思路。在教学过程中它又可以灵活使用，既可选作习题课的内容，又可作为学生的自学材料，对理解正文甚有帮助。

本教材分第一、第二两册。第一册是高等数学部分，内容包括：一元函数微积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数等十二章。第二册是线性代数与概率统计部分，内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、特征值、二次型、随机变量、数字特征、参数估计、假设检验及回归分析等十二章。

参加本教材审稿的有：浙江大学蔡燧林教授（主审）、丁善瑞副教授，中南工业大学关家骥教授，中国计量学院叶维平副教授，湖北汽车工业学院沈恒范教授。他们仔细酌句地审阅了全文，提出了许多宝贵的修改意见，在此，我们表示衷心的感谢。

本教材是集体劳动的成果，在几经试用、讨论修改的基础上，分别由胡映电（第一册的第1—4章和9—11章）、吾用仪（第一册的第5—8章和第12章）、吴圣沂（第二册）提出了初审的修改稿和复审后的定稿。吴圣沂完成了发稿前全书的统稿。在编写过程中得到了中国计量学院数学教研室的大力支持和帮助，陈育旺同志曾参加了高等数学初稿编写的部分工作。限于编者水平，缺点、错误以及疏漏之处在所难免，诚请读者批评指正。

编 者

1991年9月于杭州

目 录

第一章 函 数

高等数学是一门重要基础课，也是自然科学与工程技术理论研究的重要工具。要掌握近代科学技术，高等数学是必须具备的基础理论知识。

高等数学是以变量为研究对象的一门数学课程，而函数关系就是变量与变量之间的依赖关系。我们在中学数学中已初步学过有关函数的一些知识，在这一章里，将在已有函数知识的基础上进行归纳和补充。

第一节 函 数 概 念

一、变 量 与 区 间

在中学里，我们已经见过一些简单的函数，例如：

线性函数 $y=kx+b$

三角函数 如 $y=\sin x$， $y=\mathrm{tg}x$

对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$

幂函数 如 $y=x^3$

等等。其中 x, y，是可以取各种不同的数值的量，称为变量；$k, b, a, 3$ 是保持固定不变的数值的量，称为常量。

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析。例如，自由落体下落的距离 s 和时间 t 的关系式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 中，重力加速度 g 在一般情况下看作常量，而实际上，在不同的地点，重力加速度是不同的。

常量通常用字母 a, b, c 等表示，变量用 x, y, z 等表示。

任何一个变量，总有一定的变化范围，例如，在自由落体 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的例子中，如果物体从高 H 米的位置落下，那么，s 的变化范围是 0 到 H，t 的变化范围是 0 到 $\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

为了讨论问题方便，我们常用区间来表示变量的变化范围。我们常把介于两个实数 a,b，且 $a<b$ 之间的全体实数 x，即 $a<x<b$，称为开区间，记作 (a,b)。a,b，称为区间端点。如果两个端点也包括在内，即满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数 x，称为闭区间，记作 $[a,b]$。若一个端点包括在内，另一个端点不包括在内，这种区间称为半开区间，它们分别用 $(a,b]$ 及 $[a,b)$ 表示。上述这些区间都是有限区间。此外，满足不等式 $x>a$、$x\geqslant a$、$x<a$、$x\leqslant a$ 的全体实数 x，分别记作 $(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,a)$，$(-\infty,a]$，全体实数记作 $(-\infty,+\infty)$，这些都是无限区间。这里“∞”读作无穷大，正、负无穷大都不是数，仅是记号。用区间的符号表示自由落体中的 s 的变化范围是 $[0,H]$，t 的变化范围是 $\left[0,\sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$.

二、函 数 的 定 义

先看两个例子。

例 1 在自由落体 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 中，当 t 在其变化范围内任意取定一个数值时，由上式就可以确定 s 的相应数值。

例 2 在计量物体长度时，常要考虑由于温度变化而引起长度的变化，其关系是

$$L=la(t-20)$$

式中，l 为物体长度；a 为物体材料的线膨胀系数；20 为国际上统一规定测量长度时的标准温度；t 为物体的实际温度；L 为物体的实际温度偏离标准温度时所引起的长度变化。当 t 在其变化范围内任意取定一个数值时，由上式就可以确定 L 的相应数值。

抽去上述两例的实际意义，它们都表达了两个变量之间的依

赖关系，这种依赖关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有唯一确定的值与之对应。两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质。

定义 设有两个变量 x 和 y，如果变量 x 在它的变化范围内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的法则，总有唯一确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，且称 x 为**自变量**，y 为**因变量**。

函数的定义包括三个内容

1. 函数的定义域

自变量 x 的变化范围称为函数的定义域。例如，在自由落体的例子中，函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域为 $\left[0,\sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$. 如果函数不是来自实际问题，而是数学中常见的那种由公式给出的表达式 $y=f(x)$，即因变量 y 是由自变量 x 经过一系列运算所得到，那么函数的定义域就是使运算关系式有意义的，即使 y 有确定对应值的 x 的一切实数值。要使运算关系式有意义，一般应考虑以下几点：

(1)分母不为零；

(2)负数不能开偶次方；

(3)对数的底是非 1 的正数，真数必须大于零；

(4)绝对值大于 1 的数不能取反正弦、反余弦；

(5)若由有限项的和组成的函数，先把每项定义域求出来，取它们的公共部分。

例 3 求函数 $y=\dfrac{1}{(x-1)(x+4)}$ 的定义域。

解 当 $x=-4$，或 $x=1$ 时，函数无意义，除这两点外都有意义，所以函数的定义域为：$x<-4$，$-4<x<1$，$x>1$. 用区间表示为：$(-\infty,-4)$，$(-4,1)$，$(1,+\infty)$.

例 4 求函数 $y=\dfrac{1}{x}\lg(x+1)$ 的定义域。

解 由题意得 $x\neq0$，$x+1>0$，即 $x\neq0$，$x>-1$. 于是该函数

定义域为：$(-1,0),(0,+\infty)$.

例 5 求函数 $y=\arcsin\frac{x-1}{2}+\sqrt{x-2}$ 的定义域。

解 由题意得 $\left|\frac{x-1}{2}\right|\leqslant 1$, $x-2\geqslant 0$, 即 $-1\leqslant x\leqslant 3$, $x\geqslant 2$. 于是该函数定义域为：$[2,3]$.

2. 对应关系

函数定义中"变量 y 按照一定的法则，总有唯一确定的数值和它对应"这句话，表明 y 与 x 之间是按照一定的法则联系起来的。这个"一定的法则"就是 y 与 x 之间的对应关系。

函数记号 $y=f(x)$ 中的字母 f 表示 y 与 x 之间的对应关系。例如，$f(x)=\sin 5x$ 中的 f 就表示自变量 x 乘 5 再取正弦。$\varphi(x)=\frac{1}{2}x^2$ 中的 φ 就表示取自变量 x 平方的一半。

当同时讨论几个不同函数时，为了表示 y 与 x 的不同的对应关系，必须用不同的字母来表示不同的对应法则。例如用 $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=y(x)$ 等等。

3. 函数的值域

当自变量取数值 x_0 时，函数 $y=f(x)$ 有唯一确定的值 y_0 和它对应，便称 y_0 是 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $y_0=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}=y_0$，这时就说函数在 x_0 处有定义。所有函数值的全体叫做函数的值域。例如，$y=\sin x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $[-1,1]$；$y=\sqrt{x^2}$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $[0,+\infty)$.

例 6 设 $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$，求 $f(0),f(1),f(3),f(2a)$.

解 $f(0)=\frac{0-3}{0+2}=-\frac{3}{2}$, $\quad f(1)=\frac{1-3}{1+2}=-\frac{2}{3}$,

$f(3)=\frac{3-3}{3-2}=0$, $\quad f(2a)=\frac{2a-3}{2a+2}\quad(a\neq-1)$

例 7 设 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，试将 $f(x^2)$ 用 $f(x)$ 表示出来。

解 $f(x^2)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=[f(x)]^2-2$

在上述函数概念的三个内容中，我们可以看出定义域和对应关系是函数概念中二个重要因素，当它们确定后，那么函数的值域也随之确定。

对于两个函数，只有当它们的定义域完全相同，它们的对应关系完全相同时，才能认为它们是同一函数，至于自变量和因变量用什么字母表示，那是无关紧要的。

例 8 下面的函数是否是同一函数？

(1) $y=\sqrt{(x+1)^2}$ 与 $y=x+1$

(2) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$

(3) $s=t^2+1$ 与 $y=x^2+1$

解 (1)$y=\sqrt{(x+1)^2}$与$y=x+1$不是同一函数，尽管其定义域完全相同，但在$x<-1$时，它们的对应关系不相同，因而它们是两个不同的函数。

(2)$y=\lg x^2$与$y=2\lg x$不是同一函数，因为它们的定义域不相同，前者是$x\neq 0$，而后者是$x>0$，因此它们是两个不同的函数。

(3)$s=t^2+1$与$y=x^2+1$是同一函数，因为它们的定义域都是$(-\infty,+\infty)$，且对应关系也相同。

例 9 若$f(x+1)=x^2+3x+5$，求$f(x)$.

解 令$x+1=t$，则$x=t-1$，代入上式两端，得

$$f(t)=(t-1)^2+3(t-1)+5=t^2+t+3$$

由于函数表达式与变量用什么字母表示无关，所以

$$f(x)=x^2+x+3$$

三、函数的表示法

常用来表示函数的方法有三种：

1. 公式法

这是用数学式子表示函数的方法。例如，$y=3x^2$，$y=\lg(x+2)$，$y=\sqrt{1+\sin x}$等等都是用公式法表示的函数。

用公式法表示函数时，经常会遇到在定义域的不同范围内用不同式子表示的函数。

例 10 脉冲发生器产生一个如图 1－1 所示的三角波，写出电压 u 与时间 t 的函数关系式。

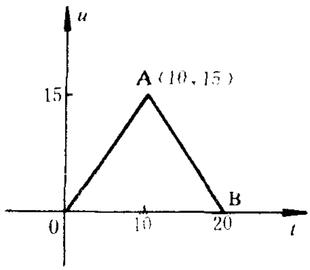

图 1－1

解 当 $0\leqslant t\leqslant 10$ 时，函数的图形是直线段 0A，$u=\frac{3}{2}t$；当 $10<t\leqslant 20$ 时，函数的图形是直线段 AB，$u=-\frac{3}{2}\times(t-20)$，由此得电压 u 与时间 t 的函数关系式：

$$u=\begin{cases}\frac{3}{2}t & 0\leqslant t\leqslant 10\\ -\frac{3}{2}(t-20) & 10<t\leqslant 20\end{cases}$$

例 11 某运输公司收取行李费的规定如下：当行李不超过 50kg 时，按基本运费计算。如从北京到某地每千克收 0.15 元，当超过 50kg 时，超重部分按每千克 0.25 元收费。试求运费 y(元)与重量 x(kg)之间的函数关系式。

解 当重量 x 不超过 50kg 时，运费 $y=0.15x$，而超过 50kg 时，超重部分运费为 $0.25(x-50)$，这时运费 $y=0.15\times 50+0.25\times(x-50)$，由此得运费 y 与重量 x 之间函数关系式：

$$y=\begin{cases}0.15x & 0<x\leqslant 50\\ 7.5+0.25(x-50) & x>50\end{cases}$$

象这样用几个式子分段表示的函数叫做分段函数。值得注意的是分段函数在其定义域的不同范围内有不同的表达式，但它只是一个函数，而不是几个函数。

例 12 作出分段函数

$$f(x)\begin{cases}0 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$$

的图形，并求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(3)$.

解 函数图形如图 1－2 所示

$$f(-2)=0 \qquad f(0)=1-0^2=1$$
$$f(3)=3+1=4$$

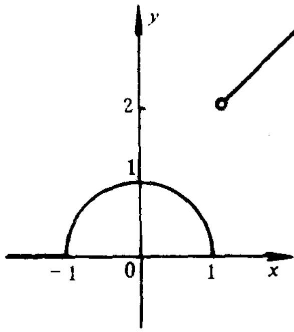

图 1—2

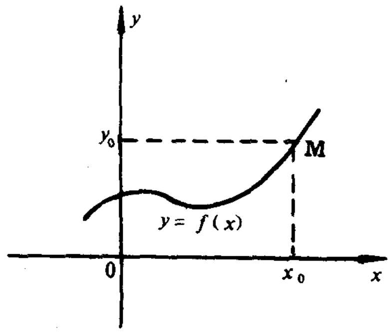

图 1—3

2. 表格法

这是将自变量的值与对应函数值列成表格表示函数的方法。如平方表、对数表、三角函数表、三角函数对数表等等。表格法的特点是给出自变量的值后，通过查表即可得到相应的函数值。

3. 图示法

这是用直角坐标系中直线或曲线表示函数的方法，如图 1—3，对于给定的 x_0 值，在曲线上找点 M，使 M 点横坐标为 x_0，则 M 点的纵坐标即为相应的 y_0 值。

四、反 函 数

设已知 y 是 x 的函数：$y=f(x)$。若把 y 当作自变量，x 当作因变量，由关系式 $y=f(x)$ 如果能确定函数 $x=\varphi(y)$，则把它叫做 $y=f(x)$ 的反函数。

因为习惯上自变量用字母 x 表示，因变量用字母 y 表示，为此将 $x=\varphi(y)$ 中的自变量 y 改写成 x，因变量 x 改写成 y，这样函数 $y=f(x)$ 的反函数按习惯可写成 $y=\varphi(x)$，或记作 $y=f^{-1}(x)$.

例 13 求 $y=3x+2$ 的反函数。

解 由 $y=3x+2$ 解出 x,得

$$x=\frac{1}{3}(y-2)$$

由于习惯上写法,故 $y=3x+2$ 的反函数为

$$y=\frac{1}{3}(x-2)$$

第二节 函数的几种特性

一、单调性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,对于区间 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加;当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调减少。

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

单调增加函数的图形沿 x 轴正向逐渐上升,如图 1－4;单调减少函数的图形沿 x 轴正向逐渐下降,如图 1－5.

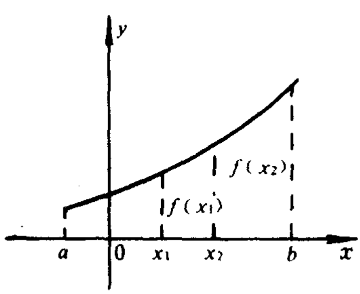

图 1－4

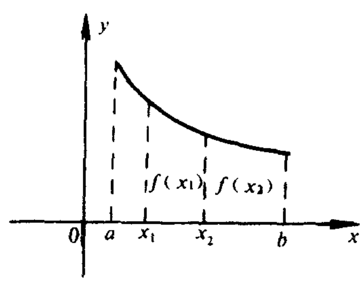

图 1－5

例 1 判断函数 $y=x^3(-\infty<x<+\infty)$ 的单调性。

解 对于 $(-\infty,+\infty)$ 内任意两个数 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,有