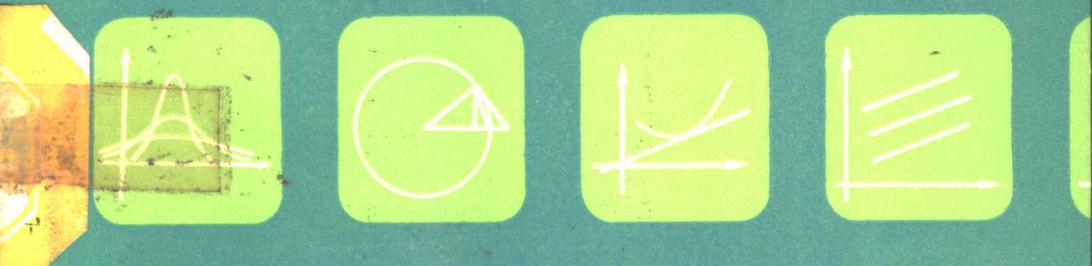


高等工程专科学校试用教材

# 工科数学

第一册  
(高等数学)

胡映电 吾用仪 吴圣沂 编  
蔡燧林 主审



中国计量出版社

高等工程专科学校试用教材

# 工 科 数 学

第一册

(高等数学)

胡映电 吾用仪 吴澄沂 编  
蔡燧林 主审

中国计量出版社

新登(京)字024号

## 内 容 提 要

本书是根据大专课程指导委员会专科数学“教学基本要求”，并结合工科数学教学实践和作者长期从教经验所编的。全书共两册，本书为第一册，内容为高等数学部分，包括：一元函数微积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数等。第二册为线性代数与概率统计。

本书既保证了数学教材的系统性与完整性，又体现了工科大专的教学特点，做到重点突出、循序渐进、学以致用。为启迪学生思维、提高解题能力，每章后均有例题选解和习题，可作习题课内容，也可作自学材料。本书除作大专或相近院校的教材之外，也可供中专以上水平工程技术人员参阅和自学。

高等工程专科学校试用教材

### 工 科 数 学

#### 第 一 册

(高等数学)

胡映电 吾用仪 吴圣沂 编

蔡燧林 主审

责任编辑 王晓莹

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲2号

北京市华星计算机公司激光照排

中国计量出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

开本850×1168/32 印张19.75 字数521千字

1992年8月第1版 1992年8月第1次印刷

印数1—5000

ISBN 7-5026-0524-X/TB·401

定价12.00元

## 编 者 的 话

近几年来，我国普通高等专科教育有了很大的发展，且越来越受到社会的重视。我们在组织实施专科的数学教学中，深感有一套从专科培养目标出发且便于教学的适宜教材的急迫性。五年前，我们为此成立了教材编写组，随即编印了讲义。在编写中，注意了力求反映我们三十余年工科数学教学的经验，且边试用边修改。特别是在大专课程指导委员会颁发专科数学各科的“教学基本要求”以后，我们又重新全面地作了审核修订，终于在中国计量出版社的大力支持下定稿出版。

本教材从大专的要求出发，本着以应用为目的，以够用为度。因此，教材中涉及的知识覆盖面较宽，保持了数学自身的系统性、逻辑性。重点讲清基本概念和基本方法，适当减弱了严密的理论推证，尽量采用形象、直观的说理和从特殊到一般的论述方法，符合认识规律。在编写风格上溶汇了讲课和习题课的特点，力求做到启发引导思路，分析讲解清楚，归纳总结解题方法与步骤。每章后面还配有例题选解，适当增加难度，开拓解题思路。在教学过程中它又可以灵活使用，既可选作习题课的内容，又可作为学生的自学材料，对理解正文甚有帮助。

本教材分第一、第二两册。第一册是高等数学部分，内容包括：一元函数微积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数等十二章。第二册是线性代数与概率统计部分，内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、特征值、二次型、随机变量、数字特征、参数估计、假设检验及回归分析等十二章。

参加本教材审稿的有：浙江大学蔡燧林教授（主审）、丁善瑞副教授，中南工业大学关家骥教授，中国计量学院叶维平副教授，湖北汽车工业学院沈恒范教授。他们仔细酌句地审阅了全文，提出了许多宝贵修改意见，在此，我们表示衷心的感谢。

本教材是集体劳动的成果，在几经试用、讨论修改的基础上，分别由胡映电（第一册的第1—4章和9—11章）、吾用仪（第一册的第5—8章和第12章）、吴圣沂（第二册）提出了初审的修改稿和复审后的定稿。吴圣沂完成了发稿前全书的统稿。在编写过程中得到了中国计量学院数学教研室的大力支持和帮助，陈育旺同志曾参加了高等数学初稿编写的部分工作。限于编者水平，缺点、错误以及疏漏之处在所难免，诚请读者批评指正。

编 者

1991年9月于杭州

# 目 录

<b>第一章 函数 .....</b>	(1)
第一节 函数概念 .....	(1)
第二节 函数的几种特性 .....	(8)
第三节 初等函数 .....	(11)
第四节 建立函数关系举例 .....	(16)
例题选解 .....	(19)
习题 .....	(23)
<b>第二章 极限与连续 .....</b>	(27)
第一节 极限概念 .....	(27)
第二节 无穷小与无穷大 .....	(38)
第三节 极限的四则运算和存在准则 .....	(42)
第四节 函数的连续性 .....	(52)
例题选解 .....	(62)
习题 .....	(66)
<b>第三章 导数与微分 .....</b>	(71)
第一节 导数概念 .....	(71)
第二节 求导法则 .....	(82)
第三节 微分 .....	(102)
例题选解 .....	(114)
习题 .....	(119)
<b>第四章 导数的应用 .....</b>	(129)
第一节 微分中值定理 .....	(129)
第二节 洛比达法则 .....	(134)
第三节 函数的单调性与极值 .....	(141)
第四节 曲线的凹向及拐点 .....	(155)
第五节 函数图形的描绘 .....	(157)
第六节 曲率 .....	(161)

例题选解	.....	(167)
习题	.....	(174)
<b>第五章 不定积分</b>	.....	(180)
第一节 不定积分的概念与性质	.....	(180)
第二节 换元积分法	.....	(187)
第三节 分部积分法	.....	(200)
第四节 有理函数积分举例	.....	(205)
第五节 积分表的使用	.....	(211)
例题选解	.....	(213)
习题	.....	(218)
<b>第六章 定积分及其应用</b>	.....	(224)
第一节 定积分概念与性质	.....	(224)
第二节 微积分的基本公式	.....	(235)
第三节 定积分的换元法	.....	(240)
第四节 定积分的分部积分法	.....	(243)
第五节 广义积分	.....	(246)
第六节 定积分的近似计算	.....	(250)
第七节 定积分的应用	.....	(254)
例题选解	.....	(268)
习题	.....	(272)
<b>第七章 微分方程</b>	.....	(280)
第一节 微分方程的基本概念	.....	(280)
第二节 一阶微分方程的解法	.....	(283)
第三节 可降阶的高阶微分方程	.....	(291)
第四节 二阶线性微分方程解的结构	.....	(293)
第五节 二阶常系数线性齐次微分方程	.....	(297)
第六节 二阶常系数线性非齐次微分方程	.....	(300)
第七节 龙格-库塔方法	.....	(304)
例题选解	.....	(310)
习题	.....	(317)
<b>第八章 向量代数与空间解析几何</b>	.....	(321)
第一节 行列式及其性质	.....	(321)
第二节 空间直角坐标系	.....	(330)

第三节 向量及其坐标表示法 .....	(331)
第四节 数量积与向量积 .....	(340)
第五节 平面与空间直线 .....	(345)
第六节 曲面与空间曲线 .....	(353)
例题选解 .....	(362)
习题 .....	(369)
<b>第九章 多元函数微分法 .....</b>	<b>(375)</b>
第一节 多元函数 .....	(375)
第二节 偏导数 .....	(381)
第三节 全微分 .....	(386)
第四节 复合函数微分法 .....	(392)
第五节 隐函数微分法 .....	(396)
第六节 偏导数的几何应用 .....	(399)
第七节 二元函数的极值及其求法 .....	(404)
第八节 最小二乘法 .....	(412)
例题选解 .....	(415)
习题 .....	(420)
<b>第十章 重积分 .....</b>	<b>(428)</b>
第一节 二重积分的概念与性质 .....	(428)
第二节 二重积分在直角坐标系中的计算法 .....	(435)
第三节 二重积分在极坐标系中的计算法 .....	(443)
第四节 二重积分的应用 .....	(450)
第五节 三重积分的概念及计算法 .....	(457)
第六节 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分 .....	(463)
例题选解 .....	(470)
习题 .....	(475)
<b>第十一章 曲线积分 .....</b>	<b>(483)</b>
第一节 对弧长的曲线积分 .....	(483)
第二节 对坐标的曲线积分 .....	(490)
第三节 格林公式 .....	(498)
第四节 平面曲线积分与路线无关问题 .....	(501)
例题选解 .....	(512)
习题 .....	(517)

<b>第十二章 无穷级数</b>	.....	(522)
第一节 无穷级数的概念与性质	.....	(522)
第二节 数项级数的审敛法	.....	(528)
第三节 幂级数	.....	(538)
第四节 函数的幂级数展开式	.....	(544)
第五节 傅里叶级数	.....	(555)
例题选解	.....	(566)
习题	.....	(574)
<b>附 录 简单积分表</b>	.....	(578)
<b>习题答案</b>	.....	(584)

# 第一章 函数

高等数学是一门重要基础课，也是自然科学与工程技术理论研究的重要工具。要掌握近代科学技术，高等数学是必须具备的基础理论知识。

高等数学是以变量为研究对象的一门数学课程，而函数关系就是变量与变量之间的依赖关系。我们在中学数学中已初步学过有关函数的一些知识，在这一章里，将在已有函数知识的基础上进行归纳和补充。

## 第一节 函数概念

### 一、变量与区间

在中学里，我们已经见过一些简单的函数，例如：

线性函数  $y = kx + b$

三角函数 如  $y = \sin x$ ,  $y = \tan x$

对数函数  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

幂函数 如  $y = x^3$

等等。其中  $x, y$  是可以取各种不同的数值的量，称为变量； $k, b, a, 3$  是保持固定不变的数值的量，称为常量。

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析。例如，自由落体下落的距离  $s$  和时间  $t$  的关系式  $s = \frac{1}{2}gt^2$  中，重力加速度  $g$  在一般情况下看作常量，而实际上，在不同的地点，重力加速度是不同的。

常量通常用字母  $a, b, c$  等表示，变量用  $x, y, z$  等表示。

任何一个变量,总有一定的变化范围,例如,在自由落体  $s = \frac{1}{2}gt^2$  的例子中,如果物体从高  $H$  米的位置落下,那么,  $s$  的变化范围是 0 到  $H$ ,  $t$  的变化范围是 0 到  $\sqrt{\frac{2H}{g}}$ .

为了讨论问题方便,我们常用区间来表示变量的变化范围。我们常把介于两个实数  $a, b$ , 且  $a < b$  之间的全体实数  $x$ , 即  $a < x < b$ , 称为开区间, 记作  $(a, b)$ 。 $a, b$ , 称为区间端点。如果两个端点也包括在内, 即满足不等式  $a \leq x \leq b$  的全体实数  $x$ , 称为闭区间, 记作  $[a, b]$ 。若一个端点包括在内, 另一个端点不包括在内, 这种区间称为半开区间, 它们分别用  $(a, b]$  及  $[a, b)$  表示。上述这些区间都是有限区间。此外, 满足不等式  $x > a, x \geq a, x < a, x \leq a$  的全体实数  $x$ , 分别记作  $(a, +\infty)$ ,  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, a)$ ,  $(-\infty, a]$ , 全体实数记作  $(-\infty, +\infty)$ , 这些都是无限区间。这里“ $\infty$ ”读作无穷大, 正、负无穷大都不是数, 仅是记号。用区间的符号表示自由落体中的  $s$  的变化范围是  $[0, H]$ ,  $t$  的变化范围是  $[0, \sqrt{\frac{2H}{g}}]$ .

## 二、函数的定义

先看两个例子。

**例 1** 在自由落体  $s = \frac{1}{2}gt^2$  中, 当  $t$  在其变化范围内任意取定一个数值时, 由上式就可以确定  $s$  的相应数值。

**例 2** 在计量物体长度时, 常要考虑由于温度变化而引起长度的变化, 其关系是

$$L = la(t - 20)$$

式中,  $l$  为物体长度;  $a$  为物体材料的线膨胀系数; 20 为国际上统一规定测量长度时的标准温度;  $t$  为物体的实际温度;  $L$  为物体的实际温度偏离标准温度时所引起的长度变化。当  $t$  在其变化范围内任意取定一个数值时, 由上式就可以确定  $L$  的相应数值。

抽去上述两例的实际意义, 它们都表达了两个变量之间的依

赖关系，这种依赖关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有唯一确定的值与之对应。两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质。

**定义** 设有两个变量  $x$  和  $y$ ，如果变量  $x$  在它的变化范围内任意取定一个数值时，变量  $y$  按照一定的法则，总有唯一确定的数值和它对应，则称变量  $y$  是变量  $x$  的函数，记作  $y=f(x)$ ，且称  $x$  为自变量， $y$  为因变量。

函数的定义包括三个内容

### 1. 函数的定义域

自变量  $x$  的变化范围称为函数的定义域。例如，在自由落体的例子中，函数  $s=\frac{1}{2}gt^2$  的定义域为  $[0, \sqrt{\frac{2H}{g}}]$ 。如果函数不是来自实际问题，而是数学中常见的那种由公式给出的表达式  $y=f(x)$ ，即因变量  $y$  是由自变量  $x$  经过一系列运算所得到，那么函数的定义域就是使运算关系式有意义的，即使  $y$  有确定对应值的  $x$  的一切实数值。要使运算关系式有意义，一般应考虑以下几点：

- (1) 分母不为零；
- (2) 负数不能开偶次方；
- (3) 对数的底是非 1 的正数，真数必须大于零；
- (4) 绝对值大于 1 的数不能取反正弦、反余弦；
- (5) 若由有限项的和组成的函数，先把每项定义域求出来，取它们的公共部分。

**例 3** 求函数  $y = \frac{1}{(x-1)(x+4)}$  的定义域。

**解** 当  $x=-4$ ，或  $x=1$  时，函数无意义，除这两点外都有意义，所以函数的定义域为： $x < -4, -4 < x < 1, x > 1$ 。用区间表示为： $(-\infty, -4), (-4, 1), (1, +\infty)$ 。

**例 4** 求函数  $y = \frac{1}{x} \lg(x+1)$  的定义域。

**解** 由题意得  $x \neq 0, x+1 > 0$ ，即  $x \neq 0, x > -1$ 。于是该函数

定义域为:  $(-1, 0), (0, +\infty)$ .

例 5 求函数  $y = \arcsin \frac{x-1}{2} + \sqrt{x-2}$  的定义域。

解 由题意得  $\left| \frac{x-1}{2} \right| \leq 1$ ,  $x-2 \geq 0$ , 即  $-1 \leq x \leq 3$ ,  
 $x \geq 2$ . 于是该函数定义域为:  $[2, 3]$ .

## 2. 对应关系

函数定义中“变量  $y$  按照一定的法则, 总有唯一确定的数值和它对应”这句话, 表明  $y$  与  $x$  之间是按照一定的法则联系起来的。这个“一定的法则”就是  $y$  与  $x$  之间的对应关系。

函数记号  $y=f(x)$  中的字母  $f$  表示  $y$  与  $x$  之间的对应关系。例如,  $f(x)=\sin 5x$  中的  $f$  就表示自变量  $x$  乘 5 再取正弦。 $\varphi(x)=\frac{1}{2}x^2$  中的  $\varphi$  就表示取自变量  $x$  平方的一半。

当同时讨论几个不同函数时, 为了表示  $y$  与  $x$  的不同的对应关系, 必须用不同的字母来表示不同的对应法则。例如用  $y=f(x)$ ,  $y=\varphi(x)$ ,  $y=\psi(x)$  等等。

## 3. 函数的值域

当自变量取数值  $x_0$  时, 函数  $y=f(x)$  有唯一确定的值  $y_0$  和它对应, 便称  $y_0$  是  $x=x_0$  时的函数值, 记作  $y_0=f(x_0)$  或  $y|_{x=x_0}=y_0$ , 这时就说函数在  $x_0$  处有定义。所有函数值的全体叫做函数的值域。例如,  $y=\sin x$  的定义域是  $(-\infty, +\infty)$ , 值域是  $[-1, 1]$ ;  $y=\sqrt{x^2}$  的定义域是  $(-\infty, +\infty)$ , 值域是  $[0, +\infty)$ .

例 6 设  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ , 求  $f(0), f(1), f(3), f(2a)$ .

解  $f(0) = \frac{0-3}{0+2} = -\frac{3}{2}$ ,  $f(1) = \frac{1-3}{1+2} = -\frac{2}{3}$ ,

$$f(3) = \frac{3-3}{3+2} = 0, \quad f(2a) = \frac{2a-3}{2a+2} \quad (a \neq -1)$$

例 7 设  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ , 试将  $f(x^2)$  用  $f(x)$  表示出来。

解  $f(x^2) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = [f(x)]^2 - 2$

在上述函数概念的三个内容中,我们可以看出定义域和对应关系是函数概念中二个重要因素,当它们确定后,那么函数的值域也随之确定。

对于两个函数,只有当它们的定义域完全相同,它们的对应关系完全相同时,才能认为它们是同一函数,至于自变量和因变量用什么字母表示,那是无关紧要的。

**例 8** 下面的函数是否是同一函数?

(1)  $y = \sqrt{(x+1)^2}$  与  $y = x + 1$

(2)  $y = \lg x^2$  与  $y = 2 \lg x$

(3)  $s = t^2 + 1$  与  $y = x^2 + 1$

**解** (1)  $y = \sqrt{(x+1)^2}$  与  $y = x + 1$  不是同一函数,尽管其定义域完全相同,但在  $x < -1$  时,它们的对应关系不相同,因而它们是两个不同的函数。

(2)  $y = \lg x^2$  与  $y = 2 \lg x$  不是同一函数,因为它们的定义域不相同,前者是  $x \neq 0$ ,而后者是  $x > 0$ ,因此它们是两个不同的函数。

(3)  $s = t^2 + 1$  与  $y = x^2 + 1$  是同一函数,因为它们的定义域都是  $(-\infty, +\infty)$ ,且对应关系也相同。

**例 9** 若  $f(x+1) = x^2 + 3x + 5$ ,求  $f(x)$ .

**解** 令  $x+1=t$ ,则  $x=t-1$ ,代入上式两端,得

$$f(t) = (t-1)^2 + 3(t-1) + 5 = t^2 + t + 3$$

由于函数表达式与变量用什么字母表示无关,所以

$$f(x) = x^2 + x + 3$$

### 三、函数的表示法

常用来表示函数的方法有三种:

#### 1. 公式法

这是用数学式子表示函数的方法。例如,  $y = 3x^2$ ,  $y = \lg(x+2)$ ,  $y = \sqrt{1+\sin x}$  等等都是用公式法表示的函数。

用公式法表示函数时,经常会遇到在定义域的不同范围内用不同式子表示的函数。

**例 10** 脉冲发生器产生一个如图 1-1 所示的三角波,写出电压  $u$  与时间  $t$  的函数关系式。

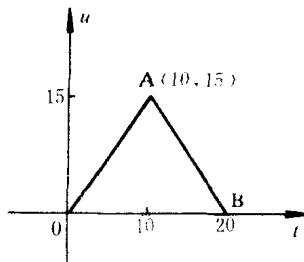


图 1-1

**解** 当  $0 \leq t \leq 10$  时, 函数的图形是直线段  $0A$ ,  $u = \frac{3}{2}t$ ; 当  $10 < t \leq 20$  时, 函数的图形是直线段  $AB$ ,  $u = -\frac{3}{2}(t - 20)$ , 由此得电压  $u$  与时间  $t$  的函数关系式:

$$u = \begin{cases} \frac{3}{2}t & 0 \leq t \leq 10 \\ -\frac{3}{2}(t - 20) & 10 < t \leq 20 \end{cases}$$

**例 11** 某运输公司收取行李费的规定如下:当行李不超过  $50\text{kg}$  时,按基本运费计算。如从北京到某地每千克收 0.15 元,当超过  $50\text{kg}$  时,超重部分按每千克 0.25 元收费。试求运费  $y$ (元)与重量  $x(\text{kg})$  之间的函数关系式。

**解** 当重量  $x$  不超过  $50\text{kg}$  时, 运费  $y = 0.15x$ , 而超过  $50\text{kg}$  时, 超重部分运费为  $0.25(x - 50)$ , 这时运费  $y = 0.15 \times 50 + 0.25 \times (x - 50)$ , 由此得运费  $y$  与重量  $x$  之间函数关系式:

$$y = \begin{cases} 0.15x & 0 < x \leq 50 \\ 7.5 + 0.25(x - 50) & x > 50 \end{cases}$$

象这样用几个式子分段表示的函数叫做分段函数。值得注意的是分段函数在其定义域的不同范围内有不同的表达式,但它只是一个函数,而不是几个函数。

**例 12** 作出分段函数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$$

的图形,并求  $f(-2), f(0), f(3)$ .

**解** 函数图形如图 1-2 所示

$$f(-2) = 0 \quad f(0) = 1 - 0^2 = 1$$

$$f(3) = 3 + 1 = 4$$

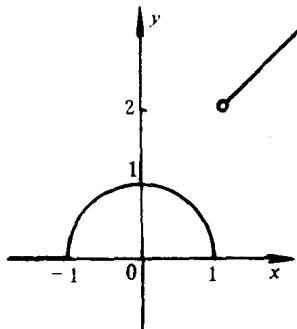


图 1-2

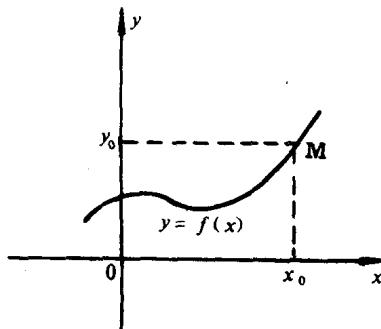


图 1-3

## 2. 表格法

这是将自变量的值与对应函数值列成表格表示函数的方法。如平方表、对数表、三角函数表、三角函数对数表等等。表格法的特点是给出自变量的值后，通过查表即可得到相应的函数值。

## 3. 图示法

这是用直角坐标系中直线或曲线表示函数的方法，如图 1-3，对于给定的  $x_0$  值，在曲线上找点 M，使 M 点横坐标为  $x_0$ ，则 M 点的纵坐标即为相应的  $y_0$  值。

## 四、反 函 数

设已知  $y$  是  $x$  的函数： $y = f(x)$ 。若把  $y$  当作自变量， $x$  当作因变量，由关系式  $y = f(x)$  如果能确定函数  $x = \varphi(y)$ ，则把它叫做  $y = f(x)$  的反函数。

因为习惯上自变量用字母  $x$  表示，因变量用字母  $y$  表示，为此将  $x = \varphi(y)$  中的自变量  $y$  改写成  $x$ ，因变量  $x$  改写成  $y$ ，这样函数  $y = f(x)$  的反函数按习惯可写成  $y = \varphi(x)$ ，或记作  $y = f^{-1}(x)$ 。

**例 13** 求  $y = 3x + 2$  的反函数。

解 由  $y=3x+2$  解出  $x$ , 得

$$x = \frac{1}{3}(y - 2)$$

由于习惯上写法, 故  $y=3x+2$  的反函数为

$$y = \frac{1}{3}(x - 2)$$

## 第二节 函数的几种特性

### 一、单调性

如果函数  $y=f(x)$  在区间  $(a, b)$  内有定义, 对于区间  $(a, b)$  内任意两点  $x_1$  和  $x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称函数  $y=f(x)$  在区间  $(a, b)$  内单调增加; 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则称函数  $y=f(x)$  在区间  $(a, b)$  内单调减少。

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

单调增加函数的图形沿  $x$  轴正向逐渐上升, 如图 1-4; 单调减少函数的图形沿  $x$  轴正向逐渐下降, 如图 1-5.

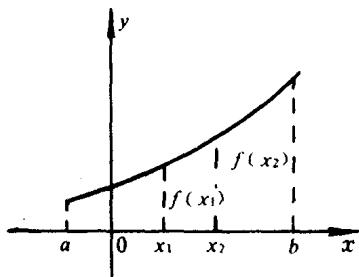


图 1-4

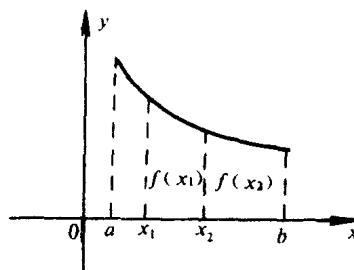


图 1-5

例 1 判断函数  $y=x^3$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 的单调性。

解 对于  $(-\infty, +\infty)$  内任意两个数  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 有