測量平差

(依最小二乘法)

補編

葉雪安著

龍門聯合書局出版

測量平差

（補 編）

葉雪安著

龍門聯合書局出版

測量平差

(依最小二乘法)

補編

葉雪安著

龍門聯合書局出版
上海南京東路61號101室
中國圖書發行公司總經售
華文印刷局印刷
上海齊齊路143弄4號

1954年1月初版 印數0001-2(
新定價 ¥ 7,500
上海市書刊出版業營業許可證出02

目　錄

第三篇　平差計算之應用

第四篇　誤差理論

附　錄

第九章 誤差楕圓 (Fehlerellipse)

§ 1 點之中課差 (Der mittlere Fehler)

欲判斷點之精度除求出所測角度或方向之中誤差外，尙須求出坐標之中誤差 m_x 及 m_y，見第八章 189 頁．因 m_x 及 m_y 依坐標系軸之方向而不同，故不能視爲單義的精度衡量．

今設決定點之位置有下列誤差方程式:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = +a_1x + b_1y - l_1 \\ v_2 = +a_2x + b_2y - l_2 \\ v_3 = +a_3x + b_3y - l_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\}. \tag{1}$$

屬於(1)式之法方程式爲:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]x + [ab]y - [al] = 0 \\ [ab]x + [bb]y - [bl] = 0 \end{array}\right\}, \tag{2}$$

由上式得未知數之值爲:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{[bb][al] - [ab][bl]}{D} \\ y = \dfrac{[aa][bl] - [ab][al]}{D} \end{array}\right\} \tag{3}$$

此處 $$D = [aa][bb] - [ab]^2. \tag{4}$$

最後計算所測角度或方向之中誤差利用下式:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-u}} \tag{5}$$

假定觀測值之眞誤差爲 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \cdots\cdots$; 由(3)式得對於坐標 x, y 之誤差:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{D}\Big\{(a_1[bb]-b_1[ab])\varepsilon_1+(a_2[bb]-b_2[ab])\varepsilon_2+\cdots\cdots\Big\}\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{D}\Big\{(b_1[aa]-a_1[ab])\varepsilon_1+(b_2[aa]-a_2[ab])\varepsilon_2+\cdots\cdots\Big\}\end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

若由眞誤差變爲中誤差則按誤差傳播定律得:

$$m_x^2=\frac{1}{D^2}\Big\{[aa]\,[bb]^2+[bb]\,[ab]^2-2\,[ab]^2\,[bb]\Big\}m^2$$

$$m_y^2=\frac{1}{D^2}\Big\{[bb]\,[aa]^2+[aa]\,[ab]^2-2[ab]^2[aa]\Big\}m^2$$

或 $$m_x^2=\frac{[bb]}{D}m^2 \qquad m_y^2=\frac{[aa]}{D}m^2 \quad (7)$$

按

$$\varepsilon=\sqrt{\varepsilon_x{}^2+\varepsilon_y{}^2} \quad (8)$$

代表相當於坐標値誤差 ε_x 及 ε_y 點之移動値，亦卽代表點之眞誤差。今將(6)式代入(8)式得

$$\begin{aligned}\varepsilon^2=\frac{1}{D^2}\Big\{&\Big(a_1^2([bb]^2+[ab]^2)+b_1^2([aa]^2+[ab]^2)-2a_1b_1\\ &[ab]([bb]+[aa])\Big)\varepsilon_1^2\\ &+\Big(a_2^2([bb]^2+[ab]^2)+b_2^2([aa]^2+[ab]^2)-2a_2b_2\\ &[ab]([bb]+[aa])\Big)\varepsilon_2^2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+f_{1,2}\varepsilon_1\varepsilon_2+f_{1,3}\varepsilon_1\varepsilon_3+\cdots\cdots\Big\},\end{aligned}$$

此處將 $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\varepsilon_3$ 等等的係數用 $f_{1,2}$, $f_{1,3}$ 等等簡略表示之。

今將上式用平均值（Durchschnittswert）表示之，假定 ε^2 之平均值爲 M^2, ε_1^2, $\varepsilon_2^2\cdots\cdots$ 之平均值設爲 m^2; 乘積 $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\varepsilon_3$ 等等之平均值按 11 頁可視爲極接近零，則上式變爲:

$$\begin{aligned}M^2=\frac{1}{D^2}\Big\{&[aa]([bb]^2+[ab]^2)+[bb]([aa]^2+[ab]^2)-2[ab]^2\\ &([bb]+[aa])\Big\}m^2,\end{aligned}$$

簡化之得:

$$M^2=\left(\frac{[aa]+[bb]}{D}\right)m^2=\frac{1}{P}m^2 \tag{9}$$

P 稱曰點之權 (Punktgewicht)

按(7)式則(9)式寫爲

$$M^2=m_x^2+m_y^2 \tag{10}$$

(9)式用以計算點之中誤差,與坐標系軸之方向脫離關係. 玆證明之如下:

按 180 頁(12)式得

$$a=-\frac{\rho}{s}\sin\varphi, \qquad b=+\frac{\rho}{s}\cos\varphi. \tag{11}$$

將上式代入(9)式之分子得

$$[aa]+[bb]=\rho^2\left(\frac{1}{s_1^2}+\frac{1}{s_2^2}+\cdots\cdots\right),$$

上式右邊與坐標系軸之方向完全無關.

將(9)式內之分母寫成下之形式:

$$D=(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots)(b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots)-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots)^2,$$

上式化爲

$$D=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+\cdots\cdots \tag{12}$$

上式內 a 及 b 之値用(11)式代入之,則(12)式變爲:

$$D=\rho^4\left\{\frac{\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)}{s_1^2s_2^2}+\frac{\sin^2(\varphi_3-\varphi_1)}{s_1^2s_3^2}+\frac{\sin^2(\varphi_3-\varphi_2)}{s_2^2s_3^2}+\cdots\cdots\right\}$$

上式內僅發現方向角之相差數,故 D 與坐標系軸之方向亦不生關係.

§2　誤差橢圓

m_x 及 m_y 表示沿坐標軸之二個方向因測量誤差所引起之點之中移動値,吾人尙須研究沿其他方向點之中移動値的大小,及沿何種方向其移動値爲最大及最小. 今以(7)式爲研究的出發點.

上曾言 D 與坐標系不發生關係,故僅研究 (7) 式之二個分子 $[aa]$

及 $[bb]$。今假定一個新的坐標系，該坐標系對於原設的坐標系向右旋轉 ψ 角，則按(11)式得：

$$a'=-\frac{\rho}{s}\sin(\varphi-\psi) \qquad b'=+\frac{\rho}{s}\cos(\varphi-\psi) \tag{13}$$

$[aa]$ 變為

$$[a'a']=\rho^2\left\{\frac{\sin^2(\varphi_1-\psi)}{s_1^2}+\frac{\sin^2(\varphi_2-\psi)}{s_2^2}+\cdots\cdots\right\}$$

或

$$[a'a']=\rho^2\left\{\left[\frac{\sin^2\varphi}{s^2}\right]\cos^2\psi+\left[\frac{\cos^2\varphi}{s^2}\right]\sin^2\psi-\left[\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{s^2}\right]\sin 2\psi\right\}$$

按(11)式則上式寫為：

$$[a'a']=[aa]\cos^2\psi+[bb]\sin^2\psi+[ab]\sin 2\psi. \tag{14}$$

同理

$$[b'b']=[bb]\cos^2\psi+[aa]\sin^2\psi-[ab]\sin 2\psi. \tag{15}$$

欲求 ψ 在何值時(14)及(15)二式達於極大或極小，須向 ψ 取微分，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{d[a'a']}{d\psi}&=-([aa]-[bb])\sin 2\psi+2[ab]\cos 2\psi=0\\ \frac{d[b'b']}{d\psi}&=+([aa]-[bb])\sin 2\psi-2[ab]\cos 2\psi=0\end{aligned}\right\}, \tag{16}$$

由上得

$$\operatorname{tg} 2\psi=\frac{2[ab]}{[aa]-[bb]}. \tag{17}$$

上式有二個根一為 2ψ 及 $2\psi\pm180°$，亦即 ψ 及 $\psi\pm90°$，故知(17)式決定二個互為垂直的方向，相當於 m_x（及 m_y）之最大值或最小值。至於如何決定二個 ψ 值中何者屬於 m_x（或 m_y）的最大值或最小值，則於下面提及，此時暫將(17)式再往下計算。

今以 m_x（或 m_y）之最大值及最小值以 μ_1, μ_2 代表之（對於 m_x 抑或 m_y 為最大或最小的決定暫時勿論），由(7)，(14)與(15)式注意分母

D 之值爲不變得：

$$\left.\begin{aligned}&\text{對於 } x',\ \mu_1^2=m^2\frac{[b'b']}{D}=m^2\frac{[aa]\sin^2\psi+[bb]\cos^2\psi-2[ab]\sin\psi\cos\psi}{D}\\&\text{對於 } y',\ \mu_2^2=m^2\frac{[a'a']}{D}=m^2\frac{[aa]\cos^2\psi+[bb]\sin^2\psi+2[ab]\sin\psi\cos\psi}{D}\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

按(17)式將(18)式內之三角函數化爲 $[aa]$，$[ab]$，$[bb]$ 之函數其法如下：

$$\sin^2\psi=\frac{1-\cos2\psi}{2},\qquad \cos^2\psi=\frac{1+\cos2\psi}{2}\tag{19}$$

及

$$\cos2\psi=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 2\psi}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4[ab]^2}{([aa]-[bb])^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2}{([aa]-[bb])^2}}};$$

若命
$$\sqrt{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2}=W,\tag{20}$$

則得
$$\cos 2\psi=\frac{[aa]-[bb]}{W}\tag{21}$$

由上式及(17)式得

$$\sin 2\psi=\frac{2[ab]}{W}.\tag{22}$$

又由(19)式得：

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\psi&=\frac{1-\cos 2\psi}{2}=\frac{W-[aa]+[bb]}{2W}\\\cos^2\psi&=\frac{1+\cos 2\psi}{2}=\frac{W+[aa]-[bb]}{2W}\end{aligned}\right\}.\tag{23}$$

將(23)式代入(18)式內之分子內簡化之則得

$$[a'a']=\frac{[aa]+[bb]+W}{2}\qquad [b'b']=\frac{[aa]+[bb]-W}{2}\tag{24}$$

$$\mu_1^2=m^2\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}\qquad \mu_2^2=m^2\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}\tag{25}$$

(25)式相加得

$$\mu_1^2+\mu_2^2=m^2\frac{[aa]+[bb]}{D}=M^2$$

此式與(9)式相一致，此乃應得之結果。

次述上所言之兩個根的正負號及決定那一個方向角屬於最大值或最小值。今設(20)式內之 W 永取正號，則在(21)及(22)二式內 2ψ 的象限可決定，此處假定(17)式內 2ψ 的象限的決定可按照分子及分母的正負號（參考普通測量學 40 頁葉雪安編商務出版），故在(25)式內 μ_1 相當於極小值，其方向角為 ψ，μ_2 相當於極大值，其方向角為 $\psi\pm 90°$。

今導入其他之符號，假定

$$\psi=\theta-90° \qquad 2\psi=2\theta-180° \tag{26}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{-2[ab]}{-([aa]-[bb])}, \tag{27}$$

若 ψ 代表最小值 μ_1 的方向角，則 θ 代表最大值 μ_2 的方向角。仍取 W 之絕對值則得下之結果：

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{-2[ab]}{-([aa]-[bb])} \tag{28}$$

$$W=\sqrt{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2}=\frac{-2[ab]}{\sin 2\theta}=\frac{-([aa]-[bb])}{\cos 2\theta} \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned} m_{max}^2&=m^2\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}=A^2 \qquad \text{方向角為 } \theta \\ m_{min}^2&=m^2\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}=B^2 \qquad \text{方向角 } \theta\pm 90° \end{aligned}\right\}. \tag{30}$$

吾人可由上列各式同求坐標誤差 m_x 及 m_y，假定 x 軸與最大值 m_{max} 之方向組成 $\theta=\psi+90°$ 角。

按(7)式

$$m_x^2=\frac{[bb]}{D}m^2,$$

或寫為下之形式：

$$m_x^2=\left\{\frac{[aa]+[bb]+W+[aa]+[bb]-W}{4D}\right.$$
$$\left.+\frac{[aa]-[bb]}{2W}\;\frac{[aa]+[bb]-W-[aa]-[bb]-W}{2D}\right\}m^2.$$

按(21)得

$$m_x^2=\left\{\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}\frac{1-\cos2\psi}{2}+\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}\frac{1+\cos2\psi}{2}\right\}m^2$$

按(23)及(30)得

$$m_x^2=A^2\sin^2\psi+B^2\cos^2\psi.$$

按 $\psi=\theta-90°$ 故得

$$m_x^2=A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta. \tag{31}$$

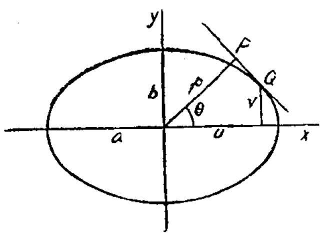
同理得

$$m_y^2=A^2\sin^2\theta+B^2\cos^2\theta \tag{32}$$

由上仍得:

$$A^2+B^2=M^2=m_y^2+m_x^2.$$

若由(31)式或(32)式對於各種軸的不同方向計算各 m_x 值或 m_y 值登入圖七十四內則得閉合之曲線,該曲線對於橢圓發生密切的關係。



圖七十四

用此圖作更進一層的研究。設有一橢圓其長短半徑為 a, b, 在橢圓上有一點 Q, 其坐標為 u, v, 在該點上繪一切線。此切於橢圓之切線方程式為:

$$\frac{u}{a^2}x+\frac{v}{b^2}y=1 \qquad 或 \qquad ub^2x+va^2y=a^2b^2$$

寫成其他形式得

$$\frac{ub^2}{\sqrt{u^2b^4+v^2a^4}}x+\frac{va^2}{\sqrt{u^2b^4+v^2a^4}}y=\frac{a^2b^2}{\sqrt{u^2b^4+v^2a^4}},$$

如此則

$$\frac{a^2b^2}{\sqrt{u^2b^4+v^2a^4}}=p \tag{33}$$

p 代表橢圓之中心離切線之垂直距離。

又

$$\frac{ub^2}{\sqrt{u^2b^4+v^2a^4}}=\cos\theta,\qquad \frac{va^2}{\sqrt{u^2b^4+v^2a^4}}=\sin\theta,$$

此處 θ 代表 p 的方向角。由此得:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{a^2}{b^2}\;\frac{v}{u} \tag{34}$$

按橢圓之方程式爲

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1, \tag{35}$$

根據(34)及(35)式可將(33)式內之坐標 u, v 消去而得 p 與 θ 之關係式。此方程式表示 P 點之軌跡，P 代表由中心點向任意之橢圓之切線所引垂線之底點。

由(34)及(35)得:

$$u^2=\frac{a^4}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2\theta}\qquad v^2=\frac{b^4\operatorname{tg}^2\theta}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2\theta}$$

將上式代入(33)式加以簡化;則得

$$p^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta, \tag{36}$$

(36)式代表依橢圓中心爲根據的橢圓之底點曲線(Fusspunkts-kurve)。

若(36)式內之 p 換以 m_x，(36)式內之 a, b 換以 A 及 B，則(36)式變爲(31)式。同理若將 θ 換以 $\theta+90^\circ$ 則得(32)式用以計算 m_y。由此知對於任意不同的方向點之中誤差可用橢圓的底點曲線表明之。橢圓之本身稱曰中誤差橢圓(die mittlere Fehlerellipse)其長短半徑表示中誤差的最大及最小值。

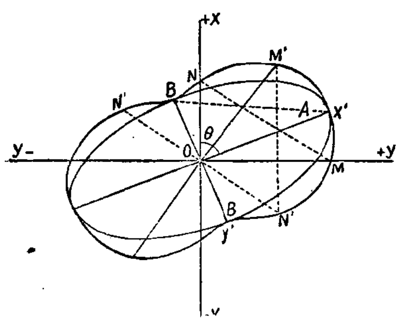


圖 七 十 五

上述各種情形可用圖七十五表顯之; $+x$ 及 $+y$ 代表原來的坐標系，在此坐標系內對於 O 點計算其

中誤差 OM 及 ON. 若用另一個坐標軸方向,則另爲計算其中誤差,例如 OM' 及 ON'. 對於所有一切的坐標系中得到一個特殊的坐標系位置稱曰 $x'y'$, 其中誤差之最大值爲 A, 最小值爲 B.

例　一

根據 186 頁上前方交會平差之結果試求誤差橢圓的原素 θ, A, B. 按 189 頁得

$$m=21{,}''5 \quad [aa]=+1170 \quad [ab]=-18 \quad [bb]=+1294$$

將以上各值代入(28)至(30)式,則得:

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{-2\cdot(-18)}{-(1170-1294)}=\frac{36}{124}=+0{,}2900$$

$$2\theta=16^\circ\,10' \qquad \theta=8^\circ\,5'$$

$$W^2=(1170-1294)^2+4(-18)^2=16672 \qquad W=129$$

$$D=(1170)(1294)-18^2=1514304 \qquad 2D=3030000$$

$$\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}=\frac{2593}{3030000}=0.000856$$

$$\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}=\frac{2335}{3030000}=0{,}000772$$

$$A=21{,}5\sqrt{0.000856}=0.63\,\mathrm{dm}$$

$$B=21{,}5\sqrt{0.000772}=0.60\,\mathrm{dm}$$

故該點之誤差橢圓之原素爲

$$A=\pm 0.063\,m \qquad B=\pm 0.060\,m \qquad \theta=8^\circ\ 5'$$

導入權係數

按 83 頁之末設 $p=1$ 並設 $D=[aa][bb]-[ab][ab]$　(37)

得 $[\alpha\alpha]=\frac{1}{[aa\cdot 1]}=\frac{[bb]}{D}=\frac{1}{p_x}, \qquad [\beta\beta]=\frac{1}{[bb\cdot 1]}=\frac{[aa]}{D}=\frac{1}{p_y}$　(38)

又按(46)頁(11)式應用於二個法方程式得

$$[\alpha\beta]=\frac{A_1}{[bb\cdot 1]}=-\frac{[ab]}{[aa]}\quad\frac{1}{[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}}$$

$$=\frac{-[ab]}{[aa][bb]-[ab][ab]}=\frac{-[ab]}{D}$$

又按 $$[ab]-\frac{[aa]}{[ab]}[bb]=[ab\cdot 1]$$ 故得

$$[\alpha\beta]=\frac{1}{[ab\cdot 1]}=\frac{-[ab]}{D} \tag{39}$$

又

$$\left.\begin{aligned}(m_x)^2&=\frac{m^2}{p_x}=[\alpha\alpha]\,m^2=\frac{[bb]}{D}\,m^2\\(m_y)^2&=\frac{m^2}{p_y}=[\beta\beta]\,m^2=\frac{[aa]}{D}\,m^2\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

(37)式之 D 稱曰係數的行列式 (Koeffizientendeterminante) 相當於權係數的行列式 Δ, 此 Δ 之式如下:

$$\Delta=[\alpha\alpha][\beta\beta]-[\alpha\beta][\alpha\beta] \tag{41}$$

D 與 Δ 之關係如下:

$$D\Delta=1 \tag{42}$$

今用權係數 $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ $[\beta\beta]$ 決定誤差橢圓的原素。應用上列各式得

$$[aa]=\frac{[\beta\beta]}{\Delta},\qquad [bb]=\frac{[\alpha\alpha]}{\Delta},\qquad -[ab]=\frac{[\alpha\beta]}{\Delta}, \tag{43}$$

此處 $$\Delta=[\alpha\alpha][\beta\beta]-[\alpha\beta][\alpha\beta]=\frac{1}{D} \tag{44}$$

代入(28)式得

$$\operatorname{tg}2\theta=\frac{2[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]-[\beta\beta]} \tag{45}$$

代入(29)式得

$$W^2=\frac{([\alpha\alpha]-[\beta\beta])^2+4[\alpha\beta]^2}{\Delta^2}=\frac{Q^2}{\Delta^2} \tag{46}$$

Q^2 代表上式之分子, 由此得

$$Q=W\Delta \quad 或 \quad Q=\frac{W}{D} \tag{47}$$

應用上列各式得相當於(28),(29),(30)以權係數所表示之式:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{tg}2\theta=\frac{2[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]-[\beta\beta]}\\&Q=\sqrt{([\alpha\alpha]-[\beta\beta])^2+4[\alpha\beta]^2}=\frac{2[\alpha\beta]}{\sin 2\theta}=\frac{[\alpha\alpha]-[\beta\beta]}{\cos 2\theta}\\&A^2=m^2\frac{[\alpha\alpha]+[\beta\beta]+Q}{2};\quad B^2=m^2\frac{[\alpha\alpha]+[\beta\beta]-Q}{2}\\&A^2+B^2=m^2([\alpha\alpha]+[\beta\beta])=M^2\end{aligned}\right\}\tag{48}$$

若(28)至(30)式或(48)中$[ab]=0$或$[\alpha\beta]=0$,則$2\theta=0°$或$=180°$, $\theta=0°$或$=90°$,其意謂橢圓之長短徑方向與坐標系軸相一致。若$[ab]=0$及$[aa]-[bb]=0$或$[\alpha\beta]=0$及$[\alpha\alpha]-[\beta\beta]=0$,則$\operatorname{tg}2\theta=\frac{0}{0}$,此卽代表不定,同時$W=0$及$Q=0$. 在此情形下誤差橢圓變爲圓形其半徑爲:

$$\left.\begin{aligned}A=B&=m\sqrt{\frac{1}{[aa]}}=m\sqrt{\frac{1}{[bb]}}\\ \text{或}\quad&=m\sqrt{[\beta\beta]}=m\sqrt{[\alpha\alpha]}=m_y=m_x\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

此圓同時代表底點曲線,點之中誤差沿任何方向爲一致。

計算誤差橢圓圖解表

在(28)至(30)式中設

$$\frac{[bb]}{[aa]}=\alpha\qquad\text{及}\qquad\frac{[ab]}{[aa]}=\beta,$$

則按(29)式得

$$\frac{W}{[aa]}=\sqrt{(\alpha-1)^2+4\beta^2}$$

又按(4)得

$$\frac{2D}{[aa]}=2[aa](\alpha-\beta^2).$$

用上列各式由(30)式得

$$A^2[aa]=\frac{\alpha+1+\sqrt{(\alpha-1)^2+4\beta^2}}{2(\alpha-\beta^2)}m^2\tag{50}$$

用同樣之方法得

$$B^2[aa]=\frac{a+1-\sqrt{(a-1)^2+4\beta^2}}{2(a-\beta^2)}m^2 \tag{51}$$

最後由(28)式得

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{-2\beta}{-(1-a)} \tag{52}$$

在(50)至(52)各式之右邊除 m^2 外僅與補助大小 a 及 β 發生關係，故可用作繪製圖解表之用。此種圖解表最著者爲 Eggert 氏表及 Fr. Reinhold 氏表（參考 Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 49, 1903 及 Z. f. V. 1929 年 609 至 614 頁）。第二種之圖解表見下 §6.

若採用權係數計算誤差橢圓則可用下列各式繪製圖解表:

設　　$\frac{[\beta\beta]}{[aa]}=a$　　及　　$\frac{[a\beta]}{[aa]}=\beta,$

則對於(48)式可立出:

$$\left.\begin{aligned}
&Q=[aa]\sqrt{(a-1)^2+4\beta^2}\\
&\frac{A^2}{[aa]}=\left(a+1+\sqrt{(a-1)^2+4\beta^2}\right)\frac{m^2}{2}\\
&\frac{B^2}{[aa]}=\left(a+1-\sqrt{(a-1)^2+4\beta^2}\right)\frac{m^2}{2}\\
&\operatorname{tg}2\theta=\frac{2\beta}{1-a}
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

§ 3　同時插入多點時決定誤差橢圓之原素

在雙點定位平差時得四個法方程式，經二次約化後得二個約化方程式僅含有未知數 dx_2 及 dy_2（此爲點 2 之修正值）。由該二個約化方程式之係數應用上節所述之(28)至(30)公式決定點 2 之誤差橢圓。次將原來之四個法方程式改寫使 dx_1 及 dy_1 作爲最後二個未知數，經過二次約化後得二個約化方程式僅含有未知數 dx_1 及 dy_1(此爲點 1 之修正值)，由該二方程式之係數決定點 1 之誤差橢圓.