高等院校力学类系列教材

弹性理论基础

(第2版)

下册

陆明万　罗学富

清华大学出版社　施普林格出版社

(京)新登字 158 号

内　容　简　介

本书(第 1 版)经教育部高等工业学校工程力学专业教学指导委员会审定,推荐为工程力学专业教学用书。1995 年获全国优秀教材二等奖。第 2 版分上、下两册出版,对第 1 版内容进行了全面的修订、调整、删减和增补。

书中以笛卡儿张量为工具系统阐述经典弹性力学的基本原理和方法,反映弹性力学近代研究成果。在讲述弹性力学各专门问题的章节中注意介绍实用解法和联系工程实际。精选典型解例,讲解解题思路和技巧,附设习题供练习。附录中讲述张量分析等必要的数学预备知识。上册主要内容有:应力理论、应变理论、本构关系,弹性理论的微分提法及一般原理,平面问题及柱形杆扭转问题,张量分析附录。下册主要内容有:复变函数解法,空间问题,能量原理,平板弯曲,热应力,弹性波,以及解析函数和变分法两个附录。

本书可作为工程力学专业本科生及有关专业研究生教材,亦可供从事强度计算和研究工作的科技人员参考。

书　名:弹性理论基础(第 2 版)下册
作　者:陆明万　罗学富
出版者:清华大学出版社　施普林格出版社
　　　　(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)
　　　　http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者:北京昌平环球印刷厂
发行者:新华书店总店北京发行所
开　本:787×1092 1/16　印张:16　字数:319 千字
版　次:2001 年 8 月第 2 版　2001 年 8 月第 1 次印刷
书　号:ISBN-7-302-04555-0/O・258
印　数:0001～6000
定　价:19.00 元

第2版前言

本书第1版出版后被全国多所高等院校和研究生院选为工程力学专业本科生和有关工程专业硕士研究生的教材或教学参考书。

根据各校在使用本书中积累的新的教学经验和提出的改进建议，本书第2版对第1版进行了全面的修订、调整、删减和增补。清华大学黄克智院士、姚振汉教授、薛明德教授，复旦大学金吾根教授，天津大学蔡宗熙教授，汕头大学谢慧才教授，铁道科学研究院刘越高工等都曾根据自己丰富的教学经验对本书提出过宝贵建议，在此我们表示衷心的感谢。

本书第2版分上、下两册出版。上册集中了采用笛卡儿张量讲述的弹性力学基本理论以及弹性力学中最典型的两类专门问题。包括绪论、应力理论、应变理论、本构关系、弹性理论的微分提法及一般原理、柱形杆问题和平面问题，共7章。附录“张量分析引论”为读者提供了简明、实用的数学预备知识。对曾经学过弹性力学简明教程，希望进一步学习运用张量分析工具掌握弹性力学一般理论的读者来说，上册是一本较好的入门教材。关于平面问题的论述，从三维基本方程出发严格地讨论了平面应力、平面应变状态的存在条件和判断方法，定义了适用面更广的广义平面应变状态。下册包括能量原理(即弹性理论的变分提法)、复变函数解法以及空间问题、平板弯曲问题、热应力、弹性波等4类专门问题。其中，作为弹性理论近似解法(例如有限单元法)之理论基础的能量原理是弹性力学中必修的核心内容；其余专门问题也都是相关应用领域的重要理论基础，但是因学时有限，各专业可以根据自己的特点选讲。附录A“解析函数的基本性质及运算”和附录B“泛函极值与变分法”分别为复变函数解法和能量原理两章提供了必备的数学知识。

本书内容较为丰富，除弹性力学基本教学要求外，还引进一些弹性力学近代研究

成果以及供研究生和优秀生因材施教用的补充内容。在第2版中基本内容用**宋体字**印刷，补充内容用**楷体字**印刷。

作者衷心感谢潘真微女士、陈朝晖先生为本书第1、2版的精心编辑和及时出版所付出的辛勤劳动。

陆明万 罗学富

于北京清华园

2001年5月

第1版前言

本书是为工程力学专业本科生、有关专业硕士研究生以及从事强度计算和研究工作的科技人员编写的弹性力学教材，也可作为各工程专业弹性力学课程的教学参考书。

在内容选择方面本书贯彻"高等工业学校工程力学专业教材委员会"拟定的基本精神，努力做到：

(1) 在系统讲授经典弹性力学基本概念、基本原理和基本方法的同时，及时反映弹性力学的近代进展，为阅读近代力学文献打好基础。为此，书中以笛卡儿张量为工具简洁地讨论弹性力学的一般理论；注意反映近代连续介质力学的研究成果和非线性弹性力学的初步知识；介绍了考虑热固耦合效应的热弹性基本理论；系统讲授了当代计算力学的理论基础——能量原理及相应解法。书中有些内容是为硕士研究生和因材施教的优秀大学生写的，讲课教师可根据具体情况决定取舍。

(2) 在弹性力学专门问题的讲述中注意介绍实用方法和联系工程实际。例如在平面问题中，通过基本方程从三维到二维的简化过程阐明了两类平面问题的简化前提和分类依据；结合小孔应力集中问题介绍了怎样把个别典型弹性力学问题的解答灵活应用于各种复杂的工程实际问题；介绍了求解欧拉型常微分方程的有效方法；最后对平面问题的解和解题方法作了小结。

为了巩固基本概念和训练解题能力，各专题部分都精选了一批典型解例。各章都安排了相应的习题。

(3) 充分运用高等数学中已经学过或在此基础上不难掌握的数学知识，根据各章节的特点选用较有效的数学工具。例如，用张量符号讲述一般理论，书写简洁，推导清晰，对物理意义的表达也比写出一大堆分量表达式更为明确直观。为了帮助读

者掌握这一工具，本书先在上册附录中介绍张量分析的基本知识，然后在正文中结合力学概念反复应用。另一方面，用常规符号处理弹性力学具体问题更为直观方便，本书的应用部分均采用常规符号。在下册附录 A 和 B 中从力学应用的角度介绍了复变函数和变分法的有关内容。

本书采用由一般到特殊的讲授方式，便于读者较快地掌握弹性理论的完整体系和内在规律，并在学习和处理各类具体问题时充分发挥自己的理解能力和创造精神。电子计算机的发展使近代力学能处理的问题越来越复杂，加强一般理论的基础训练已成为近代弹性力学教材的普遍趋势。在具体章节的安排和论述上，本书尽量贯彻由浅入深的原则并使力学概念与数学推导紧密结合。

以上是本书的努力方向，限于编者的水平和经验不足，虽几经易稿，书中仍会有不妥或错误之处，请有关专家和读者多多指正。

黄克智院士对本书的编写作了深入全面的指导，书中基本理论部分曾根据他 1986 年的讲课内容修改而成。本书吸取了清华大学工程力学系有关教授、副教授的多年教学经验。杜庆华院士曾对本书的初稿作过多方面的指导和帮助。徐秉业、余寿文、黄炎、姚振汉、薛明德教授也都热忱地提供了宝贵的教学经验和教学资料。在此谨向他们表示衷心的感谢。

本书编写时参考的国内外弹性力学教材、专著和文献按姓氏笔划或字母顺序列于书后。

胡海昌院士详细审阅了本书有关章节并给予热忱指导。本书各次送审稿的评阅人也都提出了许多宝贵意见。编者衷心感谢他们的指导和帮助。

编者感谢常亮明、王笃美、宋国华同志为本书初稿付出的辛勤劳动。

本书第 9 章、11 至 13 章、下册附录 A 和第 3、4 章的部分内容由罗学富执笔，其余章节由陆明万执笔。

陆明万
罗学富 于北京清华园

第 8 章 复变函数解法

弹性力学中的许多问题在数学上都归结为寻找调和函数或重调和函数的问题。例如，平面问题的应力函数是重调和函数，扭转问题的应力函数是调和函数加上一个泊松方程的特解，三维问题的基本解也由若干个调和函数及重调和函数组成。

复变函数论正是研究解析函数（它的实部和虚部都是调和函数）的重要数学分支，所以复变函数方法在弹性力学中受到了普遍的重视，并已用于解决各种工程问题。例如孔口应力集中，弹性接触和线弹性断裂力学等问题。

复变函数方法统一了弹性力学中的三种基本方法（位移法、应力法、应力函数法）和三类边值（力边界、位移边界、混合边界）问题。它同时适用于直角坐标、极坐标和任意正交曲线坐标系。对于处理多连通域、复杂几何形状和奇异应力场（例如裂纹尖端应力场）等问题更具特色。

本章结合平面问题介绍复变函数解法的基本原理和应用。较深入的内容可参看穆斯海里什维里（Мусхелишвили, Н. И.）的专著[93]。有关数学基础见附录 B。

8.1 平面问题的复格式

本节首先把平面问题的基本方程和边界条件都写成用复变函数表示的形式，简称**复格式**。这里以应力函数法为基础来导出复格式。用位移法或应力法也能导出相同的复格式。

8.1.1 复应力函数与复势

对于无(常)体力平面问题可以引进艾里应力函数 U(在第7章中曾记为 ϕ),它满足

$$\nabla^2\nabla^2 U = 0 \qquad \text{在域 } \Omega \text{ 内} \tag{8.1}$$

$$\begin{cases} U = p(s) + \text{const} \\ \dfrac{\partial U}{\partial n} = q(s) \end{cases} \qquad \text{在力边界 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \tag{8.1a}$$

其中,$p(s)+\text{const}$ 是边界载荷的主矩 M_Γ,$q(s)$ 是边界载荷主矢量的切向矢量 R_s 的负值,它们都是边界弧长 s 的函数。而 $U=U(x,y)$ 是坐标 x 和 y 的实函数。

在复变函数解法中,把物体所在的**物理平面**($x-y$)看作复平面,引进复自变量 $z=x+\mathrm{i}y$,于是坐标 x 和 y 可以等价地用复变量 z 及其共轭 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 来代替。应力函数 $U(x,y)$ 也可形式地看作 z 和 $\bar{z}$ 的函数。下面来导出 U 的具体形式。

四阶重调和方程(8.1)可分解成两个二阶方程:

$$\nabla^2 P = 0; \qquad P = \nabla^2 U \tag{8.2}$$

第一个方程表明 $P(x,y)$ 是调和函数,可以作为某个解析函数 $f(z)$ 的实部

$$f(z) = P + \mathrm{i}Q$$

根据解析函数的性质,$Q(x,y)$ 是 $P(x,y)$ 的共轭调和函数。由哥西-黎曼条件,当实部 P 给定后,Q 可以确定到只差一个实常数的程度。上式的逆关系是

$$P = \frac{1}{2}[f(z) + \overline{f(z)}] \tag{8.3}$$

这是调和方程用复变函数表示的一般解,$\overline{f(z)}$ 是 $f(z)$ 的共轭。

再看(8.2)式的第二个方程。利用形式导数(附录(A.31)式)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \tag{8.4}$$

可将调和算子改写成复格式

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2 \\ &= 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \end{aligned} \tag{8.5}$$

于是(8.2)第二方程成为

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{2}[f(z) + \overline{f(z)}]$$

为了方便,记

$$\phi'(z) = \frac{1}{4}f(z) \quad \text{即} \quad \phi(z) = \frac{1}{4}\int f(z)\mathrm{d}z \tag{8.6}$$

则有

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{2}[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \tag{8.7}$$

对 z 和 $\bar{z}$ 分别积分一次得：(参见附录(A.36)式～(A.39)式)

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2}[\bar{z}\phi'(z) + \overline{\phi(z)} + \psi(z)] \tag{8.8}$$

$$U = \frac{1}{2}[\bar{z}\phi(z) + z\overline{\phi(z)} + \int \psi(z)\mathrm{d}z + \overline{g(z)}] \tag{8.8a}$$

由于应力函数 U 是实函数，(8.8a)式右端四项应互为共轭。其中前两项已互为共轭，所以要求：

$$\overline{g(z)} = \int \overline{\psi(z)\mathrm{d}z} = \int \overline{\psi(z)}\mathrm{d}\bar{z}$$

令

$$\Phi = [\bar{z}\phi(z) + \int \psi(z)\mathrm{d}z] \tag{8.9a}$$

称为**复应力函数**，则由(8.8a)和(8.9a)得

$$U = \frac{1}{2}(\Phi + \bar{\Phi}) = \mathrm{Re}\Phi$$

$$= \mathrm{Re}[\bar{z}\phi(z) + \int \psi(z)\mathrm{d}z] \tag{8.9b}$$

即艾雷应力函数是复应力函数的实部。再令

$$\chi(z) = \int \psi(z)\mathrm{d}z; \quad \psi(z) = \frac{\mathrm{d}\chi(z)}{\mathrm{d}z} = \chi'(z) \tag{8.10}$$

(8.9b)式成

$$U = \mathrm{Re}[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)] \tag{8.9}$$

这就是著名的**古萨**(Goursat)**公式**。由于后面绝大多数公式与 $\psi(z)$ 直接相关而不用求 $\chi(z)$，本书定义解析函数 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 为**复势**①。

古萨公式给出了重调和方程的复变函数一般解，把求解弹性力学平面问题归结为寻找两个满足边界条件的解析函数(复势)的问题。

8.1.2 应力组合的复势表示

平面问题的应力分量可用艾里应力函数 $U(x,y)$ 的二阶偏导数表示

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

① 也有些文献把函数 $\phi(z)$ 和 $\chi(z)$ 记为 $\psi(z)$ 和 $\chi(z)$，或记为 $\phi(z)$ 和 $\theta(z)$。

形式上把 U 看作复变量 z 和 $\bar{z}$ 的函数，利用形式偏导数

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right);\qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

可得

$$\begin{aligned}4\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\bar{z}}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\\&=\sigma_y+\sigma_x\\4\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2\mathrm{i}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\\&=\sigma_y-\sigma_x+2\mathrm{i}\tau_{xy}\\4\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 U=\sigma_y-\sigma_x-2\mathrm{i}\tau_{xy}\end{aligned}\tag{8.11}$$

可见 U 对 z 及 $\bar{z}$ 的二阶形式偏导数与应力组合有关。由于 U 本质上是个实函数，$\bar{U}=U$，$\left(\overline{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}}\right)=\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}$，所以(8.11)第三式是第二式的共轭，并不独立。把(8.7)和(8.8)式代入(8.11)式，得到**第一、第二应力组合**的复势表达式：

$$\begin{aligned}\sigma_y+\sigma_x&=4\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\bar{z}}=2[\phi'(z)+\overline{\phi'(z)}]=4\mathrm{Re}[\phi'(z)]\\\sigma_y-\sigma_x+2\mathrm{i}\tau_{xy}&=4\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=2[\bar{z}\phi''(z)+\psi'(z)]\end{aligned}\tag{8.12}$$

其中第一应力组合就是第一应力不变量。如果参考截面从 y 轴算起画一个莫尔应力圆，如图 8-1 所示，把 σ-τ 平面看作复平面，则第一和第二应力组合的一半分别相当于该应力圆的圆心 C 和圆周点 A。

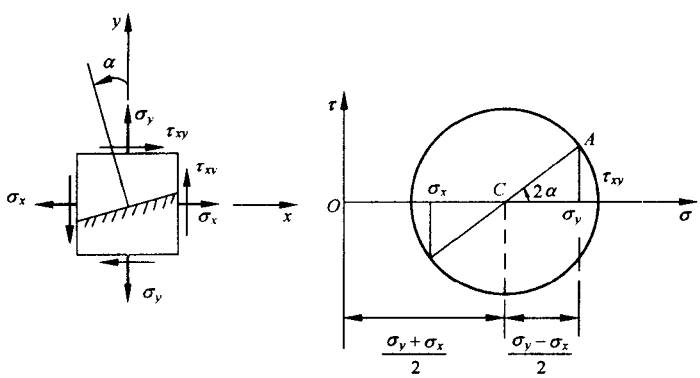

图 8-1

只要找到复势 ϕ 和 ψ，代入(8.12)式就能得到两个应力组合。于是剪应力 τ_{xy} 可由第二组合的虚部确定，而正应力 σ_x 和 σ_y 可由第二组合的实部与第一组合联立求解。

8.1.3 位移组合的复势表示

当涉及应变和位移分量时，就须区分平面应力和平面应变两种情况。通过弹性常数替换，这两种情况可具有统一的表达形式。对平面应变情况，其应力-应变关系为

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy}$$

利用(8.12)式可得**第一、第二应变组合**的复势表达式为

$$\begin{aligned} 2G(\varepsilon_y + \varepsilon_x) &= (1-2\nu)(\sigma_y + \sigma_x) \\ &= 4(1-2\nu)\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = 4(1-2\nu)\mathrm{Re}[\phi'(z)] \\ 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_x + 2\mathrm{i}\varepsilon_{xy}) &= \sigma_y - \sigma_x + 2\mathrm{i}\tau_{xy} \\ &= 4\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \tag{8.13}$$

由应变组合可进一步导出位移组合。把第二应变组合写成

$$\begin{aligned} &2G(\varepsilon_y - \varepsilon_x + 2\mathrm{i}\varepsilon_{xy}) \\ &= 2G\left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \\ &= 2G\left[-\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)u + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)v\right] \\ &= -4G\frac{\partial}{\partial z}(u - \mathrm{i}v) \end{aligned}$$

代入(8.13)第二式得

$$-4G\frac{\partial}{\partial z}(u - \mathrm{i}v) = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

两边除以(−2)，并取共轭，注意到 U 本质上是实函数，有

$$2G\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u + \mathrm{i}v) = -2\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}$$

对 $\bar{z}$ 积分得位移组合

$$2G(u + \mathrm{i}v) = -2\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + F(z) \tag{8.14}$$

其中 $F(z)$ 可由第一应变组合确定。把第一应变组合改写成

$$2G(\varepsilon_x+\varepsilon_y)=2G\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$=2G\left[\frac{\partial}{\partial z}(u+\mathrm{i}v)+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u-\mathrm{i}v)\right]$$

注意到$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u-\mathrm{i}v)=\overline{\frac{\partial}{\partial z}(u+\mathrm{i}v)}$，把(8.13)第一式和(8.14)式分别代入左、右端并项，并利用(8.7)式得

$$F'(z)+\overline{F'(z)}=8(1-\nu)\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial \bar{z}}$$
$$=4(1-\nu)[\phi'(z)+\overline{\phi'(z)}]$$

可见复变函数 $F'(z)$和 $4(1-\nu)\phi'(z)$的实部相同，虚部则差一个实常数，因而

$$F'(z)=4(1-\nu)\phi'(z)+\mathrm{i}c$$

积分后得

$$F(z)=4(1-\nu)\phi(z)+\mathrm{i}cz+\gamma \tag{8.15}$$

其中，实常数 c 与刚体转动有关，复常数 $\gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 与刚体平移有关(见下节讨论)，它们不影响应力，可以略去不计。

把(8.8a)式对 $\bar{z}$ 求导得

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}[\phi(z)+z\overline{\phi'(z)}+\overline{\psi(z)}] \tag{8.15a}$$

和(8.15)式一起代入(8.14)式，得到**位移组合**的复势表达式

$$2G(u+\mathrm{i}v)=\kappa\phi(z)-z\overline{\phi'(z)}-\overline{\psi(z)} \tag{8.16}$$

其中

$$\kappa=\begin{cases}3-4\nu & \text{平面应变}\\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \text{平面应力}\end{cases} \tag{8.16a}$$

如果有了复势 ϕ 和 ψ，代入上式就得位移组合，分成实部和虚部就可算出位移分量 u 和 v。

8.1.4 边界条件的复势表示

设物体占有平面域 Ω，其边界曲线为 Γ。Γ 的走向以物体位于边界线左侧为正，即外边界逆钟向为正，内边界顺钟向为正，如图 8-2 所示。为了明确区分，内点和边界点的坐标(复变量)分别用 z 和 t 表示。

在位移边界 Γ_u 上，边界位移值 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 给定。在(8.16)式中取边界点坐标，即令 $z=t$，就得**位移边界条件**的复势表达式

$$\kappa\phi(t)-t\overline{\phi'(t)}-\overline{\psi(t)}=2G(\bar{u}+\mathrm{i}\bar{v})\quad \text{在 }\Gamma_u\text{ 上} \tag{8.17}$$

在力边界 Γ_σ 上，边界应力值 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$ 给定，它是边界线正向的右部对左部(物体)的表面作用力。任选某边界点 A 为参考点，B 为任意边界点，则根据应力函数的边界性质，边界载荷主矢量的分量为

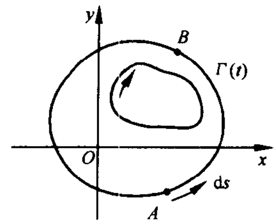

图 8-2

$$R_x = \int_A^B \widetilde{X} \mathrm{d}s = \left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B; \quad R_y = \int_A^B \widetilde{Y} \mathrm{d}s = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_A^B$$

引进边界力组合

$$\begin{aligned} \mathrm{i}(R_x + \mathrm{i}R_y) &= \mathrm{i}\int_A^B (\widetilde{X} + \mathrm{i}\widetilde{Y})\mathrm{d}s \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)U\right]_A^B = \left[2\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right]_A^B \end{aligned}$$

利用(8.15a)式得到

$$\mathrm{i}(R_x + \mathrm{i}R_y) = [\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_A^B$$

把上式右端在起始点 $A(z=t_A)$ 处的值记为

$$k_A = \phi(t_A) + t_A\overline{\phi'(t_A)} + \overline{\psi(t_A)}$$

它是个复常数。记边界点 B 的坐标为 t，于是**力边界条件**的复势表达式为

$$\begin{aligned} &\phi(t) + t\overline{\phi'(t)} + \overline{\psi(t)} - k_A \\ &= \mathrm{i}\int_A^B (\widetilde{X} + \mathrm{i}\widetilde{Y})\mathrm{d}s \qquad \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \end{aligned} \tag{8.18}$$

应注意，这是边界上合力(而不是应力)的边界条件。下节将指出，复势中含有一个可供任意选择的复常数。若把 k_A 并入这任意复常数，则对于单连通域可令上式中的 $k_A=0$。对于多连通域，则只能在一条闭合边界上(例如外边界上)令 $k_A=0$。

8.1.5 坐标转换的复格式

先讨论直角坐标系，如图 8-3 所示。设新坐标 $x'oy'$ 相对于老坐标 xoy 沿逆钟向转过 α 角，坐标转换关系为

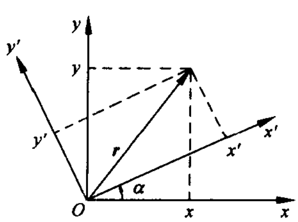

图 8-3

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

把 $x-y$ 平面看作复平面，复变量的转换关系为

$$\begin{aligned} x' + \mathrm{i}y' &= x[\cos(-\alpha) + \mathrm{i}\sin(-\alpha)] \\ &\quad + \mathrm{i}y[\cos(-\alpha) + \mathrm{i}\sin(-\alpha)] \\ &= (x + \mathrm{i}y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \end{aligned}$$

即

$$z' = z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \tag{8.19}$$

这就是**直角坐标转换关系**的复格式，它表明在新坐标系中复变量的幅角减少了 α，见图 8-3。类似地可由位移分量转换关系

$$u' = u\cos\alpha + v\sin\alpha$$
$$v' = -u\sin\alpha + v\cos\alpha \tag{8.20a}$$

得位移组合转换关系

$$u' + \mathrm{i}v' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}(u + \mathrm{i}v) \tag{8.20}$$

由应力分量转换关系

$$\sigma_{x'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$
$$\sigma_{y'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \tag{8.21a}$$
$$\tau_{x'y'} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

得应力组合转换关系

$$\sigma_{y'} + \sigma_{x'} = \sigma_y + \sigma_x \tag{8.21}$$
$$\sigma_{y'} - \sigma_{x'} + 2\mathrm{i}\tau_{x'y'} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}(\sigma_y - \sigma_x + 2\mathrm{i}\tau_{xy})$$

综合起来，在新坐标系中矢径、位移以及其他矢量的幅角都减少 α；第一应力组合及其他不变量保持不变；第二应力组合的幅角增加 2α（因为图 8-1 中莫尔圆的中心角为 2α）。

位移和应力组合从直角坐标系 $x-y$ 到任意**正交曲线坐标系** $\xi-\eta$ 的转换关系，形式上与(8.20)、(8.21)式完全相同。

位移
$$u_\xi + \mathrm{i}u_\eta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}(u + \mathrm{i}v)$$
应力
$$\sigma_\eta + \sigma_\xi = \sigma_y + \sigma_x \tag{8.22}$$
$$\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2\mathrm{i}\tau_{\xi\eta} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}(\sigma_y - \sigma_x + 2\mathrm{i}\tau_{xy})$$

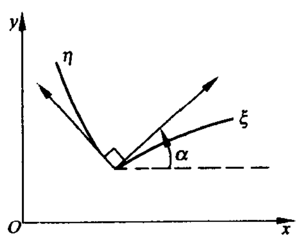

图 8-4

区别仅在于，现在的 α 角是坐标线 ξ 的正向切线与 x 轴之夹角，见图 8-4，并且 α 是随点而异的。当取 $\xi = r$，$\eta = \theta$，且 $\alpha = \theta$ 时，就得到从直角坐标到极坐标的转换关系

$$u_r + \mathrm{i}u_\theta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(u + \mathrm{i}v)$$
$$\sigma_\theta + \sigma_r = \sigma_y + \sigma_x$$
$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2\mathrm{i}\tau_{r\theta} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}(\sigma_y - \sigma_x + 2\mathrm{i}\tau_{xy}) \tag{8.23}$$

应该指出，坐标转换关系(8.19)式不能推广到正交曲线坐标系中去，因为曲线坐标 ξ 和 η 并不是矢径的分量。

8.1.6 小结

弹性力学平面问题归结为在边界条件(8.17)和(8.18)下，寻找两个解析函数，即复势 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的问题。对于无(常)体力问题，无论从位移法、应力法或应力函数法出发，都得到同样的结论。所以复变函数解法把弹性力学的三种基本解法统一了起来。

一旦找到 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$，应力、应变和位移分量就可由(8.12)、(8.13)和(8.16)式确定。在计算位移时，仅需复势及其一阶导数，而不必像第3章那样进行复杂的积分运算。

位移边界和力边界的复势表达式(8.17)和(8.18)除了系数不同外，基本结构完全相同。所以复变函数解法可以统一处理弹性力学的三类边值问题。

利用直角坐标，极坐标和正交曲线坐标系中的转换式(8.22)和(8.23)，以及以后介绍的保角变换，复变函数解法又具有灵活处理各种坐标系和复杂几何形状的优点。

8.2 单连域中复势的确定程度

第7章曾指出，在物体内的应力确定后，艾里应力函数仍可差一个任意的线性函数。那么组成复应力函数的两个复势 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 能确定到什么程度呢？为了回答这个问题，我们考察两组表示同一应力状态的复势 $\phi(z)$、$\psi(z)$ 和 $\phi_1(z)$、$\psi_1(z)$，看它们之间允许有多大差别。把这两组复势同时代入(8.12)式，得到

$$\begin{aligned}\sigma_y+\sigma_x &= 4\mathrm{Re}\phi'(z) = 4\mathrm{Re}\phi'_1(z)\\ \sigma_y-\sigma_x+2\mathrm{i}\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]\\ &= 2[\bar{z}\phi''_1(z)+\psi'_1(z)]\end{aligned}\tag{8.24}$$

第一式表明，解析函数 $\phi'(z)$ 与 $\phi'_1(z)$ 实部相等，因而允许差一个虚常数

$$\phi'_1(z) = \phi'(z)+\mathrm{i}c$$

两边积分后得到

$$\phi_1(z) = \phi(z)+\mathrm{i}cz+\gamma\tag{8.25}$$

其中 c 是任意实常数，$\gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是任意复常数，它们与(8.15)式的 c 和 γ 差一系数 $4(1-\nu)$。

把(8.25)式求导两次，得 $\phi''_1(z)=\phi''(z)$。所以(8.24)式第二式若成立必要求

$$\psi'_1(z) = \psi'(z)$$

两边积分后得到

$$\psi_1(z) = \psi(z)+\gamma^*\tag{8.26}$$

其中 $\gamma^*=\alpha^*+\mathrm{i}\beta^*$ 是另一个任意复常数。

由(8.25)和(8.26)式可见，当应力给定后，复势并未完全确定。$\phi(z)$ 允许差一个复线性函数 $\mathrm{i}cz+\gamma$，其中 c 为任意实常数，γ 为任意复常数。$\psi(z)$ 允许差一个任意复常数 γ^*。

如果给定物体的位移场，则不仅应力完全确定，而且刚体运动也被约束。这时能否把任意常数 c，γ 和 γ^* 确定下来呢？设由复势 $\phi(z)$，$\psi(z)$ 和 $\phi_1(z)$，$\psi_1(z)$ 算得的位移组合分别为 $u+\mathrm{i}v$ 及 $u_1+\mathrm{i}v_1$，把(8.25)和(8.26)式代入(8.16)式得

$$
\begin{aligned}
2G(u_1+\mathrm{i}v_1) &= \kappa[\phi(z)+\mathrm{i}cz+\gamma] \\
&\quad - z\,\overline{[\phi'(z)+\mathrm{i}c]} - \overline{[\psi(z)+\gamma^*]} \\
&= 2G(u+\mathrm{i}v)+(\kappa+1)\mathrm{i}cz+\kappa\gamma-\bar{\gamma}^*
\end{aligned}
\tag{8.27}
$$

当位移给定时，由两组复势应算出同一位移场，即 $u_1+\mathrm{i}v_1=u+\mathrm{i}v$。所以上式右端第一项与左端相消，而第二项($z$ 的线性项)和后两项(常数项)应分别为零。由此得

$$
c=0,\quad \kappa\gamma-\bar{\gamma}^*=0 \tag{8.28}
$$

由此可见，当给定位移后，复势中仍有一个复常数 γ 或 γ^* 可以任意选择。

在应用中可以根据方便的原则来选择这些未定常数。例如，如果把坐标原点 O 选在域 Ω 内，则当给定应力时，可以调整常数 c,γ 和 γ^*，使

$$
\phi(0)=0;\quad \psi(0)=0;\quad \mathrm{Im}[\phi'(0)]=0 \tag{8.29}
$$

当给定位移时，可以调整 γ 或 γ^*，使

$$
\phi(0)=0 \text{ 或 } \psi(0)=0 \tag{8.30}
$$

于是复势就完全确定了。

为了说明常数 c,γ 和 γ^* 的物理意义，把(8.27)式分解成实部和虚部并除以 $2G$ 后得到

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u-\omega y+u_0 \\
v_1 &= v+\omega x+v_0
\end{aligned}
\tag{8.31a}
$$

其中

$$
\omega=\frac{\kappa+1}{2G}c;\quad u_0=\frac{\kappa\alpha-\alpha^*}{2G};\quad v_0=\frac{\kappa\beta+\beta^*}{2G} \tag{8.31}
$$

图 8-5 说明，u_0,v_0 是物体内某点 P 随坐标原点平移到 P'点时的刚体位移，ω 是物体的刚体转动，于是 P 点到达最终位置 P''。如果不计(8.31a)式中由变形引起的位移 u 和 v，则 u_1 和 v_1 就是图中从 P 到 P''点的刚体运动。所以，由(8.31)式可知，实常数 c 表示刚体转动，复常数 γ 和 γ^* 与刚体平移有关。当给定位移时，刚体运动被限制，由 $u_0=v_0=\omega=0$，同样可导出(8.28)式的结论。

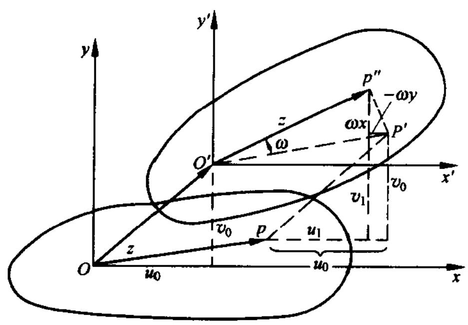

图 8-5

8.3 多连域中复势的多值性

多连域问题在工程中有重要应用，例如对孔口应力集中问题的研究成果为工程结构的局部强度设计提供了依据。复变函数解法是处理多连通域问题的一种有效方法。

考虑图 8-6 所示有 m 个孔洞的平面多连通域 $\Omega(z)$。它的外边界 $\Gamma_0(t)$ 以逆钟向为正，内边界 $\Gamma_1(t),\cdots,\Gamma_k(t),\cdots,\Gamma_m(t)$ 以顺钟向为正，即物体始终在边界线的左侧。外载荷是右部（域外）对左部（域内）的作用力。z_k 是第 k 个孔洞内（Ω 域外）任意的点。

解析函数（因而复势）在单连域内是单值的，但在多连域内则可能多值。下面首先分析复势多值性的特点，然后将多值部分分离，并确定下来。

在载荷作用下，物体内必存在唯一确定的应力状态。根据应力单值条件，就能判明复势多值性的特点。第一应力组合复势表达式

$$\sigma_y + \sigma_x = 4\mathrm{Re}\phi'(z)$$

的左端 $\sigma_y+\sigma_x$ 必单值，所以右端 $\phi'(z)$ 的实部也应单值。当解析函数的实部确定后，虚部能差一个常数，所以沿包含某内孔 k 的闭合曲线 Γ'_k 绕行一周后，$\phi'(z)$ 允许有一个常虚数增量 $2\pi\mathrm{i}A_k$，其中 A_k 为实常数，系数 2π 是为方便而加上的。若域内有 $k=1,\cdots,m$ 个孔洞，则可能有 m 个这样的常虚数多值项。复势的这种常虚数多值性的特点正好能用复对数函数 $\ln z$ 来描述。例如函数

$$\begin{aligned} A_k\ln(z-z_k) &= A_k\ln(|z-z_k|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}) \\ &= A_k\ln|z-z_k| + A_k\mathrm{i}\theta_k \end{aligned} \tag{8.32}$$

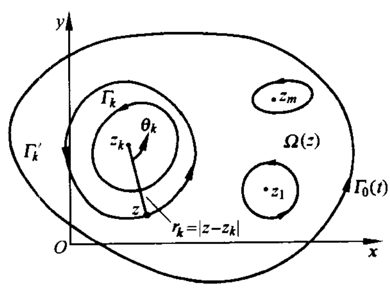

图 8-6

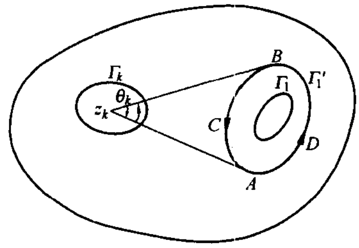

图 8-7

的右端第一项是单值的，而第二项则可能多值。当 z 点沿不包含 z_k 点（例如绕孔洞 Γ_1）的闭合曲线 Γ'_1 绕行一周时，从 A 到 B 阶段 θ_k 沿逆钟向增大，从 B 到 A 时又沿顺钟向返回 $\theta_k=0$（见图 8-7），因而函数(8.32)保持单值。但是当 z 点沿包围 z_k 点的