

C语言在信号处理中的 设计与实现

冯 明 郑 菁 王 芬 编
希 望 审 校



北京希望电脑公司计算机技术丛书

C 语言在信号处理中的设计与实现

冯明 郑菁 王芬 编
希望 审校

海洋出版社

内 容 提 要

本书共分三个部分。第一部分介绍如何用带阻尼的简谐振荡器模拟钟群，这部分将给出一个程序，它可以从磁盘上读入乐曲文件，并按其产生相应的乐曲波形。第二部分包括数字信号处理中常用的结构化编程方法和信号处理的基本理论，如频域、傅里叶变换等概念。本书用群论作为数学工具对傅里叶变换进行精练地表述。这一点与其它著作不同，这可能会给读者带来新的启发。第三部分通过对钟群和钢琴波形的分析来设计滤波器并介绍实现滤波器的 C 语言编程技术。在第十七章中还介绍了一种更复杂然而应用也更广泛的滤波器——自适应滤波器，以便使读者了解数字信号处理的较新的发展。需要本书的用户，请直接与北京 8721 信箱联系，电话 2562329，邮编 100080。

(京)新登字 087 号

责任编辑： 阎世尊

C 语言在信号处理中的设计与实现

冯明 郑菁 王芬 编
希望 审校

海洋出版社(北京市复兴门外大街 1 号)

海洋出版社发行 双青印刷厂印刷

开本: 787X1092 毫米 1/16 印张: 29.25 字数: 416 千字

1992 年 1 月第一版 1992 年 1 月第一次印刷

印数: 1-3000 册 定价: 17.00 元

ISBN7-5027-2959-3 / TP.149

前 言

对于从事信号处理的人来说, 仅仅学习一些理论和收集实验数据是不够的。数字信号处理的成功的实践要求理解有关处理对象的基本原理以及掌握各种应用中的编程技术。本书的目的就是在这二方面帮助读者达到更高的水平。

什么是学习数字信号处理的原理的最佳途径? 什么是掌握现代 C 语言编程的最好方法? 对大多数人来说, 二者的答案都是实践。阅读理论书籍和论文固然是重要的, 但是脱离了实践, 这些理论也就没有用处了。

本书的内容就是围绕这二个目的安排的。第一个课题是开发一个音乐合成器, 并由此介绍数字信号处理的原理以及结构化的编程方法。第二个课题是建立在第一个课题的基础上的。通过对钟群和钢琴的数字波形的分析, 寻找对这二种乐器进行最佳逼近的数字滤波器。本书内容的组织模仿了研究者研究新问题的过程, 对于每个问题都要阐明它在整个课题中的重要性。这种面向课题的方法也会促进计算机编程技术与数字信号处理之间的自然的结合。多数有关信号处理的书或是只讲理论而不涉及程序, 或是介绍程序而很少提及理论。

目前很多高等院校中都教授信号处理理论。和院校所用的教材相比, 本书是较浅显的。本书不能代替高校的教材和信号处理的专著, 但对于追求个人兴趣课题的人来说, 本书无疑是一本最好的书。

本书共分三个部分。第一部分介绍如何用带阻尼的简谐振荡器模拟钟群。这部分将给出一个程序, 它可以从磁盘上读入乐曲文件, 并按其产生相应的乐曲波形。第二部分包括数字信号处理中常用的结构化编程方法和信号处理的基本理论, 如频域、傅里叶变换等概念。本书用群论作为数学工具对傅里叶变换进行精练地表述。这一点与其它著作不同, 这可能会给读者带来新的启发。第三部分通过对钟群和钢琴波形的分析来设计滤波器并介绍实现滤波器的 C 语言编程技术。在第十七章中还介绍了一种更复杂然而应用也更广泛的滤波器——自适应滤波器, 以便使读者了解数字信号处理的较新的发展。

数字信号处理是一门复杂的学科, 它要求研究者具有坚实的数学理论基础。但本书对于数学理论的阐述采用了深入浅出的方法, 以便使那些不具备高深数学理论知识的读者也能顺利地阅读本书。本书通过日常生活中的例子引入信号处理的一些深奥概念(如混频), 这将使初学者感到有趣并易于接受。而书中所介绍的现代 C 语言编程方法, 不但适用于数字信号处理, 而且在其它软件的应用领域中也会对读者有所裨益。

目 录

第一部分 模拟钟和钟群乐器演奏程序

第一章 数字信号处理的基本原理	2
1.1 离散时间域的频率和波形	2
1.2 奈奎斯特频率: 最高的离散时间频率	4
1.3 混迭和带通采样	4
1.4 精确的离散时间解	5
1.5 立足于基本原理	5
第二章 连续时间简谐振荡器	6
2.1 线性和时不变性	6
2.2 两种简谐振荡器	7
2.3 简化为一阶方程	7
2.4 矩阵方程概述	9
2.4.1 二阶方程的矩阵形式	10
2.4.2 矩阵方程的一般形式	11
2.4.3 求解矩阵方程: 一般情况	12
2.5 矩阵法在质量—弹簧系统中的应用	15
2.6 三种类型解	16
2.6.1 过阻尼	17
2.6.2 临界阻尼 γ	17
2.6.3 欠阻尼	18
第三章 离散时间简谐振荡器	20
3.1 一阶离散时间解	20
3.1.1 一阶齐次方程	20
3.1.2 一阶强迫函数	21
3.1.3 一阶, 积分近似式	22
3.1.4 一阶脉冲响应	23
3.1.6 一阶, 纯音调	23
3.2 离散时间矩阵解	25
3.3 离散时间间歇振荡器	27
3.4 二阶近似	28
3.5 结论	32

第四章 钟和管风琴	33
4.1 方程	33
4.2 模拟钟声的程序	35
4.3 管风琴	36
4.4 标定波形	39
第五章 钟群	42
5.1 方案设计	42
5.2 封闭的钟	42
5.2.1 C 语言的结构体	42
5.2.2 类型定义	43
5.2.3 钟的结构体	43
5.2.4 设计	44
5.2.5 头文件	44
5.2.6 程序	45
5.2.7 函数原型	47
5.2.8 其它程序	48
5.2.9 效益问题	50
5.3 分析、演奏和作图	50
5.4 记谱法	51
5.4.1 留给读者的课题	53
5.4.2 获得音频输出	53

第二部分 理论基础

第六章 矢量、矩阵及程序	55
6.1 关于新的标准	55
6.1.1 类型检测	56
6.1.2 可调长度	57
6.2 一种简化矢量表示	57
6.3 效率	60
6.4 一些可能的选择	63
6.5 矩阵	66
6.6 矩阵乘法	70
6.7 矩阵乘法的效率	72
第七章 函数界面的标准	77
7.1 头文件和程序原型	77
7.2 库函数的举例说明	77

7.3	出错报告和控制	79
7.4	复数	80
7.5	宏	81
7.6	矢量	82
第八章 傅里叶变换、测不准原理和卷积		86
8.1	傅里叶变换简介	86
8.2	括号算符	88
8.3	正交理论	89
8.4	预备知识	90
8.4.1	函数算子	90
8.4.2	平方可积函数	92
8.4.3	L_2 中函数的加法和乘法	93
8.5	傅里叶变换理论	94
8.6	脉冲方波	95
8.7	注意事项	96
8.8	关于括号算符的进一步讨论	97
8.9	幂等和其它性质	98
8.10	测不准关系	101
8.11	最小测不准	107
8.12	一些有用的推广	109
8.13	变换函数	110
8.14	卷积	111
第九章 离散傅里叶变换		115
9.1	主要思路	115
9.1.1	正交函数	115
9.1.2	示例	116
9.1.3	充分函数	117
9.1.4	摘要	117
9.2	四种情形之下的傅里叶变换	117
9.2.1	一维, N 点: $G = Z / NZ$	118
9.2.2	一维, 可数点: $G = Z$	120
9.2.3	有限期间: $G = R / Z$	122
9.2.4	二维, $N \times M$: $G = Z / NZ \times Z / MZ$	122
第十章 数据窗口		124
10.1	有限时间的限制	124
10.1.1	区间的限制	124

10.1.2 数据的插入	125
10.2 窗口	125
10.2.1 三种窗口函数	125
10.2.2 余弦平方窗口的测不准乘积	126
10.3 有限窗口的测不准乘积	130
10.4 实际窗口对比	133
10.4.1 两正弦波的和	133
10.4.2 脉冲响应	135
10.4.3 其它窗口形状	142
10.5 IIR, FIR 和 DFT 滤波器	143
第十一章 对傅里叶变换的统一认识	145
11.1 群及其性质	145
11.1.1 群定义和示例	145
11.1.2 子群、陪集和商群	147
11.1.3 陪集的表示与模运算	150
11.1.4 同态	150
11.1.5 同构	151
11.1.6 直积	153
11.2 群的积分	155
11.3 特征群	160
11.4 离散卷积	162
11.5 群的傅里叶变换	164
11.6 傅里叶变换的特殊情形	168
11.6.1 一维, N 点: $G = Z / NZ$	168
11.6.2 一维, 可数点: $G = Z$	169
11.6.3 有限周期: $G = R / Z$	171
11.6.4 二维, $N \times M$: $G = Z / NZ \times Z / MZ$	171
第十二章 快速傅里叶变换	172
12.1 强力法	172
12.2 快速方法	172
12.3 快速傅里叶变换	175
12.3.1 组合序列	175
12.3.2 存储的依据	175
12.3.3 计算定理 12.4 的优点	179
12.3.4 一元: $G = Z / NZ$	180
12.3.5 快速傅里叶变换的预算法	183
12.4 两个实向量的快速傅里叶变换	189

第三部分 波形与滤波器

第十三章 从波形到滤波器	194
13.1 引言	194
13.2 脉冲响应说明一切	195
13.2.1 用脉冲响应再现波形	196
13.2.2 FIR 技术	197
13.2.3 IIR 技术	198
13.3 波形的频率分析	198
13.3.1 波形的稳定段	199
13.3.2 增益处理	201
13.3.3 钟群	205
13.4 初始瞬态的频谱	206
13.5 滤波器的技术参数	209
第十四章 滤波与 Z 变换	210
14.1 引言	210
14.2 微分方程的极点、零点	210
14.2.1 极点方程	210
14.2.2 全部极点位于负半平面	211
14.2.3 微分方程的零点	211
14.3 离散时间的零点和极点	212
14.3.1 仿效连续时间解	212
14.3.2 离散时间极点	213
14.3.3 离散时间零点	214
14.4 一般时间滤波器	215
14.5 同时计算所有零点	217
14.6 零点系统的增益	218
14.7 同时计算所有的极点	219
14.8 极点的增益和振荡	219
14.9 离散时间滤波器的增益	221
第十五章 滤波器的编程	223
15.1 数值误差	223
15.2 循环缓存器	223
15.3 极点和零点的表达式	226
15.4 系数的计算	227
15.5 滤波器程序	232

第十六章 精选波形滤波器	235
16.1 通用线性预测估计方法	235
16.1.1 初步措施	235
16.1.2 线性预测 (LP) 方程	236
16.1.3 例一: 不相关驱动力	239
16.1.4 例二: 无驱动力方程	241
16.1.5 例三: 全极点情况	241
16.2 一个线性预测 (LP) 程序	241
16.3 滤波器的增益	245
16.4 线性预测 (LP) 方法的试验	247
16.5 频谱估计的线性预测方法	249
16.6 线性预测技术钟群上的应用	251
16.6.1 磁带噪声	251
16.6.2 低频噪声滤波	253
16.6.3 全极点线性预测谱估计	253
16.6.4 高频噪声滤波	253
16.6.5 增加数据点数	253
16.6.6 线性预测滤波器脉冲响应	255
16.7 线性预测方法在模仿钢琴演奏上的应用	257
16.8 其它的乐器和有兴趣的课题	259
 第十七章 最小均方误差 (LMS) 自适应滤波器	 263
17.1 自适应滤波的概念	263
17.2 LMS 自适应滤波器	265
17.3 LMS 自适应算法	266
17.4 LMS 算法的收敛性质	270
17.5 LMS 算法的性能分析	277
17.6 自适应滤波的应用	281
17.6.1 自适应预测	282
17.6.2 自适应建模	284
17.6.3 自适应逆建模	285
17.6.4 自适应噪声对消	289
17.7 LMS 自适应递归滤波器	290

第一部分 模拟钟和钟群乐器演奏程序

本书要讨论的第一个课题是在这部分的最后一章完成模拟的合成式钟群乐器演奏程序。该钟群模拟程序的每个“钟”是用最简单的振荡系统,即衰减的简谐振荡器来模拟。尽管这个系统比真实的钟简单,但效果十分逼真。

第一章说明数据信号处理的最基本概念:什么是离散时间频率?离散时间频率和连续时间频率有什么关系?第二章讨论衰减的简谐振荡器微分方程的连续时间解。第三章阐明对连续时间系统的充分理解是求离散时间解所必须的。第四章用第三章的离散时间解去模拟钟和管风琴演奏。尽管“钟”的声音非常逼真,但“管风琴”的声音却象一个廉价的小哨子。第五章叙述如何用简谐振荡器编写一个音乐合成程序。程序中总括了本书所用的现代风格的计算机编程方法。

第一章 数字信号处理的基本原理

本章将阐述数字信号处理的最基本问题:什么是离散时间频率?它怎样和连续时间频率相关?假如你已了解这些基本知识的话,也可浏览一下。本章很短且观点与众不同。彻底了解本章的基本观点,可以清理一下头脑中关于数字信号处理方面的混乱概念。

象任何复杂问题一样,一旦掌握了基本原理,数字信号处理的过程实际上是很简单的。但是处在复杂的信号处理的“大厦”里,很容易忽视支撑它的“基石”。我们可以通过日常生活经验来理解这些基本观点。例如,当你观看有车轮运动的影片时,银幕中的轮子似乎总是倒转,但实际上并非如此(详见第 1.3 节)。

1.1 离散时域的频率和波形

首先,我们要问什么是连续时间频率?你或许已学过这个基本概念,并且可以写出一个字母 ω 或 f 来代表频率。但是再仔细想想,问题似乎更复杂。

频率中最基本的概念因素是实数 ω ,它说明在初相位角 φ 情况下,波形 $\cos(\omega t + \varphi)$ 依时间而变化。在信号处理中,可将其推广到复频率中去: $s = -d + j\omega$,衰减项 d 是实数,控制波形的指数衰减,并且 $j = \sqrt{-1}$ 。这个频率所描述的波形是一对衰减的正弦曲线,一个是实的,一个是虚的。

$$e^{st} = e^{(-d+j\omega)t} = e^{-dt}(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)) \quad (1.1)$$

但是,既使在连续时域内,频率的描述也不象你想象的那样简单。它需要参数: $s = -d + j\omega$ 以及由它生成波形的隐方法来描述,如式 1.1。

什么是离散时间频率?对照连续时域,离散时间频率必须由复数和生成波形的隐方法所组成。离散时间频率是一个任意复数 z 。由这个频率生成的波形具有等比序列的形式。

$$1, z, z^2, z^3, z^4, \dots, z^k, \dots \quad (1.2)$$

但是,与这一频率相关的波形振动到底发生在哪儿?首先,让我们看看特殊的情况:

$$z = e^{j\omega\Delta t} = \cos(\omega\Delta t) + j\sin(\omega\Delta t)$$

这里 Δt 是二个采样点之间的时间间隔。在复平面内,上式即为在单位圆上的复数,所以它的每一个幂也是单位圆上的复数:

$$z^k = e^{jk\omega\Delta t} = \cos(k\omega\Delta t) + j\sin(k\omega\Delta t)$$

与频率相关的振动就包含在这个离散波形的实部和虚部之中。

那么连续时间频率和离散时间频率之间的关系是什么?连续时间频率 $s = -d + j\omega$ 产生由式 1.1 描述的波形,它随频率 ω 振动。它所对应的离散时间频率是:

$$z = e^{s\Delta t} = e^{(-d + j\omega)\Delta t} \quad (1.3)$$

这里 Δt 是采样间隔。根据这个定义,这二个波形在时间 $t = n\Delta t$ 上的任意点上均相等,应为:

$$z^n = e^{sn\Delta t} = e^{st}$$

因为,实际上这就是在时间 t 上的连续时间波形的值。

我们看到不同的连续时间频率可形成相同的离散时间频率。任意二个连续时间频率 s 和 s' , 它们的差为 $s - s' = j2\pi k / \Delta t$ (这表示, $k / \Delta t$ 是频率单位赫兹, k 为整数) 时就对应于同一离散时间频率:

$$\begin{aligned} z &= e^{s\Delta t} = e^{[s' + (s-s')]\Delta t} \\ &= e^{s'\Delta t + j2\pi k} = e^{s'\Delta t} \\ &= z' \end{aligned}$$

假如离散时间频率 z 不在单位圆上,那么波形在复平面上所对应的轨迹,将根据 $|z| < 1$ 或 $|z| > 1$,螺旋地进入或离开单位圆所在平面(见图 1.1)。

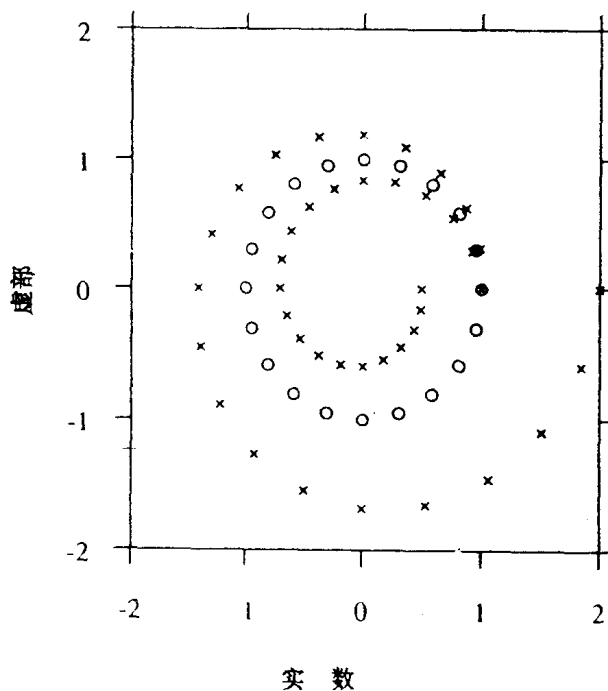


图 1.1

一个离散时间频率是任意复数 z 。这个波形生成一个等比序列 $1, z, z^2, \dots$ 在这个图上, 有三个不同的 z 值。这三个 z 从它们的起点, 沿着相似的路线, 一进一出离开所在平面, 另一个画出单位圆。在单位圆上 z 值生成的波形, 不发散也不衰减。而出来的 z 是发散序列, 进入的 z 是衰减序列。

这有二个需要考虑的特别因素。 z 是一个正实数时,也可以作为离散频率。这时波形不能生成振荡。根据 z 的数值,波形可能是增长序列,衰减序列或常量。当 z 是负实数则波形在正和负实数之间摆动,且由 z 的绝对值决定波形发散或衰减。而离散时间的最高频率是每二个数据点为一个周期的频率。简单论述如下。

1.2 奈奎斯特频率:最高的离散时间频率

那么,读者会问什么是这种最高频率? 答案是:在离散时域中存在的奈奎斯特频率是最高频率。请看,离散时间频率 z 有二个能被单独处理的部分:

$$z = re^{j\omega\Delta t}$$

z 的模 $|z|=r$,它决定了所生成的辐值是增加、减少还是保持常数不变。 $\exp(j\omega\Delta t)$,决定了波形绕圆进程的快慢。最高频率就是绕圆运动最快。对这个问题的讨论仅需要考虑单位圆上的频率。当然,当频率 $z=-1$,仅仅两个数据点即可快速地绕圆一周。

现在,假想你正在观看关于离散时间复频率 z 的波形的影片。影片的第 k 帧画面显示复平面上一个黑色的圆上有一个红色的亮点位于 z 的位置。如果影片从第 0 帧开始,则这个点位于复数 1 的位置上,这里并没有涉及所用到的频率为多少。

假设频率 z 在复平面的上半部,这个红点将从 1 开始向上运动,并逆时针旋转直到 z^k 。在下一帧画面时,这个点将再次逆时针运动,走到少于半个圆圈时,直到 z^2 为止。

假如频率 z 在复平面的下半部,这个红点将从数值 1 开始向下运动并顺时针旋转直到 z^k 。在下一帧画面中,这个点再次顺时针运动,在走到少于半个圆圈到达 z^2 为止。

这意味着在复平面的上半部,频率 z 是正频率,而在下半部是负频率。虽然谁为正频率,谁为负频率仅仅是一种约定,但是两者方向相反,所以频率的正负是很重要的。

剩下的频率 $z=-1$ 正好位于复平面中央。事实上,如果你看到以这个频率组成的影片,你将没有圆运动的感觉,因为红色亮点将沿着实轴简单的进行前后的振动,显示不出圆的路径。这就是我们可以辨认的离散时间频率的最高频率,通常被称为奈奎斯特频率。它是每两个振动数据点为一个周期,或每个数据点 π 个弧度。

1.3 混迭和带通采样

本节讨论离散时间信号的另一些基本事实,即离散时间频率与连续时间频率的关系。你可以假想从观看马车运动的影片中得到适当的答案。

当马车向前运动时,轮子也开始转起来,看起来与马车保持谐调的运动。但是过了一会儿,车轮开始慢慢向后转,然后又慢慢向前转,如此反复地变化。在这种情况下,影片拍摄时的画面速率决定了数据点的时间间隔。每幅画面代表一个新的采样数据。马车轮的轮幅组成的画面我们可以用放在轮子上的红色亮点来表示它,以便观察。如果在影片二帧时间间隔之间,车轮旋转了不到半圈时,这个红的亮点将随马车谐调地运动。当轮子每幅画面走过多半圈时,红点将向回反车轮的方向运动。当车轮每幅影片正好转过一圈时,即使车轮向前旋转,红色亮点也永远停在同一位置上。当车轮的速度稍微变快一点,则红点亮点看起来向反向旋转,但速度比

车轮的转速慢得多。

这个车轮转速所呈现的反复变化被称为混迭。用此术语的原因,是因为现实生活中的车轮的某一频率可能被电影中的慢频、甚至反转的车轮所混淆。

需要注意的是:在车轮的讨论中,没有用正频率或负频率这个术语。因为轮子运动的方向并未指定。习惯上说,逆时针方向运动的是正频率,即在电影屏幕上马车从右到左慢速地前进时,车轮以正方向旋转。而马车从左向右时,车轮以负频率转动。这意味着,在现实生活或屏幕上,讨论车轮的运动甚至在慢速转动时,也要考虑正和负的两种频率。

当车轮转速刚一超过每帧影片一圈时,便发生混迭现象。如果已知每帧画面轮子旋转超过一圈而不到二圈时,我们可以通过测量车轮的表现速度来测出马车的速度,但不要忘记做适当的校正。这就是在离散时间信号中经常进行的处理。假如我们研究的全部频率在每个数据点上是在 2π 至 4π 弧度之间,且没有其它的频率的话,即使样本没有提供整个的采样过程,我们也确实能知道正在发生的事情并能做适当的校正。这个过程通常称为带通采样。这并不比刚才我们研究的车轮运动更复杂。因为车轮在快速向前运动时,是不可能突然慢转或倒转的。

1.4 精确的离散时间解

了解在马车轮子和离散时间信号处理之间存在的相似性是很重要的。假设摄影时,摄影机的快门足够快,拍摄轮子图象清晰。当每帧画面进行快拍时,被摄下的离散时间事件将显示出车轮真实的精确的位置,象马车轮子的影片一样,第三章所研究的简谐振荡器的离散时域解将精确地跟踪连续时间解。但是有时也使用近似值,这使得问题出现一定程度的模糊。

1.5 立足于基本原理

离散时间信号处理的二大支柱是:离散时间频率是复数 z ,以及那个马车轮子所代表的有关连续时间频率到离散时间频率的转换的整个过程,包括混迭,带通采样和奈奎斯特频率。这个马车轮子的例子是复频率的良好模型。在复平面上绕单位圆的复数波形运动中,它被精确地类推到我们虚拟的马车轮子上的红色亮点的运动上。

根据以上这些基础知识,数字信号处理不是应该很容易理解吗?但是,并非如此。影片(例如“星球大战”)的效果很容易获得,因为这些影片只是用某种特殊技巧,从离散时间运动的画面上得到幻觉。然而所有的数字信号处理是建立在上述这些基本原理上的。假如你在头脑里已清楚地了解该原理,你就能从理论上理解上述的二个问题。

第二章 连续时间简谐振荡器

我们前面曾提到在音乐合成器程序中,任何钟声都可以表示为一个简谐振荡。本章将介绍连续时间振荡器的方程,在下一章将介绍离散时间振荡器的方程。将这两种情况相比较,不难得出连续与离散时间信号处理的异同点。

为什么要研究简谐振荡器而不研究复杂的振荡器呢?后面我们将会证明:无论在连续时间还是在离散时间内,即使是最复杂的线性时不变系统中,数字信号都可以由简谐振荡器相互作用迭加而成。因此,简谐振荡器是线性系统理论的核心。

为什么要限定线性与时不变系统呢?即使是最简单的非线性系统也是异常复杂的,因而必须限定线性系统。非线性系统是当前许多新学科的研究课题,如混沌理论、突变理论和分形等。

时不变的限定虽然不如前者重要,但由于其它概念是以时不变为基础的,因而成为不可缺少的条件。混频就是一个极好的线性模型(有关线性特征的证明请参照第2.1节),时间相关的过程可以很容易地以数字信号处理的方式进行模拟。本章的内容对于深刻理解第三章,推导离散时间下的简谐振荡方程有极其重要的意义。

2.1 线性和时不变性

数字信号处理的研究对象是时间离散线性时不变系统。因此,有必要解释以下这些概念:线性系统或线性算子 $\mathcal{L}$ 满足式2.1:

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g) \quad (2.1)$$

其中 f 和 g 是线性算子定义域内的函数, a 和 b 是任意常数。如果常数为实数,则称该算子在实数域内是线性的或称为实线性的;如果为复数,则称该算子在复数域内是线性的,即复线性的。

一个算子可以是实线性而不是复线性的。例如,算子 R 将一个复数关于实轴取共轭,作为一个复自变量函数的算子, R 是实线性而不是复线性的。正如下例证明的,令 $f(t)=1, g(t)=0$ 同时 $\mathcal{L}=R$,并将其代入方程2.1得:

$$R(af + bg) = aR(f) + bR(g)$$

上式可简化为:

$$R(a) = a$$

当 a 为实数时,结果显然成立。而当 a 含有虚数项时,则不成立。例如 $a=j=\sqrt{-1}$,方程变为:

$$R(j) = j$$

显然不成立,因此算子 R 是实线性而不是复线性的。

混频在信号处理中是一个常用的算子,令人不解的是它竟是一个线性算子。不要将它与电路中所用的混频器相混淆。在装有混频器的电路中会有非线性成分。但最终的效果是得到线性的结果。当然,由于线路本身精度会造成性能偏离理想的混频器,然而对于正常工作的线路来说,这一影响通常比较小并可忽略。

通常混频算子 M_g 的作用是将信号 x 与另一波形 y 相乘:

$$M_g(x(t)) = g(t)x(t)$$

这是一个线性算子。因为,对于任意两个波形 x 和 y ,及常数 a 和 b ,可以得到:

$$\begin{aligned} M_g(ax(t) + by(t)) &= g(t)(ax(t) + by(t)) \\ &= ag(t)x(t) + bg(t)y(t) \\ &= aM_g(x(t)) + bM_g(y(t)) \end{aligned}$$

显然满足线性关系。

通常的信号处理技术中只有两种是与时间相关的,混频是其中之一,另一个就是使用连续重迭窗口的傅里叶变换进行滤波(参考 10.5 节)。实际中本应采用最适当的信号处理技术是时间相关和非线性的。而这些都是属于更高级的技术,至今还未见广泛的应用。

2.2 两种简谐振荡器

音叉,质量—弹簧系统,小振幅单摆和 RLC 电路是几个简谐振荡的典型例子,至少可以看作是极好的例子。理想的质量—弹簧系统满足方程:

$$mx'' + bx' + kx = F \quad (2.2)$$

其中 x 表示物体离开平衡点的位移, m 是弹簧末端物体的质量, b 是摩擦系数, F 是驱动力, k 是弹簧的弹性系数。 RLC 电路是另一个简谐振荡器的例子。它的方程为:

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = v \quad (2.3)$$

其中 Q 是电容器的电荷, Q' 是电路中电流量, C 是电容, R 是电阻, L 表示电感, v 是驱动电压。比较式 2.2 和式 2.3,可以得到电路中的电量 Q 与质量—弹簧系统中的位移 x 相类比,电感 L 可以和弹簧末端的质量 m 相类比,电阻和摩擦力相类比,电容的倒数 $1/C$ 与弹簧弹性系数 k 相类比。

2.3 简化为一阶方程

解决式 2.2 或式 2.3 的方法至少有三种:一种是采用象分解多项式那样的分解微分方程;