全国高等教育自学考试教材

（数学专业）

概率论与数理统计习题解答

何声武　王万中　编

经济科学出版社

(京)新登字 152 号

责任编辑: 莫霓舫
封面设计: 张卫红

《概率论与数理统计》习题解答
何声武　王万中　编
*
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
中央民族大学印刷厂印刷
*
850×1168 毫米　32 开　6.25 印张　170000 字
1995 年 5 月第一版　1995 年 5 月第一次印刷
印数:0001－3500 册
ISBN7－5058－0772－2/F・606 定价:6.80 元

内容提要

本书系为全国高等教育自学考试指导委员会审定的，高等教育自学考试数学专业《概率论与数理统计》自学用教科书配套的习题解答，但也可独立使用. 考虑到自学的特点，除给出每个习题及其解答外，还对解题的思路和方法作适当的分析. 本书可用作综合性大学、师范或工科院校各专业学生学习概率论与数理统计课程的参考书.

前　言

本书是全国高等教育自学考试教材 (数学专业)《概率论与数理统计》一书的全部习题解答. 众所周知, 学习任何一门基础数学课程, 做习题是学生必须完成的一个环节. 对于完全自学的学生来说, 由于没有教师批改作业和当面答疑, 在独立完成作业之后, 有一份习题解答作参考比较也是有相当好处的. 因此, 与教材配套的习题解答看来还是不可缺少的. 显然, 即使对自学的学生, 也应在完成作业之后才使用习题解答.

每一节的习题是配合学习本节内容的基本训练题, 多数是课程中提供的方法的直接运用. 我们注意对相同类型的问题归纳小结, 便于读者掌握. 每一章的复习题可以说是本章内容的综合训练, 对每道题目首先要找到合适的方法, 自然就增加一点难度. 但本书中较难的习题主要是在总复习题中. 按照循序渐进的原则, 理应作如此的按排. 所以总复习题的解答对自学的学生显得更为重要.

为了适合自学的需要, 我们给出的解答比较详细, 但纯粹的数字计算过程将简略. 在解答中尽可能先作分析, 解释思路, 介绍概率统计思考问题的方法及其特点. 至于一题多解, 期望在积累较多的使用经验之后, 再加以补充. 由于题目是全文列出的, 因此本习题解答可独立使用. 即使解答中引用到课文内容, 也并不妨碍对解答的理解, 或也可参阅其他教科书中的相关内容. 我们热诚希望全国各地的教师与学生提出批评意见与提供有关资料, 相互交流共同提高.

编者 谨识

1994 年 3 月

目　　录

第一章　事件与概率

习题一

1.写出下列随机试验的样本空间及代表所述事件的子集:

(1) 袋中装有红、黑、白色球各 3 个. 同一种颜色的 3 个球分别标有号码 1, 2, 3. 从袋中任取一球.

A:“取到红球”.

B:“取到的不是 3 号球”.

(2) 相继掷硬币两次.

A:“第一次出正面”.

B:“第二次出反面”.

C:“两次出同一面”.

(3) 在“ 1, 2, 3, 4” 这 4 个数字中可重复地任取 2 个数字.

A:“一个数是另一个数的 2 倍”.

解　(1) 以 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 依次代表标号为 1, 2, 3 的红球.以 $\omega_4,\omega_5,\omega_6$ 依次代表标号为 1, 2, 3 的黑球. 以 $\omega_7,\omega_8,\omega_9$ 依次代表标号为 1, 2, 3 的白球. 依题设

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9\},$$
$$A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}.$$

取到的不是 3 号球也就是取到的是 1 号或 2 号球, 因此

$$B=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_5,\omega_7,\omega_8\}.$$

(2) 以 ω_1 表示第一次出正面, 第二次也出正面. 以 ω_2 表示第一次出正面, 第二次出反面. 以 ω_3 表示第一次出反面, 第二次出正面. 以 ω_4 表示第一次出反面,第二次也出反面. 依题设即有

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}.$$
$$A=\{\omega_1,\omega_2\}.$$
$$B=\{\omega_2,\omega_4\}.$$
$$C=\{\omega_1,\omega_4\}.$$

(3) 以 $\{a,b\}$ 表示取出的 2 个数字为 a 与 b (a 可能与 b 相等). 这里没有提到这 2 个数字是依次取出的, 还是同时取出的. 我们要表示的事件 A 与是否依次取出无关. 因此可以不考虑 a,b 的次序,故用集合 $\{a,b\}$ 表示. 依题设即有

$$\Omega=\big\{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,2\},\{2,3\},\{2,4\},$$
$$\{3,3\},\{3,4\},\{4,4\}\big\}.$$
$$A=\big\{\{1,2\},\{2,4\}\big\}.$$

如果考虑取出数字的次序, 以 a 记第一次取出的数, b 记第二次取出的数, 用 (a,b) 表示这一结果, 那么 Ω 及 A 相应地都放大为

$$\Omega=\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(2,2),(2,3),$$
$$(3,2),(2,4),(4,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\},$$
$$A=\{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2)\}.$$

只要符合题目要求, 一般当然应取尽可能简单的解法, 而不把问题复杂化.

2. 化简下列事件的表示式:

(1) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$;
(2) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)$;
(3) $(A\cup B)\cap(B\cup C)$.

解 (1) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$

$$\begin{aligned}&=A\cup AB\cup A\overline{B}\cup B\overline{B} && \text{(分配律)}\\&=A. && (AB\cup A\overline{B}=A,\ B\overline{B}=\varnothing)\end{aligned}$$

(2) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)$

$$\begin{aligned}&=A\cap(\overline{A}\cup B) && \text{(利用(1)的结果)}\\&=A\overline{A}\cup AB && \text{(分配律)}\\&=AB. && (\overline{A}=\varnothing)\end{aligned}$$

(3) $(A\cup B)\cap(B\cup C)$

$$\begin{aligned}&=AB\cup B\cup AC\cup BC && \text{(分配律)}\\&=B\cup AC. && (AB\cup BC\subset B)\end{aligned}$$

3. 证明下列关于事件的等式:

(1) $A\cup B=A\cup(B\overline{A})$,

(2) $(A-B)\cup(B-A)=\overline{(AB)\cup(\overline{A}\,\overline{B})}$;

(3) $B-A=\overline{(AB)}-\overline{(\overline{A}B)}$.

证 (1) $A\cup B$

$$
\begin{aligned}
&=(A\cup B)\cap\Omega=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{A}) \\
&=A\cup AB\cup B\overline{A} && (A\overline{A}=\varnothing) \\
&=A\cup B\overline{A}. && (AB\subset A)
\end{aligned}
$$

(2) $\overline{AB\cup(\overline{A}\,\overline{B})}$

$$
\begin{aligned}
&=\overline{AB}\cap\overline{(\overline{A}\,\overline{B})} && (\text{对偶律}) \\
&=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup B) && (\text{对偶律}) \\
&=\overline{A}A\cup\overline{B}A\cup\overline{A}B\cup\overline{B}B && (\text{分配律}) \\
&=A\overline{B}\cup B\overline{A} && (A\overline{A}=B\overline{B}=\varnothing) \\
&=(A-B)\cup(B-A).
\end{aligned}
$$

(3) $\overline{(AB)}-\overline{(\overline{A}B)}$

$$
\begin{aligned}
&=\overline{(AB)}\cap(\overline{A}B) \\
&=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{A}B) && (\text{对偶律}) \\
&=\overline{A}B. && (\text{分配律}, B\overline{B}=\varnothing.)
\end{aligned}
$$

4. 跳伞运动员朝地面上三个同心圆降落. 三个圆的半径分别为 1, 2, 3 米. 以 A_i 记落地点在半径为 i 米的圆内, $i=1,2,3$. 说明下列事件的含义:

(1) $\overline{A}_3$;

(2) $A_1\cup A_2\cup A_3$;

(3) $A_1A_2A_3$;

(4) $\overline{A}_1A_2$.

解 (1) 按逆事件意义, 降落在半径为 3 米的圆外.

(2) 因为 $A_1\subset A_2\subset A_3$, 所以 $A_1\cup A_2\cup A_3=A_3$, 即降落在半径为 3 米的圆内.

(3) 因为 $A_1\subset A_2\subset A_3$, 所以 $A_1A_2A_3=A_1$, 即降落在半径为 1 米的圆内.

(4) $\overline{A}_1$ 意为降落在半径为 1 米的圆外, A_2 意为降落在半径为 2 米的圆内. 因此 $\overline{A}_1A_2$, 即降落在半径分别为 1 米与 2 米的两个圆周围成的圆环内.

5. 三个工人各装配一台仪器, 它们或是正品, 或是次品. 以 A_i 记

事件:“第 i 个工人装配的仪器是正品”, $i=1,2,3$. 试以 A_1, A_2, A_3 的表示式表出下列事件:

(1) 没有一台仪器是次品;

(2) 至少有一台仪器是次品;

(3) 只有一台仪器是次品;

(4) 至少有二台仪器不是次品.

解 (1) $A_1A_2A_3$, 因为三台仪器都是正品.

(2) $\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$, 或 $\overline{(A_1A_2A_3)}$, 即三台仪器全是正品这事件没有发生.

(3) $(A_1A_2\overline{A}_3)\cup(A_1\overline{A}_2A_3)\cup(\overline{A}_1A_2A_3)$, 因为有三种情况, 每种情况为二台仪器是正品, 另一台是次品.

(4) $(A_1A_2\overline{A}_3)\cup(A_1\overline{A}_2A_3)\cup(\overline{A}_1A_2A_3)\cup(A_1A_2A_3)$, 这里比 (3) 还多一种情况: 三台仪器全是正品.

6. 试以四个事件 A,B,C,D 的表示式表出下列事件:

(1) A,B 都发生, 而 C,D 都不发生;

(2) 四个事件中恰发生两个;

(3) 四个事件中至多发生一个;

(4) 四个事件中至少发生三个.

解 (1) 按题意即得表示式为 $AB\overline{C}\,\overline{D}$.

(2) 共有 6 种情况, 每种情况中两个事件发生, 另两个事件不发生, 故表示式为 $(AB\overline{C}\,\overline{D})\cup(AC\overline{B}\,\overline{D})\cup(AD\overline{B}\,\overline{C})\cup(BC\overline{A}\,\overline{D})\cup(BD\overline{A}\,\overline{C})\cup(CD\overline{A}\,\overline{B})$.

(3) 共有 5 种情况, 一种是全不发生, 另四种是一个事件发生, 而其他三个事件不发生, 故表示式为 $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D})\cup(A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D})\cup(B\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D})\cup(C\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D})\cup(D\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$.

(4) 也有 5 种情况, 一种是全部发生, 另四种是一个事件不发生, 而其他三个事件全发生, 故表示式为

$$(ABCD)\cup(ABC\overline{D})\cup(ABD\overline{C})\cup(ACD\overline{B})\cup(BCD\overline{A}).$$

习 题 二

1. 甲袋中有红、黑、白球各 3 个. 乙袋中有黄、黑、白球各 2 个. 从两袋中各取一球. 求所取两球有相同颜色的概率.

解 甲袋中有 9 个球, 乙袋中有 6 个球, 因此基本事件总共有 $9 \times 6 = 54$ 个. 从两袋中各取一个黑球有 $3 \times 2 = 6$ 种取法, 从两袋中各取一个白球也有 $3 \times 2 = 6$ 种取法. 所以有利事件数为 $6 + 6 = 12$, 欲求之概率为

$$\frac{12}{54} = \frac{2}{9}.$$

2. 掷三颗骰子, 得 3 个点数能排成公差为 1 的等差数列的概率是多少?

解 每颗骰子有 6 个点数, 因此基本事件总共有 $6 \times 6 \times 6 = 216$ 个. 只要掷出的三个点数由 1, 2, 3,或 2, 3, 4,或 3, 4, 5,或 4, 5, 6 组成, 不论它们出现的次序怎么样, 都是有利基本事件. 因此欲求之概率为

$$\frac{4 \times 3!}{216} = \frac{1}{9}.$$

3. 将 4 个男生与 4 个女生任意地分成两组, 每组 4 人. 求每组各有 2 个男生的概率.

解 从 8 个学生中取 4 个为一组, 余下的自然成为另一组. 因此基本事件数为 C_8^4. 从 4 个男生中取 2 个, 从 2 个女生中取 2 个合为一组就是有利事件. 因此所求概率为

$$\frac{C_4^2 C_4^2}{C_8^4} = \frac{18}{35}.$$

4. (1) N 个人随机地排成一行, 其中甲、乙两人相邻的概率是多少? (2) N 个人随机地排成一圈, 甲、乙两人相邻的概率又是多少?

解 (1) N 个人全排列, 故基本事件数为 $N!$. 考虑有利事件时可设想甲、乙合占一个位置参加排列, 但在这个位置中甲可在乙前或在乙后, 因此有利事件数为 $2 \times (N-1)!$. 所以欲求之概率为

$$\frac{2 \times (N-1)!}{N!} = \frac{2}{N}.$$

(2) 设想在圆周上有 N 个位置. 我们只关心甲、乙所占位置是否相邻, 因此可让甲先占好一个位置, 而让乙在余下的 $N-1$ 个位置

中任选一个. 这样, 基本事件数即为 $N-1$, 有利事件是乙选中与甲相邻的 2 个位置中的 1 个, 即有利事件数为 2. 因此欲求之概率为 $\dfrac{2}{N-1}$.

我们在课文中已指出, 构造等可能概型的样本空间应满足两个要求: (1) 样本空间是有限集, 且各个样本点是等可能的; (2) 所考虑的事件可表示为样本空间的子集. 只要达到这两个要求, 样本空间应取得尽可能地简单, 以减少计算量. 本题(2)的解法就遵循了这一原则.

5. 袋中装有 12 个球, 其中 2 个球有号码 1, 4 个球有号码 5, 6 个球有号码 10. 从袋中任取 6 个球. 求这 6 个球的号码之和至少为 50 的概率.

解 从 12 个球中取 6 个, 基本事件总数为 C_{12}^6. 有利事件的发生有三种互不相容的情况: (1) 取出 6 个 10 号球, 这只有一种取法; (2) 取出 5 个 10 号球, 另一个非 10 号球, 这有 $C_6^5C_6^1$ 种取法; (3) 取出 4 个 10 号球及 2 个 5 号球, 这有 $C_6^4C_4^2$ 种取法. 因此欲求之概率为

$$\frac{1+C_6^5C_6^1+C_6^4C_4^2}{C_{12}^6}=\frac{127}{924}.$$

6. 从一副扑克牌中任取 5 张, 求下列事件的概率:

(1) 5 张牌有同一花色;

(2) 3 张牌有同一个点数, 另 2 张牌也有相同的另一个点数;

(3) 5 张牌中有 2 个不同的对 (没有 3 张牌点数相同);

(4) 有 4 张牌点数相同.

解 从 52 张牌中取 5 张, 基本事件总数是 C_{52}^5

(1) 可设想为先从 4 种花色中取出一种, 再在这花色的 13 张牌中取出 5 张牌. 因此欲求之概率为

$$\frac{C_4^1C_{13}^5}{C_{52}^5}=\frac{33}{166600}=0.00198.$$

(2) 可设想为先从 13 种点数中取出一种, 再从有这一点数的 4 张牌中取 3 张, 然后从余下的 12 种点数中再取一种, 并从这一点数的 4 张牌中取 2 张. 因此欲求之概率为

$$\frac{C_{13}^1C_4^3C_{12}^1C_4^2}{C_{52}^5}=\frac{6}{4165}=0.00144.$$

(3) 可设想为先从 13 种点数中取出 2 种, 再从有这 2 种点数的各 4 张牌中各取 2 张, 然后从余下的 44 张牌中取出 1 张. 因此欲求之概率为

$$\frac{C_{13}^2 C_4^2 C_4^2 C_{44}^1}{C_{52}^5} = \frac{198}{4165} = 0.04754.$$

(4) 可设想为先从 13 种点数中取出一种, 这一点数的 4 张牌都取出, 然后从余下的 48 张牌中取 1 张. 因此欲求之概率为

$$\frac{C_{13}^1 C_{48}^1}{C_{52}^5} = \frac{1}{4165} = 0.00024.$$

本题的计算是典型的用排列组合的计数方法, 将一个复杂的计数问题分解成若干步, 每一步只是一个简单的排列或组合的计数, 然后用乘法原理得到总的结果. 如何进行分解需要按具体情况想办法. 所作的分解也不一定就是现实中进行的, 可以是理论上设想的, 也就是虚构的. 分解的方法也不一定是唯一的. 这些都是用排列组合计数的难点. 但是在本课程中我们不追求解复杂的排列组合计算问题, 过多地讲究排列组合的技巧反而会冲淡对概率概念的理解与讨论.

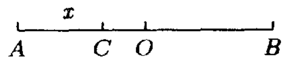
7. n 只白球与 n 只黑球被任意地放入两个袋中, 每袋装 n 只. 然后从两袋中各取一球, 求所取两球颜色相同的概率.

解 题目所述的取球方法虽然复杂, 仔细想一想, 实际上就是从这 $2n$ 个球中任取 2 个. 因为只考虑 2 个球的颜色是否相同, 可设想先取好一个球, 则第二个球有 $2n-1$ 种取法, 而使两个球颜色相同的取法只有 $n-1$ 种. 因此欲求之概率即为 $\dfrac{n-1}{2n-1}$.

本题说明, 在进行计算之前, 对随机试验及随机事件作仔细的分析是十分必要的. 要抓住问题的实质, 不要被表面现象所迷惑, 尽可能地把问题简化. 当然, 学会这样做是比较困难的. 但是见多识广, 开阔眼界是很有帮助的. 本题只是想起到这一点作用.

8. 设 O 为线段 AB 的中点. 在 AB 上任取一点 C.求 AC, CB, AO 三条线段能构成一个三角形的概率.

解 不妨设 $AB=1, AC=x$，则 $CB=1-x$, $AO=\frac{1}{2}$. AC, CB, AO 能构成一个三角形必须且只需同时满足



$$\frac{1}{2}+x>1-x,\quad \frac{1}{2}+1-x>x,$$

即

$$\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}.$$

将 AB 等分成四小段. 第二及第三小段组成有利事件. 因此欲求之概率为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

习 题 三

1. 设 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$. 求证: $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$.

证

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B})&=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P(AB)]=P(AB).\end{aligned}$$

2. 证明: (1) $P(AB)\geq P(A)+P(B)-1$;

(2) $P(A_1A_2...A_n)\geq P(A_1)+P(A_2)+...P(A_n)-(n-1)$.

证 (1) 由

$$1\geq P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

即得

$$P(AB)\geq P(A)+P(B)-1.$$

(2) 我们用归纳法证明. $n=2$ 时即为已证之 (1). 设对 n 欲证之不等式成立, 则

$$
\begin{aligned}
& P(A_1 \dots A_{n+1}) \\
\geq\ & P(A_1 \dots A_n) + P(A_{n+1}) - 1 \\
\geq\ & P(A_1) + \dots + P(A_n) - (n-1) + P(A_{n+1}) - 1 \\
=\ & P(A_1) + \dots + P(A_{n+1}) - n.
\end{aligned}
$$

3. 掷硬币 $2n$ 次, 求出正面次数多于出反面次数的概率.

解 以 A 记事件:"出正面次数多于出反面次数", B 记事件:"出反面次数多于出正面次数", C 记事件:"出正面次数等于出反面次数". 因 A,B,C 互不相容,且 $A\cup B\cup C=\Omega$ (必然事件), 故

$$P(A)+P(B)+P(C)=1.$$

由于"正面"与"反面"处于对称地位, 故有 $P(A)=P(B)$. 现在计算 $P(C)$. 将 $2n$ 次投掷的结果排成一列, 每个位置上或是正或是反, 故基本事件总数是 2^{2n}. 在 $2n$ 个位置中挑选出 n 个位置作为正面的位置, 余下的位置就是反面的位置, 因此 C 的有利事件数是 C_{2n}^n, 从而 $P(C)=\dfrac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$. 最后得

$$P(A)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\right).$$

本题的解法与课文第一章例 3.5 的解法是类似的, 充分利用了正面与反面的对称性. 在等可能概型中利用对称性化简计算是常见的. 在处理等可能概型时, 有意识地观察一下是否存在对称性, 能否加以利用, 往往是有好处的.

4. 在 1000 名技术员中调查性别、婚姻状况及学历, 得如下数据: (1) 813 个男性; (2) 875 人已婚; (3) 752 个大专毕业生; (4) 632 个男大专毕业生; (5) 572 个已婚男性; (6) 654 个已婚大专毕业生; (7) 420 个已婚男大专毕业生. 试说明这些数据中有错误.

证 设从 1000 名技术员中任意地抽取一人. 以 A 记事件:"抽得男性", B 记事件:"抽得已婚者", C 记事件:"抽得大专毕业生". 按所给数据应有

$$P(A)=0.813,\ P(B)=0.875,\ P(C)=0.752,$$

$$P(AB)=0.572,\ P(BC)=0.654,\ P(AC)=0.632,$$

$$P(ABC)=0.420.$$

于是

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)\\&\quad-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=0.813+0.875+0.752-0.572\\&\quad-0.654-0.632+0.420=1.002>1.\end{aligned}$$

得出矛盾. 因此所给数据有错误.

5. 一个袋中装有红、黄、黑、白色球各 3 个, 从中任取 5 个球, 求至少有一种颜色的球未取到的概率.

解 分别以 A_1, A_2, A_3, A_4 记事件:没有取到红、黄、黑、白色的球. 欲求之概率为 $P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$. 不难看出

$$\begin{aligned}&P(A_i)=\frac{C_9^5}{C_{12}^5}, &&1\le i\le 4,\\&P(A_iA_j)=\frac{C_6^5}{C_{12}^5}, &&1\le i<j\le 4,\\&P(A_iA_jA_k)=0, &&1\le i<j<k\le 4,\end{aligned}$$

$$P(A_1A_2A_3A_4)=0.$$

利用推广的概率加法公式, 我们有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=\frac{C_4^1C_9^5-C_4^2C_6^5}{C_{12}^5}=\frac{13}{22}.$$

另一种解法是先求逆事件的概率. 逆事件意味着全部颜色都要取到, 也就是有一种颜色的球取 2 个, 其余 3 种颜色的球各取 1 个. 可设想先从 4 种颜色中挑选 1 种, 并从这颜色的 3 个球中取 2 个, 而从其他颜色的每 3 个球中各取 1 个. 因此逆事件的有利事件数为 $(C_4^1C_3^2)C_3^1C_3^1C_3^1$, 逆事件的概率为

$$\frac{C_4^1C_3^2C_3^1C_3^1C_3^1}{C_{12}^5}=\frac{9}{22}.$$

所以欲求之概率为

$$1-\frac{9}{22}=\frac{13}{22}.$$

6. 三对夫妇排成一行. 求没有一个丈夫与他的妻子相邻的概率.

解 以 A_i 记事件:"第 i 对夫妻相邻", $i=1,2,3$. 参考本章习题二第 4 题 (1), 我们有

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{2\cdot 5!}{6!}=\frac{1}{3},$$

$$P(A_1A_2)=P(A_2A_3)=P(A_3A_1)=\frac{2\cdot 2\cdot 4!}{6!}=\frac{2}{15},$$

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3!}{6!}=\frac{1}{15}.$$

利用推广的概率加法公式, 欲求之概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)&=1-P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=1-3\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{2}{15}-\frac{1}{15}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

本题及前二题都用了推广的概率的加法公式. 在求较复杂的事件的概率时, 这一公式是一个有力的工具, 应该经常被想到.

7. 掷 n 颗骰子, 得最小的点数为 2 的概率是多少?

解 以 A 记事件:"最小的点数 ≥ 2",以 B 记事件:"最小的点数 ≥ 3", 则 $A-B$ 正是事件:"最小的点数为 2", 且 $A\supset B$. 事件 A 即点数 1 不出现, 因此$P(A)=\frac{5^n}{6^n}$. 事件 B 即点数 1, 2 都不出现, 因此 $P(B)=\frac{4^n}{6^n}$. 欲求之概率为

$$P(A-B)=P(A)-P(B)=\frac{5^n-4^n}{6^n}.$$

本题的解法与课文第一章例 3.6 的解法类似. 这也是一种典型的解法, 但灵活性较大, 只能通过见多识广, 逐步扩大思路, 不能急于求成.