高等学校教学用书

现代控制理论

GAODENG
XUEXIAO
JIAOXUE
YONGSHU

冶金工业出版社

高等学校教学用书

现代控制理论

东北大学　张嗣瀛　主编

冶金工业出版社

（京）新登字036号

图书在版编目（CIP）数据

现代控制理论/张嗣瀛主编.-北京：冶金工业出版社，1994.10
高等学校教学用书
ISBN 7-5024-1466-5

Ⅰ.现… Ⅱ.张… Ⅲ.控制论-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.TP13

中国版本图书馆CIP数据核字（94）第02824号

出版人　卿启云（北京沙滩嵩祝院北巷39号，邮编100009）
怀柔东茶坞印刷厂印刷；冶金工业出版社出版；各地新华书店发行
1994年10月第1版，1994年10月第1次印刷
787mm×1092mm　1/16；　14.25印张；　339千字；　222页；1-2600册
8.70元

前　言

本书是高等学校工业自动化、自动控制、自动化仪表以及系统工程等专业的教材。它是编者结合多年的教学经验，在自编讲义的基础上，又参阅并吸取了国内外优秀教材的内容编写的。

在内容上，本书主要讲述状态空间法的基本概念和基本方法，其中包括系统的状态方程及解法、能控性和能观测性、稳定性及综合理论，最后介绍最优控制理论。编者认为，这些内容是从事自动控制、工业自动化、自动化仪表、系统工程、经济控制论及其他有关专业方面的科研人员、工程师们必不可少的。

在结构上，本书是这样安排的：首先给出控制系统的数学描述，提出状态变量和状态方程；然后对系统进行运动分析；接下来是系统的基本性质分析，即系统的能控性、能观测性和稳定性；最后给出系统的综合与设计。这样使读者由浅入深、由表及里对现代控制理论的基本部分有较全面的理解，便于实际应用。

东北大学张嗣瀛教授任主编，参加编写的有：东北大学王贞祥副教授和华东冶金学院朱祖慈教授（二人合写第1、2章，朱祖慈写第3章），北京科技大学董木森副教授（绪论、第4、5章），东北大学王景才教授（第6章）。全书的统一修改、整理、抄写和底图的绘制均由董木森完成。

参加本书审稿的有鞍山钢铁学院陈祖清、包头钢铁学院周光谱、武汉钢铁学院吴怀宇等同志。他们仔细地审阅了初稿，提出了宝贵的意见，在此向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中错误和不妥之处一定不少，敬请各界同仁和广大读者给予指教，编者将不胜感激。

编　者

1993年4月

目　录

0　**绪论** ………………………………………………………… 1

1　**控制系统的状态空间描述** …………………………………… 4

1.1　基本概念 ……………………………………………………… 4

1.2　状态空间表达式的建立 ……………………………………… 11

1.3　传递函数与传递函数矩阵 …………………………………… 23

1.4　组合系统的状态空间表达式 ………………………………… 25

1.5　线性变换 ……………………………………………………… 30

1.6　离散系统的状态空间表达式 ………………………………… 38

小　结 …………………………………………………………… 41

习　题 …………………………………………………………… 41

2　**状态方程的解** …………………………………………………… 44

2.1　线性定常系统齐次状态方程的解 …………………………… 44

2.2　矩阵指数 ……………………………………………………… 46

2.3　线性时变系统齐次状态方程的解 …………………………… 57

2.4　状态转移矩阵 ………………………………………………… 61

2.5　线性连续系统非齐次状态方程的解 ………………………… 65

2.6　离散时间系统状态方程的解 ………………………………… 67

2.7　连续时间状态空间表达式的离散化 ………………………… 70

小　结 …………………………………………………………… 72

习　题 …………………………………………………………… 72

3　**线性系统的能控性与能观性** …………………………………… 75

3.1　定常离散系统的能控性 ……………………………………… 76

3.2　定常连续系统的能控性 ……………………………………… 79

3.3　定常系统的能观性 …………………………………………… 85

3.4　线性时变系统的能控性及能观性 …………………………… 90

3.5　能控性与能观性的对偶关系 ………………………………… 94

3.6　线性定常系统的结构分解 …………………………………… 96

3.7　能控性、能观性与传递函数矩阵的关系 …………………… 101

3.8　能控标准形和能观标准形 …………………………………… 104

3.9　系统的实现 …………………………………………………… 110

小　结 …………………………………………………………… 116

习　题 …………………………………………………………… 116

4　**控制系统的李雅普诺夫稳定性分析** …………………………… 119

4.1　稳定性的基本概念 …………………………………………… 119

4.2　李雅普诺夫稳定性理论 ……………………………………… 123

4.3 李雅普诺夫方法在线性系统中的应用……………………………………………127
4.4 李雅普诺夫方法在非线性系统中的应用………………………………………134
小 结 ……………………………………………………………………………139
习 题 ……………………………………………………………………………139
5 状态反馈和状态观测器…………………………………………………………141
5.1 状态反馈的定义及其性质……………………………………………………141
5.2 极点配置………………………………………………………………………144
5.3 应用状态反馈实现解耦控制…………………………………………………152
5.4 状态观测器……………………………………………………………………159
5.5 带状态观测器的反馈系统……………………………………………………167
小 结 ……………………………………………………………………………170
习 题 ……………………………………………………………………………170
6 最优控制…………………………………………………………………………173
6.1 最优控制问题…………………………………………………………………173
6.2 求解最优控制的变分方法……………………………………………………175
6.3 最大值原理……………………………………………………………………190
6.4 动态规划………………………………………………………………………197
6.5 线性二次型性能指标的最优控制……………………………………………204
6.6 快速控制系统…………………………………………………………………216
小 结 ……………………………………………………………………………220
习 题 ……………………………………………………………………………221
主要参考文献 ……………………………………………………………………222

0 绪　论

0.1 控制理论的发展历程简介

人类利用自动控制技术的历史，可以追溯到几千年前。但是，把自动控制技术在工程实践中的一些规律加以总结提高，进而以此去指导和推进工程实践，形成所谓自动控制理论，并作为一门独立的学科而存在和发展，则是本世纪中叶的事情。在20世纪30～40年代，奈魁斯特（H. Nyguist）、伯德（H. W. Bode）、维纳（N. Wiener）等人的著作为自动控制理论的初步形成奠定了基础；二次大战后，又经众多学者的努力，在总结了以往的实践和关于反馈理论、频率响应理论并加以发展的基础上，形成了较为完整的自动控制系统设计的频率法理论。1948年又提出了根轨迹法，至此，自动控制理论发展的第一阶段基本完成。这种建立在频率法和根轨迹法基础上的理论，通常被称为经典（古典）控制理论。

经典控制理论以拉氏变换为数学工具，以单输入-单输出的线性定常系统为主要的研究对象，将描述系统的微分方程或差分方程变换到复数域中，得到系统的传递函数，并以此作为基础在频率域中对系统进行分析与设计，确定控制器的结构和参数。通常是采用反馈控制，构成所谓闭环控制系统。经典控制理论具有明显的局限性，突出的是难以有效地应用于时变系统、多变量系统，也难以揭示系统更为深刻的特性。

在50年代蓬勃兴起的航空航天技术的推动和计算机技术飞速发展的支持下，控制理论在1960年前后有了重大的突破和创新。在此期间，贝尔曼（R. Bellman）提出寻求最优控制的动态规划法，庞特里雅金（Л. С. Понтрягин）证明了极大值原理，使得最优控制理论得到了极大的发展。卡尔曼（R. E. Kalman）系统地把状态空间法引入到系统与控制理论中来，并提出了能控性、能观测性的概念和新的滤波理论。这些就构成了后来被称为现代控制理论的发展起点和基础。

现代控制理论以线性代数和微分方程为主要的数学工具，以状态空间法为基础，分析与设计控制系统。状态空间法本质上是一种时域的方法，它不仅描述了系统的外部特性，而且描述和揭示了系统的内部状态和性能。它分析和综合的目标是在揭示系统内在规律的基础上，实现系统在一定意义下的最优化。它的构成带有更高的仿生特点，即不限于单纯的闭环，而扩展为适应环、学习环等。较之经典控制理论、现代控制理论的研究对象要广泛得多，原则上讲，它既可以是单变量的、线性的、定常的、连续的，也可以是多变量的、非线性的、时变的、离散的。

60年代末和70年代，可以说控制理论进入了一个多样化发展的时期，在广度和深度上进入了新的阶段，出现了大系统理论和智能控制理论等。所谓大系统是指规模庞大、结构复杂、变量众多的信息与控制系统，涉及生产过程、交通运输、生物控制、计划管理、环境保护、空间技术等方面的控制与信息处理问题。而智能控制是具有某些仿人智能的工程控制与信息处理问题，其中最为典型的就是智能机器人。这个时期还出现了其他一些新的控制思想和新的理论。罗森布诺克（H. H. Rosenbroek）等人提出的多变量频率域控制理论就是其中之一例。

近年来，随着经济和科学技术的飞速发展，自动控制理论及其应用的范围在继续深化与扩大，由实际工程的需要而导致产生的新问题、新思想、新方法发展迅速，各学科相互渗透溶合的趋势进一步加强，理论结果的应用也显著地加快。对于这些，就不一一叙述了。

0.2 现代控制理论的主要内容

概括地说，现代控制理论有下列主要分支：

（1）线性系统理论　它是现代控制理论的基础，主要研究线性系统状态的运动规律和改变这些规律的可能性与实施方法；建立和揭示系统结构、参数、行为和性能间的关系。它除了包括系统的能控性、能观测性、稳定性分析之外，还包括状态反馈、状态估计及补偿器的理论和设计方法等内容。

（2）最优滤波理论　它所研究的对象是由随机微分方程或随机差分方程所描述的随机系统。由于这类系统除了具有描述系统与外部联系的输入、输出之外，还承受不确定因素（随机噪声）的作用，本分支就是研究利用被噪声污染的量测数据，按照某种判别准则，获得有用信号的最优估计。卡尔曼滤波理论用状态空间法设计的最佳滤波器，实用性强且可适用于非平稳过程，是滤波理论的一大突破。

（3）系统辨识　要研究系统的状态，建立系统在状态空间的数学模型是一件基本的工作。但是，由于系统的复杂性，并不总是可以通过解析的方法来直接建立其数学模型的。所谓系统辨识就是在系统的输入输出的试验数据的基础上，从一组给定的模型类中确定一个与所测系统本质特征相等价的模型。当模型的结构已经确定，只需用输入输出的量测值来确定其参数的，叫做参数估计。而同时确定模型结构和参数的则泛称系统辨识。

（4）最优控制　最优控制就是在给定限制条件和性能指标下，寻找使系统性能在一定意义下为最优的控制规律。这里所说的“限制条件”是指物理上对系统所施加的一些限制，而“性能指标”是为评价系统的优劣人为规定的标准，它以系统在整个工作期间的性能作为一个整体而出现的。寻找控制律也就是综合出所需控制器。在解决最优控制问题中，庞特里雅金的极大值原理和贝尔曼动态规划法是最重要的两种方法，它们以不同的形式给出了最优控制所必须满足的条件，并推出许多定性的性质。

（5）自适应控制　自适应控制是随时辨识系统的数学模型并按此模型去调整最优控制律。其基本思想是，当被控对象内部的结构和参数以及外部的环境干扰存在不确定性时，在系统运行期间，系统自身能对有关信息实现在线测量和处理，从而不断地修正系统结构的有关参数和控制作用，使之处于所要求的最优状态，得到人们所期望的控制结果。常用的自适应控制器方案大致有：编程控制，模型参考自适应和自校正控制。自适应理论的发展是自学习、自组织系统理论。

0.3 本书的内容和特点

如前所述，现代控制理论所包括的内容很多，范围很广，有的还相当艰深。根据教学大纲的要求，考虑到本书读者在大学本科阶段先修和后续课程的实际可能和需要，本书只拟介绍现代控制理论的一些最基本的内容和方法，为读者日后深入学习其他有关内容打下必要的基础。

在编写本书时，编者们始终遵循这样的原则：在不损害必要的系统性和理论的严谨性的条件下，不追求对现代控制理论的全面介绍和数学的严密性，而是尽可能做到“实用”。所

谓“实用”，一方面是指读者在今后的工作或进入更高层次的学习中，确实是必须的和有用的，另一方面是指本书作为冶金和有色系统及其他工科院校本科生的教材，它符合教学大纲的要求，适合学生所具备的基础知识的现实情况和必须掌握的内容的实际需要。对于教学计划中安排有“现代控制理论”或“线性系统理论”课，且为40学时的院校，可以只讲前面的5章，而对于安排50学时“现代控制理论”的院校，则应全部讲完本书。

本书是编者们在各自学校多年教学实践的基础上，根据新的教学大纲和教学计划编写的，基本上都是由讲稿整理加工而成。因此，在内容的选择、学时的分配、详略的安排、难点的分布，乃至于例题和习题的组成上，都是在长期的教学实践中不断修正、增删而定的，可以预料本书将能较好地适应上述院校的教学之用。

为了工程技术人员的知识更新也能采用本教材，在编写时，注意到了尽可能做到论述由浅入深，理论联系实际，即在考虑了现代控制理论的先进性与系统性的同时，又兼顾到工程技术人员掌握现代控制理论必要的知识要求，并且在文字上也尽可能做到通俗易懂、便于自学。

1　控制系统的状态空间描述

动态系统的特性决定于系统运动状况，对它进行研究分析时，首先应建立系统的数学模型。在经典控制理论中，用常系数线性高阶微分方程或传递函数来描述线性定常动态系统，这两种方法给出了系统的输入量与输出量之间的关系，即通常所称的外部特性。但一个系统除此之外还有一些其他变量包含着许多信息，仅仅外部特性便不足以能揭示出系统的全部特征。

在现代控制理论中，是以状态空间法为基础，用时域方法（也有用频域方法的）来研究系统的动态特性。它的数学模型是由状态变量构成的一阶微分方程组及代数方程组。这种描述表示了系统的输入、输出与内部状态之间的关系，揭示了系统内部状态的运动规律（也称之为内部描述），它反映了系统运动的全部信息。

1.1　基本概念

1.1.1　几个定义

（1）状态　控制系统的状态是指系统过去、现在和将来的状况，如由作直线运动的质点所构成的系统，它的状态就是质点的位置和速度。

（2）状态变量　系统的状态变量是指能完全表征系统运动状态的最小一组变量。所谓完全表征是指：1）在任何时刻$t=t_0$，这组状态变量的值$x_1(t_0)$，$x_2(t_0)$，……$x_n(t_0)$就表示系统在该时刻的状态；2）当$t\geqslant t_0$时的输入$u(t)$给定，且上述初始状态确定时，状态变量能完全确定系统在$t\geqslant t_0$时的行为。

很显然，作直线运动的质点，其位置和速度这两个变量可用来完全地表征该质点的运动状态，因而可选作为状态变量。

（3）状态向量　若一个系统有n个彼此独立的状态变量$x_1(t)$，$x_2(t)$，……$x_n(t)$，用它们作为分量所构成的向量$\mathbf{x}(t)$，就称为状态向量，即

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

（4）状态空间　以状态变量x_1，x_2，……x_n为坐标轴构成的n维空间称为状态空间。系统在任何时刻的状态，都可以用状态空间中的一个点来表示。如果给定了初始时刻t_0时的状态$\mathbf{x}(t_0)$，就得到状态空间中的一个初始点，随着时间的推移，$\mathbf{x}(t)$将在状态空间中描绘出一条轨迹，称为状态轨迹。

（5）状态方程　把系统的状态变量与输入之间的关系用一组一阶微分方程来描述的数学模型称之为状态方程。

（6）输出方程　系统输出变量与状态变量、输入变量之间关系的数学表达式称为输出方程。

（7）状态空间表达式　状态方程和输出方程总合起来，构成对一个系统动态行为的完整描述，称为系统的状态空间表达式。

例1.1.1　有电路如图1.1.1所示，我们可以用两种状态变量列写其状态方程。

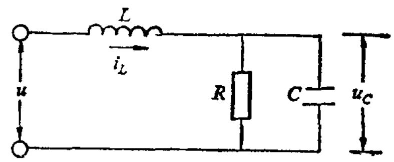

图 1.1.1

（1）取电感电流i_L和电容电压u_C作为状态变量，根据电路原理，有下列微分方程组：

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+u_C=u \tag{1.1.1}$$

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{u_C}{R}=i_L \tag{1.1.2}$$

令$x_1=i_L$，$x_2=u_C$，则以上两式可改写为

$$\dot{x}_1=-\frac{x_2}{L}+\frac{u}{L} \tag{1.1.3a}$$

$$\dot{x}_2=\frac{x_1}{C}-\frac{x_2}{RC} \tag{1.1.3b}$$

上述二式即为图1.1.1电路系统的状态方程。如取电容电压u_C作为输出变量y，则输出方程是

$$y=u_C=x_2 \tag{1.1.4}$$

（2）取电感电流i_L和电容电荷q_C作为状态变量，则有状态方程为

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+\frac{q_C}{C}=u \tag{1.1.5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_C}{\mathrm{d}t}+\frac{q_C}{RC}=i_L \tag{1.1.5b}$$

令$\bar{x}_1=i_L$，$\bar{x}_2=q_C$，则上式也可改写为

$$\dot{\bar{x}}_1=-\frac{\bar{x}_2}{LC}+\frac{u}{L} \tag{1.1.6a}$$

$$\dot{\bar{x}}_2=\bar{x}_1-\frac{\bar{x}_2}{RC} \tag{1.1.6b}$$

如仍令电容电压为输出变量y，则输出方程为

$$y=u_C=Cq_C=C\bar{x}_2 \tag{1.1.7}$$

通过以上例子，我们可归纳出几点结论：

（1）状态变量选取具有非唯一性。从上例可明显地看出，对同一个系统可以选择不同组的状态变量，这在以后的叙述中，读者将会更深刻地领会到。但是不管如何选择，状态变量的个数总是相同的。

（2）不同组的状态变量（亦即同一系统中所选取的不同状态向量）之间是可以相同变换的，在上例中，第一种选取的状态向量为$\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}$，而第二种选取为$\begin{bmatrix} i_L \\ q_C \end{bmatrix}$，这两个状态向量之间存在着以下的线性关系：

$$\begin{bmatrix} i_L \\ q_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} \qquad (1.1.8)$$

其中矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$称为变换矩阵。

（3）状态变量必须是相互独立的。一个n阶系统具有n个独立变量，它的状态变量个数应是n个。

（4）一般来说，状态变量不一定是有实在物理意义或可以测量的量，但是从工程实际的角度出发，总是选择物理上有意义或可观察的量，特别在电工系统中，一般选用电感中的电流和电容上的电压。

1.1.2 状态空间表达式以矩阵向量表示的一般形式

1.1.2.1 单输入-单输出系统

仍回到例1.1.1，把式（1.1.3）写成向量、矩阵的形式，则有

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \qquad (1.1.9)$$

其中 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$为以$x_1=i_L$，$x_2=u_C$作为状态变量的状态向量，当选择$u_C$作为输出变量时，则可以将式（1.1.4）改写为

$$y=[0 \quad 1]\mathbf{x} \qquad (1.1.10)$$

这就是输出方程的向量、矩阵表示形式。

一般地，对于线性单输入-单输出系统，状态方程具有下列形式

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t)&=a_{11}(t)x_1(t)+a_{12}(t)x_2(t)+\cdots\cdots+a_{1n}(t)x_n(t)+b_1(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t)&=a_{21}(t)x_1(t)+a_{22}(t)x_2(t)+\cdots\cdots+a_{2n}(t)x_n(t)+b_2(t)u(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t)&=a_{n1}(t)x_1(t)+a_{n2}(t)x_2(t)+\cdots\cdots+a_{nn}(t)x_n(t)+b_n(t)u(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.11)$$

此方程组的特点是方程式的左边为状态变量的一阶导数，而方程式的右边是各状态变量和输入变量的线性组合。

输出方程则有下列形式

$$y(t)=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)+\cdots\cdots+c_n(t)x_n(t)+d(t)u(t) \qquad (1.1.12)$$

用矩阵表示的系统状态空间表达式为：

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}(t)u(t) \qquad (1.1.13a)$$

$$y(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{d}(t)u(t) \qquad (1.1.13b)$$

式中

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t)\cdots\cdots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t)\cdots\cdots a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t)\cdots\cdots a_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}(t)=\begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(t)=[c_1(t) \quad c_2(t)\cdots\cdots c_n(t)]$$

因为是单输入单输出系统，输入变量u和输出变量y都是标量，$\mathbf{x}(t)$为n维状态向量，所以各个矩阵相应的维数为$\mathrm{A}(t)$ 是$n\times n$方阵，$\mathbf{b}(t)$ 是$n\times 1$列阵，C是$1\times n$行阵，而d是标量。

1.1.2.2　多输入-多输出系统

这种系统也称为多变量系统，它有p个输入变量和q个输出变量，此时状态方程为：

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t)&=a_{11}(t)x_1(t)+a_{12}(t)x_2(t)+\cdots+a_{1n}(t)x_n(t)+b_{11}(t)u_1(t)+b_{12}(t)u_2(t)+\cdots+b_{1p}(t)u_p(t)\\
\dot{x}_2(t)&=a_{21}(t)x_1(t)+a_{22}(t)x_2(t)+\cdots+a_{2n}(t)x_n(t)+b_{21}(t)u_1(t)+b_{22}(t)u_2(t)+\cdots+b_{2p}(t)u_p(t)\\
&\vdots\\
&\vdots\\
\dot{x}_n(t)&=a_{n1}(t)x_1(t)+a_{n2}(t)x_2(t)+\cdots+a_{nn}(t)x_n(t)+b_{n1}(t)u_1(t)+b_{n2}(t)u_2(t)+\cdots+b_{np}(t)u_p(t)
\end{aligned}\tag{1.1.14}$$

输出方程为：

$$\begin{aligned}
y_1(t)&=c_{11}(t)x_1(t)+c_{12}(t)x_2(t)+\cdots+c_{1n}(t)x_n(t)+d_{11}(t)u_1(t)+d_{12}(t)u_2(t)+\cdots+d_{1p}(t)u_p(t)\\
y_2(t)&=c_{21}(t)x_1(t)+c_{22}(t)x_2(t)+\cdots+c_{2n}(t)x_n(t)+d_{21}(t)u_1(t)+d_{22}(t)u_2(t)+\cdots+d_{2p}(t)u_p(t)\\
&\vdots\\
&\vdots\\
y_q(t)&=c_{q1}(t)x_1(t)+c_{q2}(t)x_2(t)+\cdots+c_{qn}(t)x_n(t)+d_{q1}(t)u_1(t)+d_{q2}(t)u_2(t)+\cdots+d_{qp}(t)u_p(t)
\end{aligned}\tag{1.1.15}$$

因而多输入-多输出系统的状态空间表达式的矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)\tag{1.1.16a}$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)\tag{1.1.16b}$$

式中$\mathbf{x}$为n维状态向量，而输入和输出分别用p维向量$\mathbf{u}$和q维向量$\mathbf{y}$表示：

$$\mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}$$

而其他 4 个矩阵为：（为简单起见，将时间变量t省略）

$$
\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots\cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots\cdots & b_{np} \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots\cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots\cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots\cdots & c_{qn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots\cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots\cdots & d_{2p} \\ \vdots & & & \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots\cdots & d_{qp} \end{pmatrix}
$$

矩阵A表示了系统内部状态变量之间的联系，取决于被控系统的作用机理、结构和各项参数，称之为系统矩阵；输入矩阵B表示各个输入变量如何控制状态变量，故亦称为控制矩阵；矩阵C表示输出变量如何反映状态变量，称为输出矩阵；D则表示输入对输出的直接作用，称为直接传递矩阵。

在状态空间表达式（1.1.16）中，一个动态系统的状态向量、输入向量和输出向量自然是时间t的函数，而矩阵A、B、C和D的各个元素如果与时间t有关，则称这种系统是线性时变系统，反之，如果各元素都是常数，则称为线性定常系统或线性时不变系统，这时，状态空间表达式为

$$
\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u} \tag{1.1.17a}
$$

$$
\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{u} \tag{1.1.17b}
$$

1.1.3 状态空间表达式的系统方块图

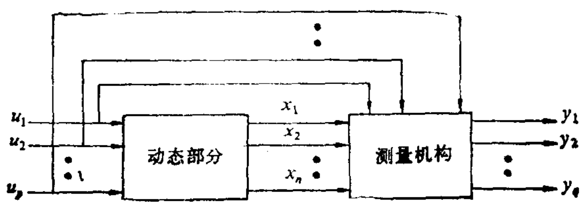

图 1.1.2

式（1.1.17）是线性定常系统状态空间表达式的一般形式，它不仅适用于多输入-多输出系统，当然也适用于单输入-单输出系统（见式1.1.13）。这种表示法的实质是把系统分成两部分，如图1.1.2所示。第一部分是动态部分，描述了系统状态变量与输入变量之间的关系，第二部分是测量机构，描述了系统输出变量与状态变量之间的关系，此外测量机构还反应了输入直接传递到输出变量的作用。

与古典控制理论类似，状态空间表达式也可用图1.1.3所示的方块结构图来表示。值得注意的是，图中的信号传输线一般是表示列向量，方框中的字母代表矩阵，每一方块的输入输出关系规定为

输出向量=(方块所示传递矩阵)×(输入向量)

在向量、矩阵的乘法运算中，顺序是不能颠倒的。

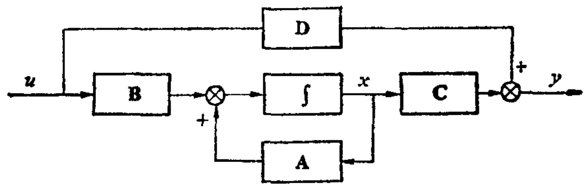

图 1.1.3

最后简短地谈一下非线性系统的状态空间表达式。非线性系统的状态方程可一般地写为

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t) \tag{1.1.18}$$

式中$\mathbf{x}$为n维状态向量，$\mathbf{u}$为p维输入向量，t为标量，$\mathbf{f}$是n维向量函数，即

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}、\mathbf{u}、t)=\begin{Bmatrix} f_1(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n,\ u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots u_p,\ t) \\ f_2(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n,\ u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots u_p,\ t) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n,\ u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots u_p,\ t) \end{Bmatrix} \tag{1.1.19}$$

而系统输出又是由系统的状态和输入决定的，一般可写为

$$\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ t) \tag{1.1.20}$$

如果$\mathbf{y}$为q维向量，则$\mathbf{g}$为q维向量函数

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}、\mathbf{u}、t)=\begin{Bmatrix} g_1(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n,\ u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots u_p,\ t) \\ g_2(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n,\ u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots u_p,\ t) \\ \vdots \\ g_q(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n,\ u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots u_q,\ t) \end{Bmatrix} \tag{1.1.21}$$

1.1.4 状态空间表达式的状态变量图

在状态空间分析中，常以状态变量图来表示系统各状态变量之间的关系，其来源出自于模拟计算机的模拟结构图，这种图为系统提供了一种物理图象，有助于加深对状态空间概念的理解。状态变量图又称为模拟结构图（在以后的叙述中，两种名称同时并用）。

所谓状态变量图是由积分器、加法器和放大器构成的图形。图1.1.4是积分器、加法器和放大器的常用表示符号。

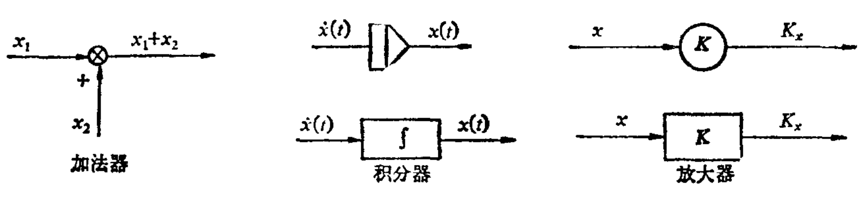

图 1.1.4

状态变量图的绘制步骤是：在适当的位置上画出积分器，它的数目应等于状态变量数，每个积分器的输出表示对应的状态变量，在其上注明编号，然后根据所给状态方程和

输出方程画上加法器和放大器最后用直线把这些元件连接起来并用箭头示出信号的传递关系。

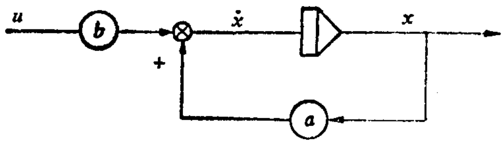

图 1.1.5

例1.1.2　设一阶系统的状态方程是

$$\dot{x}=ax+bu$$

则它的状态变量图为图1.1.5所示。

例1.1.3　设有三阶系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=x_3$$

$$\dot{x}_3=-6x_1-3x_2-2x_3+u$$

$$y=x_1+x_2$$

则它的状态变量图如图1.1.6所示。

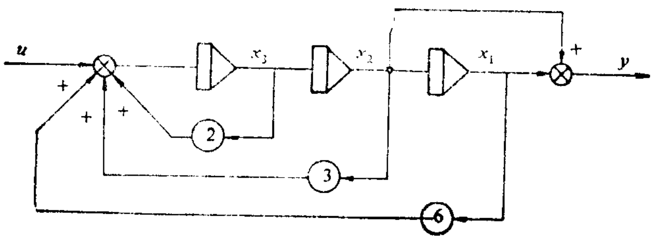

图 1.1.6

例1.1.4　双输入双输出系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_{11}u_1+b_{12}u_2$$

$$\dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+b_{21}u_1+b_{22}u_2$$

$$y_1=c_{11}x_1+c_{12}x_2$$

$$y_2=c_{21}x_1+c_{22}x_2$$

图1.1.7是该系统的状态变量图。

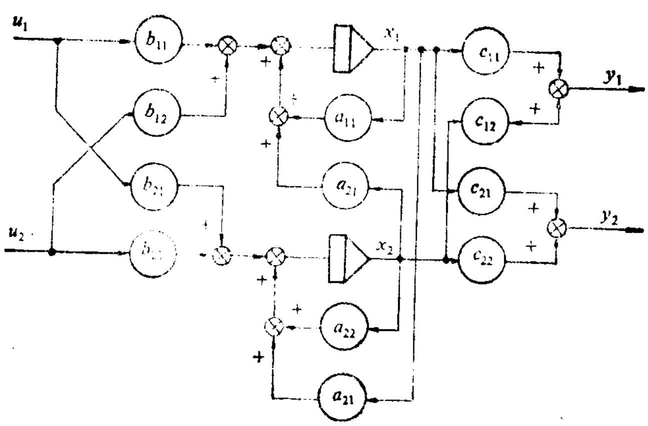

图 1.1.7

1.2 状态空间表达式的建立

1.2.1 由物理系统的机理直接建立状态空间表达式

控制系统按其属性有许多种类型，诸如工程控制系统、社会控制系统等。以工程控制系统来说，又有电气、机械、液压、热力等等之分。我们可以对不同的控制系统，根据其机理，即相应的物理和有关定理来建立系统的状态方程；当指定系统的输出后，也很容易地写出系统的输出方程。现举例说明状态空间表达式的列写方法。

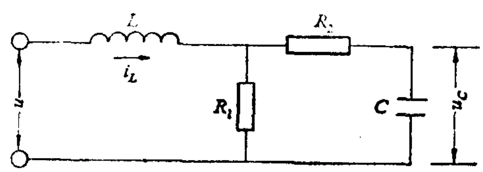

图 1.2.1

例1.2.1 有R-L-C网络如图1.2.1所示，图中电源电压$u(t)$为输入，电容电压u_C为输出，试写出此网络的状态空间表达式。

解 该网络是一个二阶系统，有两个储能元件，按电路理论选择电感L中的电流i_L和电容C上的电压u_C作为状态变量，即$x_1=i_L$，$x_2=u_C$根据基尔霍夫定律有下列两个方程

$$
\begin{cases}
i_L=\left(u-L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right)\dfrac{1}{R_1}+C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\\[2ex]
L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+u_C+C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}R_2=u
\end{cases}
$$

经整理得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=\dfrac{u}{L}-\dfrac{i_L}{L}\left(\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)-\dfrac{u_C}{L}\dfrac{R_1}{R_1+R_2}\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=\dfrac{R_1}{C(R_1+R_2)}i_L-\dfrac{1}{C(R_1+R_2)}u_C
\end{cases}
$$

以状态变量表示的状态方程有

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{L}\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}x_1-\dfrac{R_1}{R_1+R_2}\dfrac{x_2}{L}+\dfrac{u}{L}\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{R_1}{C(R_1+R_2)}x_1-\dfrac{1}{C(R_1+R_2)}x_2
\end{cases}
$$

而输出方程为

$$y=u_C=x_3$$

写成矩阵向量形式的状态空间表达式为：

$$
\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{L}\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2} & -\dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)}\\[2ex] \dfrac{R_1}{C(R_1+R_2)} & -\dfrac{1}{C(R_1+R_2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{L}\\[1ex] 0\end{pmatrix}u
$$

$$
y=[\,0\ \ 1\,]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}
$$

例1.2.2 如图1.2.2所示，试求用电枢电压控制的他激电动机的状态空间表达式。