

高等数学

东南大学高等数学教研室 编

(下 册)

东南大学出版社

内 容 提 要

本书是根据国家教委批准的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》，并结合东南大学高等数学课程的教学实践而编写的。

本书分上、下两册出版。下册内容为无穷级数，向量代数与空间解析几何，多元函数及其微分法，多元函数的积分，向量场的微积分，微积分中的近似计算。书末附有习题答案。

本书可作为高等工业学校高等数学课程教材或教学参考书，也可作为自学者的参考书。

前 言

本教材是根据国家教委批准的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》，并结合东南大学高等数学课程的教学实践而编写的。本书在保证基本要求的前提下，适当增加部分理论性内容，如确界公理、Cauchy 收敛准则、函数序列一致收敛性及凸函数等；加强对于处理工程技术问题有较大意义的矢量工具的应用，以矢量形式讲解多元函数微积分；集中介绍微积分中常用的近似计算方法，增强近似计算的思想方法；例题与习题中尽量增加一些应用题，以培养学生解决实际问题的能力。我们希望能使工科学生在逻辑推理能力、抽象思维能力和建立数学模型能力等方面有所加强，在数学素质上有所提高。

全书共 11 章分上、下两册。上册内容有极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分、微分方程、极限续论等 5 章及 1 个附录；下册内容有无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数及其微分法、多元函数的积分、向量场的微积分、微积分中的近似计算等 6 章。

本书第 1、5 章由顾宁平编写，第 2 章由吴学澄编写，第 3、4 章由史玉清编写，第 6 章及附录由王文蔚编写，第 7 章由彭龙编写，第 8 章由田明忠编写，第 9、10 章由罗庆来编写，第 11 章由夏建国编写。全书由王文蔚、罗庆来负责统稿。

本书在编写过程中，得到我校从事高等数学教学的老师、校教材建设委员会及东南大学出版社的大力支持和帮助，在此我们表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

东南大学高等数学教研室

1996 年 4 月

743216

目 录

6 无穷级数	(1)
6.1 数项级数	(1)
6.1.1 无穷级数的概念	(1)
6.1.2 级数收敛的条件	(4)
6.1.3 级数的基本性质	(7)
习题一	(10)
6.1.4 正项级数及其判别法	(11)
6.1.5 交错级数及其判别法	(21)
6.1.6 任意项级数的判别法	(24)
习题二	(26)
6.2 广义积分判别法	(28)
6.2.1 无穷区间的广义积分的判别法	(28)
6.2.2 被积函数有无穷型间断点的广义积分的判别法	(31)
6.2.3 Γ 函数	(33)
习题三	(35)
6.3 函数项级数	(36)
6.3.1 n 项级数的基本概念	(36)
6.3.2 级数的一致收敛性	(39)
6.3.3 一致收敛级数的性质	(42)
习题四	(45)
6.4 幂级数	(45)
6.4.1 幂级数的收敛半径	(46)
6.4.2 幂级数的性质	(51)
习题五	(55)
6.4.3 函数展开为幂级数	(56)

习题六	(71)
6.4.4 幂级数应用举例	(72)
习题七	(78)
6.5 傅里叶(Fourier)级数	(79)
6.5.1 三角函数系的正交性	(79)
6.5.2 欧拉—傅里叶公式	(80)
6.5.3 傅里叶级数	(81)
6.5.4 傅里叶级数的收敛性	(82)
6.5.5 正弦级数和余弦级数	(87)
6.5.6 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数	(91)
6.5.7 傅里叶级数的复数形式	(97)
习题八	(99)
总习题	(101)
7 向量代数与空间解析几何	(106)
7.1 空间直角坐标系	(106)
7.1.2 坐标轴的平移	(108)
7.1.3 两点间的距离	(109)
习题一	(110)
7.2 向量及其线性运算	(110)
7.2.1 向量	(110)
7.2.2 向量在轴上的投影	(114)
7.2.3 向量的坐标表示	(116)
7.2.4 向量的模及方向余弦	(118)
习题二	(120)
7.3 向量的数量积、向量积与混合积	(121)
7.3.1 数量积	(121)
7.3.2 向量积	(124)
7.3.3 向量的混合积	(128)
习题三	(130)
7.4 平面与直线	(132)
7.4.1 平面的方程	(132)

7.4.2	有关平面的一些基本问题	(136)
7.4.3	直线的方程	(139)
7.4.4	两直线的相互关系	(142)
7.4.5	直线与平面的有关问题	(143)
7.4.6	距离	(146)
7.4.7	平面束的方程	(148)
习题四		(149)
7.5	空间曲面与空间曲线	(152)
7.5.1	球面与柱面	(152)
7.5.2	空间曲线	(154)
7.5.3	锥面	(158)
7.5.4	旋转曲面	(160)
7.5.5	几个常见的二次曲面	(161)
7.5.6	曲面的参数方程	(165)
习题五		(167)
7.6	向量函数	(169)
7.6.1	向量函数的极限和连续性	(170)
7.6.2	向量函数的导数	(170)
7.6.3	向量函数的积分	(171)
总习题		(172)
8	多元函数及其微分法	(174)
8.1	多元函数概念	(174)
8.1.1	预备知识	(174)
8.1.2	多元函数概念	(176)
8.1.3	二元函数的几何意义	(177)
习题一		(177)
8.2	多元函数的极限与连续性	(178)
8.2.1	多元函数的极限	(178)
8.2.2	多元函数的连续性	(181)
习题二		(182)
8.3	偏导数	(183)

8.3.1	偏导数概念	(183)
8.3.2	偏导数的几何意义	(185)
8.3.3	高阶偏导数	(185)
习题三		(188)
8.4	全微分与梯度	(189)
习题四		(194)
8.5	复合函数微分法	(195)
8.5.1	全导数	(195)
8.5.2	复合函数微分法	(197)
习题五		(203)
8.6	隐函数微分法	(205)
8.6.1	由一个方程确定的隐函数	(205)
8.6.2	由方程组确定的隐函数	(207)
习题六		(208)
8.7	方向导数	(210)
习题七		(212)
8.8	微分法的几何应用	(213)
8.8.1	空间曲线的切线与法平面	(213)
8.8.2	曲面的切平面与法线	(215)
习题八		(217)
8.9	多元函数的极值	(218)
8.9.1	极值	(218)
8.9.2	最大值和最小值	(220)
8.9.3	条件极值——拉格朗日乘数法	(221)
习题九		(225)
总习题		(226)
9	多元函数的积分	(231)
9.1	二重、三重积分,第一型曲线、曲面积分的概念和性质	(231)
9.1.1	积分的概念	(231)

9.1.2	积分的性质	(235)
9.2	二重积分的计算	(236)
9.2.1	直角坐标系中二重积分的计算	(236)
9.2.2	用极坐标计算二重积分	(242)
9.2.3	二重积分的换元法则	(246)
习题一		(252)
9.3	三重积分的计算	(257)
9.3.1	直角坐标系中三重积分的计算	(257)
9.3.2	在柱面坐标系中三重积分的计算	(261)
9.3.3	在球面坐标系中三重积分的计算	(264)
9.3.4	三重积分的一般换元法则	(266)
习题二		(268)
9.4	重积分的应用	(271)
9.4.1	曲面的面积	(271)
9.4.2	重积分在物理中的应用举例	(274)
习题三		(280)
9.5	广义重积分	(281)
习题四		(285)
9.6	第一型曲线积分的计算	(285)
习题五		(288)
9.7	第一型曲面积分的计算	(290)
习题六		(293)
总习题		(294)
10	向量场的微积分	(298)
10.1	向量场	(298)
10.1.1	向量场的概念	(298)
10.1.2	向量线	(299)
10.2	第二型曲线积分	(301)
10.2.1	第二型曲线积分的概念	(301)
10.2.2	第二型曲线积分的计算	(304)

习题一.....	(310)
10.3 格林公式及其应用.....	(312)
10.3.1 格林公式	(312)
10.3.2 曲线积分与路径无关的条件	(316)
10.3.3 全微分方程	(323)
习题二.....	(323)
10.4 第二型曲面积分.....	(326)
10.4.1 曲面侧的概念	(326)
10.4.2 第二型曲面积分的概念	(327)
10.4.3 第二型曲面积分的计算	(331)
10.4.4 两类曲面积分的关系	(335)
习题三.....	(335)
10.5 散度与高斯公式.....	(336)
10.5.1 散度	(336)
10.5.2 高斯公式	(338)
习题四.....	(345)
10.6 旋度与斯托克斯公式.....	(347)
10.6.1 环量与环量面密度	(347)
10.6.2 旋度	(348)
10.6.3 斯托克斯公式	(348)
10.6.4 空间曲线积分与路径无关的条件	(353)
习题五.....	(355)
10.7 有势场与无源场.....	(356)
10.7.1 有势场	(356)
10.7.2 无源场	(357)
10.7.3 算符 ∇	(357)
习题六.....	(358)
总习题.....	(359)
11 微积分中的近似计算.....	(363)
11.1 近似计算	(363)
11.1.1 拉格朗日插值公式与最小二乘法	(363)

习题一.....	(368)
11.1.2 方程求根	(369)
习题二.....	(373)
11.1.3 定积分的近似计算	(373)
习题三.....	(380)
*11.1.4 重积分的近似计算	(380)
习题四.....	(387)
*11.1.5 摄动级数	(388)
习题五.....	(393)
*11.1.6 渐近级数	(394)
习题六.....	(400)
11.2 开普勒运动定律	(400)
习题七.....	(406)
习题答案.....	(407)

6 无穷级数

无穷级数与极限的关系十分密切,它是表达函数、构造新函数、函数逼近以及数值计算的一种重要的数学工具.本章介绍无穷级数的基本理论知识和一些应用.

6.1 数项级数

6.1.1 无穷级数的概念

中学里已经知道有限项的等比数列

$$1, r, r^2, \dots, r^{n-1} \quad (|r| \neq 1), \quad (1)$$

其和 $S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} \quad (|r| \neq 1)$, 它是一个数.

如果考虑的是无穷多项的等比数列

$$1, r, r^2, \dots, r^n, \dots \quad (|r| < 1), \quad (2)$$

那么这无穷多个数“相加”, 即 $1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots$, 其“和”的意义是什么? 无穷个数相加其和是有明确意义的, 它仍然是一个数, 现在是无穷多个数“相加”它的含义尚未明确. 现采用“由有限认识无限”的方法来认识它.

因为(2)的前 n 项相加其和是 $S_n = \frac{1-r^n}{1-r}$, 随着 n 不断变大 S_n 也不断变化, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-r}$, 所以我们自然地以 S_n 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限值 $\frac{1}{1-r}$ 作为无穷等比数列(2)的和, 即

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots = \frac{1}{1-r} \quad (|r| < 1).$$

如果考虑的是特殊的无穷等比数列

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots,$$

此时 $1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ 的含义怎样? 由于它的前 n 项和 S_n
 $= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n = n.$

显然, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $S_n \rightarrow \infty$, 从而 $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ 就不是一个数了, 这时它没有和.

上述无穷等比数列求和, 实际上包含两个步骤: 第一步先求前 n 项的和 S_n ; 第二步求前 n 项和 S_n 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限.

下面给出无穷级数的概念.

定义 1 设有无穷数列 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$,

称表达式 $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

为无穷级数, 简称级数, 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ 称为这个级数的项, u_n 称为级数的通项 (或一般项).

例如 $\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$ 是个级数, 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$, 其通项为 $\frac{3}{10^n}$.

定义 2 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

的前 n 项和

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + \dots + u_n$$

称为该级数的第 n 部分和, 简称部分和. 如果部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 并称 S 为该级数的和, 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S,$$

也称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S .

如果极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 此时级数没有和.

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, 则称 $r_n = S - S_n = u_{n+1} + \dots$ 为级数的余项.

由定义可知, 级数的敛散性取决于部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限是否存在.

例 1 讨论等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} (a \neq 0)$ 的敛散性.

解 级数的部分和

$$S_n = a + ar + \dots + ar^{n-1},$$

当 $r = 1$ 时, $S_n = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ 项}} = na \rightarrow \infty$, 级数发散;

$$\begin{aligned} \text{当 } r = -1 \text{ 时, } S_n &= a - a + a - a + \dots + (-1)^{n-1}a \\ &= \begin{cases} a, & \text{当 } n \text{ 为奇数;} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数.} \end{cases} \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 从而级数发散;

$$\text{当 } |r| \neq 1 \text{ 时, } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r},$$

由于 当 $|r| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$. 此时级数收敛于 $\frac{a}{1-r}$;

当 $|r| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, 此时级数发散.

结论: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} (a \neq 0)$ 当 $|r| < 1$ 时收敛, 其和为 $\frac{a}{1-r}$; 当 $|r| \geq 1$ 时发散.

例 2 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解 级数的部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$,

所以此级数收敛, 其和为 1.

例 3 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

解 因 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$,

$$\begin{aligned} \text{故 } S_n &= \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) \\ &= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1), \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$, 所以级数发散.

6.1.2 级数收敛的条件

我们知道, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性可归结为它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性. 现由数列的极限理论不难推得级数收敛的条件.

定理 1 (级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

证 设 S_n 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和, 则级数的通项 u_n 与部分和 S_n 有

以下关系

$$u_n = S_n - S_{n-1},$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 存在, 从而也有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S,$$

于是有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

注意: 级数的通项趋于 0 只是级数收敛的必要条件, 而不是充分条件. 有些级数它的通项虽趋于 0, 但却是发散的.

例如调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$, 它的通

项 $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 但它却是发散的.

事实上, 由于

$$S_2 = S_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$S_2^2 = S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2},$$

$$S_2^3 = S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right)$$

$$= 1 + \frac{3}{2},$$

$$\text{一般地 } S_2^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} \right)$$

$$> 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{k \text{ 项}} = 1 + k \frac{1}{2},$$

因为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{2}\right) = +\infty,$$

所以部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限不存在,从而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

由定理 1 可知,若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散.

例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ 发散,因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty \neq 0$;

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+1}$ 发散,因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5n+1} = \frac{1}{5} \neq 0$.

下面给出级数收敛的一个充分必要条件.

定理 2 (柯西收敛准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是

$\forall \varepsilon > 0, \exists$ 自然数 N ,使得当 $n > N$ 时,对任意自然数 p 总有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon.$$

证 设 S_n 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和,因为

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right|,$$

所以根据数列收敛的柯西准则: $\{S_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 自然数 N ,使得当 $n > N$ 时,对任意自然数 p ,总有 $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$,则得定理的结论.

例 4 应用柯西收敛准则证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

$$\begin{aligned} \text{证 } \forall \varepsilon > 0, \text{ 对于自然数 } n \text{ 及 } p, \text{ 由于 } & \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right| \\ = & \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| < \frac{1}{n(n+1)} \\ & + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n},$$

所以,只要取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 对任意自然数 p 都有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right| < \varepsilon,$$

根据柯西收敛准则, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

在实际问题中, 柯西准则使用起来是比较困难的, 但它在理论证明中是很有用的.

6.1.3 级数的基本性质

根据级数的概念, 可以得出级数的几个基本性质.

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S , k 为任意常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$

也收敛, 且有 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k \sum_{n=1}^{\infty} u_n = kS$.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和分别为 S_n 与 S'_n , 则 $S'_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = kS_n$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 故有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} kS_n = kS$. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛, 且其和为 kS .

由性质 1 不难推出: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, k 为非零的常数, 则

$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也发散.

事实上, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛, 则由性质 1 应有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} (ku_n)$ 收敛, 此与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散矛盾, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 发散.