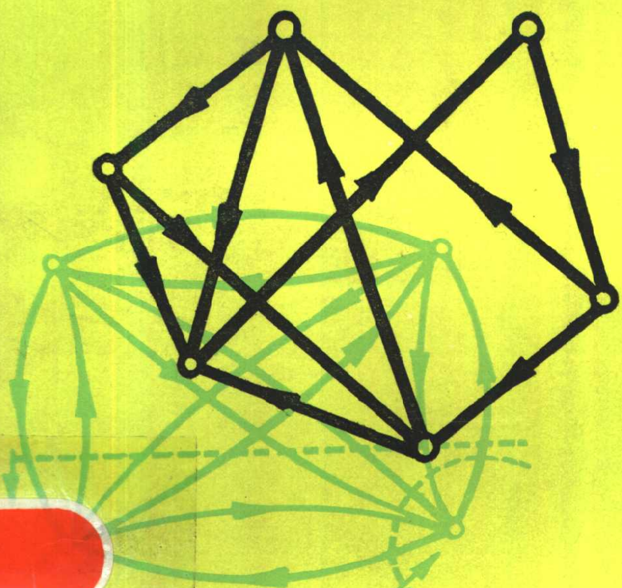
计算机科学丛书

图算法

马绍汉 编著



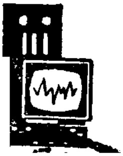
JISUANJI KEXUE CONGSHU

贵州人民出版社

计 算 机 科 学 丛 书

图 算 法

马 绍 汉 编 著



贵 州 人 民 出 版 社

封面设计　石俊生
技术设计　黑　黑

图　算　法

马绍汉　编著
贵州人民出版社出版发行
（贵阳市延安中路9号）
贵州新华印刷厂印刷　贵州省新华书店经销
787×1092毫米　32开本　7印张　150千字
1988年12月第1版　1988年12月第1次印刷
印数1—2,000
ISBN7-221-00679-2/TP·02　定价2.40元

《计算机科学丛书》

编 委 会

主　　编　李　祥

编　　委　(按姓氏笔画排列)

马绍汉　左孝凌　朱　洪　吕云麟

李琼章　李　祥　陈增武　张泽增

徐洁磐　徐美瑞　钱家骅　曹东启

管纪文

责任编辑　唐光明

编者的话

为了加速发展我国的计算机科学技术，在贵州人民出版社的大力支持和协助下，中国科学院软件研究所、复旦大学、吉林大学、浙江大学、武汉大学、南京大学、上海交通大学、山东大学、哈尔滨科技大学、西北电讯工程学院、贵州大学等有关方面的同志经过多次磋商，组成了《计算机科学丛书》编委会。

这套《丛书》的作者，大多是长期从事计算机科学技术方面的科研、教学工作并在近几年内出国考察或学习过的中年同志。他们既有丰富的实践经验，又对国内外计算机科学的进展有比较清楚的了解。《丛书》将向读者介绍现代计算机科学方面的进展及其理论、方法和应用知识，每本书的内容也都自成体系，独立成册，集中介绍一个专题。为了便于学习，部分书后还列有少量习题，可供读者练习。在写作上，《丛书》力求做到篇幅短，内容新，重点突出，适于读者自学，并使读者在较短时间内对每一个专题的动向和发展趋势得到较为完整的了解。

这套《丛书》可作大专院校有关学科的教材和参考书。《丛书》以大学生、研究生为主要读者对象，也可供大专院校教师、科研工作者和计算机工作者参考。

我们相信，这套《丛书》的出版，将对广大读者了解和掌握计算机科学知识有所裨益。

《计算机科学丛书》

编 委 会

一九八六年一月

序　言

图论的起源可追溯到十八世纪数学家欧拉对哥尼斯堡桥问题的研究。自本世纪中叶以来，由于计算机科学技术的发展，使图论广泛地应用于计算机科学、工程技术科学、管理科学及社会科学等各个领域。图算法的分析和设计是计算机科学研究的一个重要内容，许多大学的计算机科学专业都开置这方面的课程。

本书的原稿写于1981年，曾为山东大学计算机科学专业的学生讲授过多次，1986年对原稿做了修改和补充，交出版社付梓，形成这本书。编者认为，算法是计算机科学的中心，本书在编写上以图论中各种典型问题为纲，以其算法的分析和设计为中心，力求使图论和计算机科学有机地结合在一起。在内容安排上，前七章主要讨论图中有关路、树、流、连通度和平面性等问题的多项式时间算法以及图的搜索技术在算法设计中的应用，后两章主要讨论图论中一些典型的NP-完全问题。

本书可作为大学教材，也可作为计算机专业、管理科学专业学生及有关科学技术人员的参考书。

马绍汉

于山东大学南院

1987年12月16日

目　录

第一章　图和图的路算法

1.1　图的基本概念

一个图$G=(V, E)$是由非空有限集V及V中元素的无序对集合E构成的二元组(V, E)。称V中的元素为图G的顶点，E中的元素为图G中的边。在图1.1中所示的图G中，其顶点集合$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$，边集合$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$。其中，每条边对应着两顶点的无序对，例如，这里$e_1=(v_1,v_1)$，$e_2=(v_1,v_2)$，$e_3=(v_2,v_5)$，$e_4=(v_1,v_4)$，$e_5=(v_2,v_5)$。一般地说，在图$G=(V,E)$中，若$v_i,v_j\in V$，且$e_k=(v_i,v_j)\in E$，则称$v_i$和$v_j$是邻接的，记为$v_i\mathrm{adj}v_j$，称边$e_k$与顶点$v_i,v_j$相关联，顶点$v_i,v_j$为边

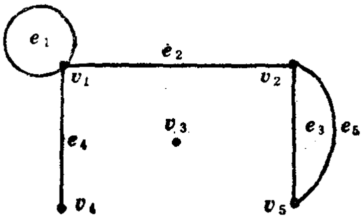


图1.1

e_k 的端点；否则称为不邻接的，记为 $v_i \text{nadj} v_j$。若两条边有一个公共端点，则称这两条边是邻接的；否则称为不邻接的。若一组边有相同的两个端点，则称这组边为重边。在这组边中边的条数为重边的重数。若一条边的两个端点相同，则称这样的边为环。在图1.1中，边 $e_2=(v_1,v_2)$ 和边 $e_3=(v_2,v_5)$ 相邻接，而边 $e_3=(v_2,v_5)$ 和边 $e_4=(v_1,v_4)$ 不邻接。边 $e_3=(v_2,v_5)$ 和边 $e_5=(v_2,v_5)$ 为一组 2 重边。边 $e_1=(v_1,v_1)$ 为环。既无重边也无环的图，称为简单图，在不引起混淆时，也称为图。在图 G 中，与一个顶点 v_i 相邻接的所有顶点集合，称之为 v_i 的邻域，记为 $N_G(v_i)$。与顶点 v_i 相关联的边的条数，称之为在图 G 中顶点 v_i 的度，记为 $d_G(v_i)$，有时简单地记为 $d(v_i)$，当一个顶点有一环时，该顶点度增加2。若 $d_G(v_i)=0$，则称顶点 v_i 为 G 中的孤立顶点；若 $d_G(v_i)=1$，则称顶点 v_i 为 G 的端点。例如，在图1.1中，$N_G(v_2)=\{v_1,v_5\}$，$N_G(v_1)=\{v_2,v_4\}$；$d_G(v_2)=3$，$d_G(v_1)=4$；在图 G 中 v_3 为孤立顶点，v_4 为其端点。

由顶点度的定义，容易看出，在图 G 中，移去一条边，使其相应两个顶点的度各减少1。于是有下述定理

【定理1.1】 图 $G=(V,E)$ 中顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_p$ 度之和为

$$\sum_{i=1}^{p} d_G(v_i)=2q \tag{1.1}$$

其中 $|V|=p$，$|E|=q$ 分别表示图 G 中顶点和边的数目。

【推论1.2】 任一图 G，度为奇数的顶点个数不是奇数。

证明 由式(1.1)知，任何图 G，其顶点度之和为偶数

$$\sum_{i=1}^{p} d_G(v_i)=\sum_{v_1} d_G(v_i)+\sum_{v_2} d_G(v_i)$$

其中$\sum\limits_{p_1} d_G(v_i)$表示$G$中所有度为奇数的顶点度之和，$\sum\limits_{p_2} d_G(v_i)$表示$G$中所有度为偶数的顶点度之和。由于$\sum\limits_{i=1}^{p} d_G(v_i)$和$\sum\limits_{p_2} d_G(v_i)$均为偶数，所以$\sum\limits_{p_1} d_G(v_i)$也必为偶数。但由于假定$\sum\limits_{p_1} d_G(v_i)$中各项$d_G(v_i)$均为奇数，所以其项数必为偶数。

图G中一条路是边序列$e_1, e_2, \cdots$，满足

（1）e_i和e_{i+1}相邻接；

（2）如果e_i既不是环，也不是序列中第一条边和最后一条边，则e_i的两个端点必然有一个为e_{i-1}的端点，另一个为e_{i+1}的端点。

例如，在图1.2所示的图中，边序列e_1, e_4, e_3和e_1，e_2，e_2, e_3均是一条路，但边序列e_1, e_2, e_3不是一条路。为了方

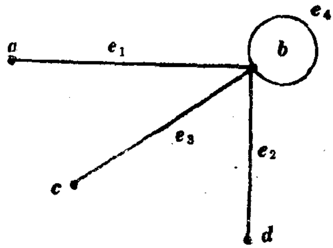


图1.2

便，有时我们将路写成顶点序列$v_0v_1v_2\cdots v_iv_{i+1}\cdots v_n$，其中$e_i$

$=v_{i-1}v_i(1\leqslant i\leqslant n)$。$v_0$ 和 v_n 分别称之为这条路的起点和终点，路的长度为 n。

如果一条路其起点和终点为同一个顶点，则称这条路为回路。在一条路上，如果所有边都不相同，则称这条路为简单路；如果所有顶点都不相同，则称这条路为初等路。在一条回路上，如果所有边都不相同，则称这条回路为简单回路；如果除起点和终点外，其余顶点均不相同，则称这条回路为初等回路，有时也称之为圈。但不能认为 $v_1v_2v_1$ 为初等回路。

类似地可定义有向图 $G=(V,E)$，只需将 E 定义为 V 中顶点的有序对集合即可。此时 E 中的元素称之为有向边或弧。在有向图的情况下，对有向边 $e=(v,u)$，称顶点 v 为其起点，顶点 u 为其终点，称 e 为从顶点 v 到顶点 u 的有向边（弧）。这里，重边必须是有相同起点和终点的一组有向边。在有向图 G 中，以顶点 v_i 为起点的有向边的条数，称为顶点 v_i 的出度，记为 $od(v_i)$；以顶点 v_i 为终点的有向边的条数，称为顶点 v_i 的入度，记为 $id(v_i)$。顶点 v_i 的度 $d(v_i)=od(v_i)+id(v_i)$。同样，若在顶点 v_i 处有一个环，则顶点 v_i 的出度和入度各增加 1。对任一有向图 $G=(V,E)$，显然有

$$\sum_{i=1}^{|V|} id(v_i)=\sum_{i=1}^{|V|} od(v_i)$$

在有向图中一有向通路是弧序列 $e_1e_2\cdots$，其中 e_{i-1} 的终点是 e_i 的起点。如果有向路的起点和终点相同，则称其为有向回路。与无向图的情况类似，可定义有向简单路、有向简单回路，有向初等路和有向初等回路（有向圈）等概念。

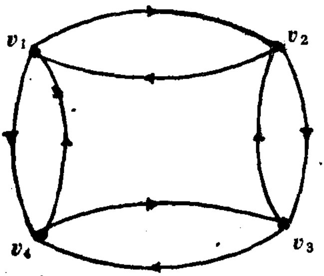
在图 G 中，如果对于任意两顶点 u，v，都存在连结 u

和 v 的路，则称图 G 是连通的。若 G 为有向图，对于 G 中任意两个顶点 u 和 v，都存在从 u 到 v 的有向路，则称有向图 G 为强连通的。强连通的概念意味着，对有向图 G 中任意两个顶点 u 和 v，既存在从 u 到 v 的有向路又存在从 v 到 u 的有向路。设 $G=(V,E)$ 是一有向图，若将 G 的所有弧都改成（无向）边，则得到一无向图 G，并称它为有向图 G 的基础图。若有向图的基础图为连通的，则其有向图为连通的。

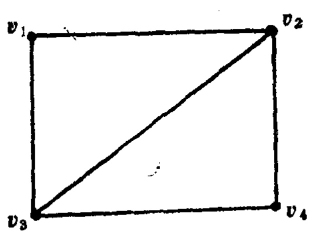
1.2 描述图的数据结构

为设计、分析图算法，需要介绍在计算机技术中描述图所使用的数据结构。这里，介绍两种主要的数据结构。

对于简单有向图 $G=(V,E)$，描述它的一种数据结构是邻接矩阵 A。设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则 G 的邻接矩阵 A 是一个 $n\times n$ 矩阵，矩阵 A 的任意元素 $A[i,j]=1$，当且仅当在 G



(a)



(b)

图1.3

中存在从顶点 v_i 到顶点 v_j 的一条有向边；否则，$A[i,j]=0$。例如，图1.3(a)中所示的有向图的邻接矩阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

对于简单(无向)图 $G=(V,E)$，也可用其邻接矩阵描述之。这里，邻接矩阵 A 的任意元素 $A[i,j]=1$，当且仅当在图 G 中有一条连结顶点 v_i 和 v_j 的边；否则，$A[i,j]=0$。例如，图1.3(b)所示图的邻接矩阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

读者应当注意，对于简单图 G 的邻接矩阵 A 是对称的0，1矩阵，但对简单有向图 G 而言，其邻接矩阵的对称性却不一定存在。

用邻接矩阵描述图的优点是直观地描述顶点之间的邻接关系。利用矩阵性质可进一步研究图的结构性质。例如，若图 G 的邻接矩阵为 A，A 的元素 $A[i,j]$ 实际上给出了从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为1路的数目。从这件事实出发，可导出更一般的性质。

【定理1.3】 设 A 是图 G 的邻接矩阵，则 $A^k=A\cdot A\cdot\cdots\cdot A$ 的 (i,j) 元素 $A^k[i,j]$ 等于 G 中连结顶点 v_i 和顶点 v_j 且长度为 k 的路的条数。

证明 对 k 用数学归纳法证明之。当 $k=1$，$A^1=A$，即是图 G 的邻接矩阵，$A[i,j]$ 是从顶点 v_i 到顶点 v_j 且长度

为 1 的路的数目。于是，对 $k=1$，定理成立。

假定定理对 k 成立，由于 $A^{k+1}=A\cdot A^k$，根据矩阵乘法有

$$A_{[i,j]}^{(k+1)}=\sum_{l=1}^{n}A[i,l]A^k[l,j]$$

由于 $A[i,l)$ 是连结顶点 v_i 和顶点 v_l 长度为 1 的路的数目，$A^{(k)}[l,j]$ 是连结顶点 v_l 和顶点 v_j 且长度为 k 的路的数目。所以

$$\sum_{l=1}^{n}A[i,l]A^{(k)}[l,j]$$

中的每一项 $A[i,l]\cdot A^{(k)}[l,j]$ 表示由顶点 v_i 经过一条边到顶点 v_l，再经过长度为 k 的路到顶点 v_j 的路的数目，这组路的长度都为 $(k+1)$。对所有 l 求和（$1\leqslant l\leqslant n$），得出 $A^{(k+1)}[i,j]$ 是连结顶点 v_i 和 v_j，所有长度为 $(k+1)$ 的路的数目。于是定理对 $(k+1)$ 也成立。

【推论1.4】 $A^2[i,i]=\sum_{j=1}^{n}A[i,j]=\sum_{j=1}^{n}A[j,i]=d_G(v_i)$

对于有向图 G 的邻接矩阵，读者可引伸出相应的结论。

使用邻接矩阵描述图的主要缺点是，邻接矩阵需要 $O(n^2)$ 的存贮空间，即使图中的边很稀疏（边的条数远小于 $O(n^2)$）也是如此。简单地扫描邻接矩阵也需要 $O(n^2)$ 时间。这样，在扫描具有 $O(n)$ 条边的图或有向图，算法的时间复杂性也不会是 $O(n)$，而至少应为 $O(n^2)$。

为克服这个缺点，我们可用邻接表结构来描述有向图和图。有向图 $G=(V,E)$ 中任一个顶点 v_i 的邻接表是一个表，

按照某种顺序列出邻接于顶点 v_i 的所有顶点。我们用数组 $HEAD$ 描述 G，此处 $HEAD[i]$ 是一个指针，它指向顶点 v_i 的邻接表。有向图 G 的邻接表的存贮空间与 G 的顶点和弧的数目之和成正比，即为 $O(|V|+|E|)$。当 G 中弧的数目 $|E|$ 远小于 $O(n^2)=O(|V|^2)$ 时，通常采用邻接表结构描述图，例如图1.4(a)所示的有向图 G 的邻接表如图1.4(b)所示。

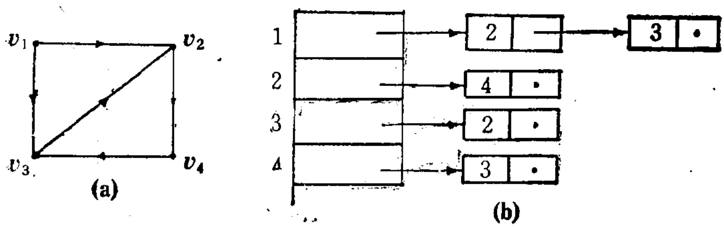


图1.4

无向图 $G=(V,E)$ 和有向图一样，也可用邻接表结构描述。例如图1.3(b)所示的图 G，其邻接表如图1.5所示。

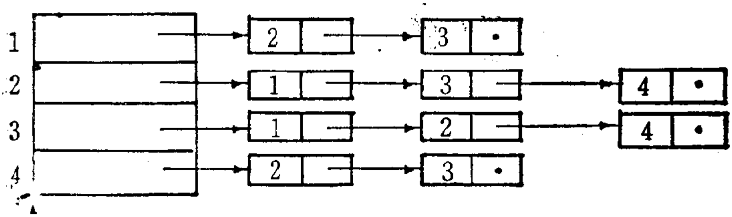


图1.5