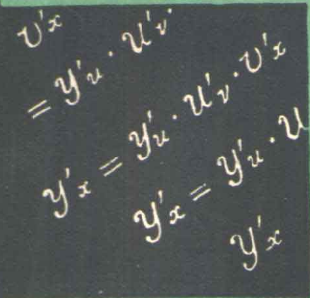

中学数学辅导丛书

复合函数的导数

李 辉　邵贻萍　编

黑龙江科学技术出版社

复合函数的导数

Fuhe Hanshu De Daoshu

李 辉 编

黑 龙 江 科 学 技 术 出 版 社

一九八四年·哈尔滨

责任编辑：张宪臣
封面设计：仁 之

复合函数的导数

李 辉 编

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区分部街28号）
黑龙江新华印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米 1/32·印张3·字数60千
1984年8月第一版·1984年8月第一次印刷
印数：1—45,000

书号：13217·108　　定价：0.40元

前　言

根据《全日制重点中学数学教学大纲(草案)》规定，中学数学教材增加了行列式、矩阵、向量、集合、逻辑代数、概率和微积分等内容。为了帮助广大中学师生正确理解和掌握这些新内容，我们组织编写了这套《中学数学辅导丛书》。它包括行列式、矩阵和线性方程组、向量、集合、逻辑代数、极限与连续、复合函数的导数、导数的应用、不定积分、定积分的应用、随机变量等。

这套丛书密切结合现行全日制六年制重点中学数学课本，全面地介绍了课本中增加的新内容，并适当地做了拓宽和加深，以利于教学使用。

由于我们编写丛书的经验不足和水平有限，不妥之处在所难免，敬请读者提出宝贵意见，以便今后改进，使本丛书成为广大中学师生有益的参考书。

葛　棠　戴再平　韩殿发

一九八二年十月

目　录

一、复 合 函 数

在一个自然现象或生产过程中，两个变量间的关系有时不是直接的，而是通过另一个（或几个）中间变量为媒介联系起来的。例如，图 1-1 是一个偏心驱动机构，当曲柄 $OA=a$ 绕定轴 O 以等角速度 ω 旋转时，滑块 A 在滑道 BC 内滑动，从而带动柱塞 E 沿竖直导轨作上下往复运动来进行工作，这种运动叫做简谐运动，如果要研究柱塞 E 运动的速度和加速度，首先必须建立柱塞 E 的位移与时间之间的函数关系。

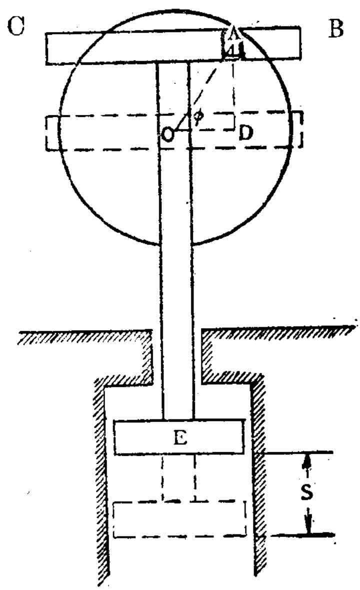

图 1-1

设曲柄 OA 转动角度为 φ，柱塞 E 的位移为 S，由图 1-1 可见：

$$S=DA$$

因为

$$DA=OA\cdot\sin\varphi=a\sin\varphi.$$

所以位移 S 是转角 φ 的函数。

$$S=a\sin\varphi\quad(S=S(\varphi))$$

由于曲柄 OA 以等角速度 ω 旋转，从而转角 φ 是时间 t 的函数

$$\varphi=\omega t(\varphi=\varphi(t)) \quad (2)$$

这样，通过中间变量 φ 为媒介，位移 S 就成了时间 t 的函数，将(2)式代入(1)式，就得到这个函数的表达式

$$S=a\sin\varphi=a\sin\omega t \quad (S=[\varphi(t)])$$

这里 S 是 φ 的函数，而 φ 又是 t 的函数，从而 S 通过中间变量 φ 的联系也是 t 的函数。这时我们就说 S 是 t 的复合函数。

一般地，如果变量 y 是变量 u 的函数，$y=y(u)$，而变量 u 又是变量 x 的函数 $u=u(x)$，且对于函数 $u(x)$ 定义域中每一个值 x 所对应的 u 的值都属于函数 $y(u)$ 的定义域，那么消去 u 后就有

$$y=y[u(x)]$$

我们把这个函数叫做由函数 $y=y(u)$ 和 $u=u(x)$ 复合而成的**复合函数**。u 称为**中间变量**。简单地说，所谓复合函数就是“函数的函数”。

例 1 如果设 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$；那么这两个函数的复合函数是

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

显然，这个复合函数的定义域是闭区间$[-1,1]$。

例 2 如果设 $y=\ln u$，$u=\sin x$；那么这两个函数的复合函数是

$$y=\ln\sin x$$

函数的定义域是所有使 $\sin x>0$ 的 x 的集合，即

$$\{x \mid 2n\pi < x < (2n+1)\pi\} \quad (n \text{ 为整数})$$

考虑复合函数的定义域是很重要的，因为不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的。如 $y=\arcsin u, u=x^2+2$；就不能复合成一个复合函数，因为对于 $u=x^2+2$ 的定义域 $(-\infty,\ \infty)$ 中任何 x 值所对应的 u 的值，$y=\arcsin u$ 都没有意义。

复合函数未必只复合一次，可能复合几次。例如，$y=u^2$，$u=\cos v$，$v=ax++b$；经过两次复合便得到

$$y=\cos^2(ax+b)$$

所以，复合函数不仅可以由两个函数复合而成，也可以由两个以上的函数逐步复合而成。

我们不仅要会将几个函数复合成一个函数，而且更重要的是，要善于将一个比较复杂的函数分解为几个简单的函数，即将一个复杂的函数，把它看作是由某些简单函数复合成的。这样就可使对复杂函数的研究变成对几个简单函数的研究，以便于使问题容易解决。如 $y=(ax^2+bx+c)^3$．可以看作是 $y=u^3$，$u=ax^2+bx+c$ 复合而成的。

例 3　指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=(1+2x^3)^4$；　　(2) $y=\ln\dfrac{ax+b}{cx+d}$；

(3) $y=\cos\sqrt{1+x^2}$；　　(4) $y=\ln\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$。

解　(1) $y=(1+2x^3)^4$ 是由函数 $y=u^4$ 与函数 $u=1+2x^3$ 复合而成的。

(2) $y=\ln\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 是由函数 $y=\ln u$ 与函数 $u=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 复

合而成的.

(3) $y=\cos\sqrt{1+x^2}$ 是由函数 $y=\cos u, u=\sqrt{v}$ 与 $v=1+x^2$ 复合而成的.

(4) $y=\ln\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$ 是由函数 $y=\ln u$, $u=\operatorname{arctg}v$ 与 $v=\frac{x}{2}$ 复合而成的.

例 4 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $\varphi(x)=\sqrt{1+x^2}$, 求 $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]=\frac{1}{1+[\varphi(x)]^2}=\frac{1}{2+x^2}$

$$\varphi[fx]=\sqrt{1+[f(x)]^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x^4+2x^2+2}}{1+x^2}$$

由此可见，复合函数的复合次序不能调换.

由基本初等函数（如幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等）与常数经过有限次的四则运算与函数的复合步骤所构成，并且由一个式子表示的函数，叫做初等函数. 如上面所例举的函数.

$y=a\sin\omega t$, $y=\sqrt{1+x^2}$, ……$y=\ln\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$ 等都是初等函数.

练 习 一

1. 指出下列复合函数的复合过程;

(1) $y=(1+x+x^2)^{100}$;　　(2) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$;

(3) $y=a^{\sin^2 x}$;　　(4) $y=\log_a \cos x^2$;

(5) $y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$;　(6) $y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$.

2. 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，求 $f(x^2+1)$，$f(t^2)$，$f(\sin y)$.

3. 设 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=2^x$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$，$f[f(x)]$.

二、复合函数的导数

函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$，就是函数的改变量 Δy 与自变量的改变量 Δx 的比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 当 $\Delta x\to 0$ 时的极限．即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

用定义可求出某些简单函数的导数，或用基本初等函数的求导公式以及导数的四则运算法则可解决某些函数的求导问题。但要解决如 $y=\ln\sin x$，$y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$ 等这样的复合函数的求导问题是很困难的，甚至是不可能的。这类问题在实际中是经常遇到的，因此有必要建立复合函数的求导公式。

首先分析一个简单的例子。

已知 $y=\sin 2t$，求 y 对 t 的导数．

可能有人认为，这个问题很简单，因为由正弦函数求导公式 $(\sin x)'=\cos x$，就可立即得去：

$$(\sin 2t)'=\cos 2t$$

这个结论是不对的，因为由

$$y=\sin 2t=2\sin t\cdot\cos t$$

根据乘积的求导法则，有

$$\begin{aligned}y'&=(\sin 2t)'=(2\sin t\cdot\cos t)'\\&=2[(\sin t)'\cos t+\sin t(\cos t)']\\&=2(\cos^2 t-\sin^2 t)\\&=2\cos 2t.\end{aligned}$$

可见，$\sin 2t$ 的导数应是 $2\cos 2t$，而不是 $\cos 2t$. 那么究竟错在哪里呢？这是因为函数 $y=\sin 2t$ 是由

$$y=\sin u \text{ 与 } u=2t$$

复合而成的复合函数，上面的错误在于，只是求出了函数 y 对于中间变量 $u(u=2t)$ 的导数，而我们要求的却是 y 对自变量 t 的导数，用 y 对 u 的导数来代替了 y 对 t 的导数。

由这个简单的例子可以看出，在研究复合函数的导数时，由于引进了中间变量，在求导时，一定要弄清楚是哪个变量对哪个变量求导。

由于这一复合函数比较简单，因而它的导数容易求出，而对于较复杂的复合函数，应怎样求出其导数，它的一般法则是什么呢？普遍性存在于特殊性之中，如果我们对以上例子进一步分析。$y=\sin 2t$ 是由 $y=\sin u$ 与 $u=2t$ 复合而成的函数，而 $y'_u=(\sin u)'=\cos u=\cos 2t$，又 $u'_t=(2t)'=2$，我们就不难发现，y'_u 与 u'_t 的乘积 $y'_u\cdot u'_t=2\cos 2t$，正好与用乘积的求导法则求得的结果一致，即

$$y'_t=y'_u\cdot u'_t=2\cos 2t^*$$

这就启发我们去考虑这样一个问题：对于可导函数 $y=y(u)$ 和 $u=u(x)$ 复合而成的复合函数 $y=[u(x)]$，是否仍有 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$ 呢？下面我们就来研究这个问题。

当自变量 x 有改变量 Δx 时，相应的中间变量 u 有改变量 Δu。

---

* 我们在导数符号的右下方添写了一个字母（变量符号），表示这个导数是对这个变量的，避免引起误解。

$$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$$

对于 u 的改变量 Δu，相应的函数 $y=y(u)$ 又有改变量 Δy。

$$\Delta y = y(u+\Delta u) - y(u)$$

因为函数 $y=y(u)$ 在点 u 的导数存在，所以

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'(u)$$

因此，根据极限与无穷小之间的关系*，我们有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'(u) + \alpha$$

其中当 $\Delta u\to 0$ 时，$\alpha\to 0$，两边各乘以 $\Delta u\neq 0$，即得

$$\Delta y = y'(u)\cdot\Delta u + \alpha\cdot\Delta u$$

因为 u 是中间变量，所以 Δu 可能为零。但当 $\Delta u=0$ 时，显然上式左边的改变量 Δy 为零，而上式右边不论 α 为任何值时也为零。因此，我们可以补充定义，当 $\Delta u=0$ 时，$\alpha=0$。这样使得不论 Δu 是否为零，上式均成立。

$u=u(x)$ 在点 x 处是连续的，即 $\Delta x\to 0$ 时 $\Delta u\to 0$（不论 $\Delta u\to 0$ 的过程中，是否取 0 值），总有 $\alpha\to 0$。

再用 $\Delta x\neq 0$ 除上式两边，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

根据已知条件有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$$

---

* 以 0 为极限的变量称为无穷小，读者不难证明具有极限的函数，可表示为等于其极限的一个常数与无穷小的和这一事实。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[y'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]$$

$$=y'(u)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

即 $$y'_x=y'(u)\cdot u'(x)$$

由上述可见，如果函数 $u=u(x)$ 在点 x 处有导数 $u'_x=u'(x)$，函数 $y=y(u)$ 在对应点 u 有导数 $y'_u=y'(u)$，则复合函数 $y=y[u(x)]$ 在该点 x 也有导数，并且它等于导数 $y'(u)$ 与导数 $u'(x)$ 的乘积。

$$y'_u=[u(x)]=y'(u)\cdot u'(x)$$

或

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x$$

这就是复合函数求导数的公式。(法则)

把这一公式同变量间的锁链关系

$$y-u-x$$

联系起来是很容易记忆的。从变化率的角度（y'_x 表示在点 x 处因变量 y 对自变量的变化率）来看，公式的意义也是明显的，因 u'_x 是 u 对 x 的变化率，即 x 每变化一单位时 u 的改变量，而 y'_u 是 y 对 u 的变化率，即 u 每变化一单位时 y 的改变量，那么 $y'_u\cdot u'_x$ 就是 x 每变化一单位时 y 的改变量，也就是 y 对 x 的变化率 y'_x 了。

利用数学归纳法，我们可以把上述复合函数的求导公式推广到有限个函数复合而成的复合函数的求导公式。也就是说，复合函数的导数等于每个构成函数的导数的乘积。例如

$y=y(u)$，$u=u(v)$，$v=v(x)$．$(y-u-v-x)$

则

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

因为大量的初等函数是以复合函数的形式出现的，所以复合函数求导数所遵循的这种“锁链规则”，在导数计算中起着极为重要的作用，必须牢固掌握。由上述公式可以看出，复合函数求导的关键在于把一个初等函数分解成基本初等函数复合的形式。在求导过程中，把基本初等函数设作中间变量，分别求导后连乘起来即可。

为了熟练掌握复合函数的求导，建议读者分三步进行：第一步，求导过程中的每一步都把中间变量写出来；第二步，比较熟练以后，摆脱引入中间变量的字母，但仍在算式中单独列出，按部就班地做；第三步，经过大量练习，对求导运算熟练了，只要做到心中有数，可直接写出求导结果。下面分别举例说明：

例 1 求下列复合函数的导数：

(1) $y=\sin x^2$；(2) $y=(1+2x^3)^4$；

(3) $y=\ln\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (a, b, c, d 为常数)；

(4) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}$.

解 (1) 设 $y=\sin u$，$u=x^2$.

因为 $$y'_u=(\sin u)'_u=\cos u$$

$$u'_x=(x^2)'_x=2x$$

根据复合函数求导数的“锁链规则”，得

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\cos u\cdot 2x=2x\cos x^2$$

这里，由于 $y=\sin x^2$ 是 x 的函数，中间变量 u 仅仅是为了求导数而引入的，因此，在求出导数后，应把 u 再换成 x

的函数。

(2) 设 $y=u^4$，$u=1+2x^3$。

因为

$$y'_u=(u^4)'_u=4u^3$$

$$u'_x=(1+2x^3)'_x=6x^2$$

根据"锁链规则"得

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=4u^3\cdot 6x^2$$

$$=4(1+2x^3)^3\cdot 6x^2=24x^2(1+2x^3)^3$$

(3) 设 $y=\ln u$，$u=\dfrac{ax+b}{cx+d}$。

$$\therefore\quad y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\ln u)'_u\cdot\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'_x$$

$$=\frac{1}{u}\cdot\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$=\frac{cx+d}{ax+b}\cdot\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{cx+d}$$

此例也可以利用对数性质，将函数作下列变形

$$y=\ln\frac{ax+b}{cx+d}=\ln(ax+b)-\ln(cx+d)$$

对于 $\ln(ax+b)$，其中间变量 $u=ax+b$ 有

$$[\ln(ax+b)]'=(\ln u)'(ax+b)'=\frac{a}{u}=\frac{a}{ax+b};$$

对于 $\ln(cx+d)$，其中间变量 $u=cx+d$，有

$$[\ln(cx+d)]'=(\ln u)'(cx+d)'=\frac{c}{u}=\frac{c}{cx+d}$$

所以

$$y'_x = \left[\ln\frac{ax+b}{cx+d}\right]' = \frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d}$$

$$= \frac{ad-bc}{(ax+b)(cx+d)}$$

（4）对于无理函数的求导，通常将根式化为指数的形式，以利于计算。

$$y = \sqrt[3]{x - \sqrt[3]{x}} = (x + x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}$$

设 $y = u^{\frac{1}{3}}$，$u = x + x^{\frac{1}{3}}$

$$\therefore \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x) = (u^{\frac{1}{3}})' \cdot (x + x^{\frac{1}{3}})'$$

$$= \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(x + x^{\frac{1}{3}})^{-\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)$$

若此结果仍用根式表示，则有

$$y'_x = \frac{1 + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{3\sqrt[3]{(x + \sqrt[3]{x})^2}}$$

$$= \frac{1 + 3\sqrt[3]{x^2}}{9\sqrt[3]{[x(x + \sqrt[3]{x})]^2}}$$

例 2　求下列函数的导数：

（1）$y = \ln(\cos x^2)$；　　　　（2）$y = \mathrm{tg}[\sin^3(\cos^2 x)]$。

解　（1）这是一个经过两次复合的复合函数，即

$$y = \ln u,\quad u = \cos v,\quad v = x^2$$

根据“锁链规则”有

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = (\ln u)' \cdot (\cos v)'(x^2)'$$