最优化技术基础

范鸣玉　张　莹　编著

清华大学出版社

最优化技术基础

范鸣玉　张　莹　编著

清华大学出版社

1982.11.

内 容 提 要

最优化技术可广泛应用于机械、电力、化工、石油、冶金、矿山、建筑、水利、交通运输、邮电通讯、环境保护、轻工、农业、林业、商业、国防等各部门解决诸如生产规划、经济管理、能源利用、产品设计、工艺过程设计、控制系统设计等方面的最优化问题，是促进国民经济多快好省发展的一种有效方法。

本书是清华大学自动化系的自编教材。本书共分三篇：线性规划、非线性规划、动态规划，共十四章。本书主要内容为有关线性规划、非线性规划、动态规划的基本概念及基本原理；各种计算方法及其 BASIC 语言程序、FORTRAN 语言程序；以及各方面的应用实例。本书力求深入浅出，通俗易懂，着眼于应用，书中共有 28 个程序，28 个应用实例，并附有习题，便于自学。

本书可供大专院校学生作为教材，也可供各行各业的工程技术人员和管理人员自学参考。

最优化技术基础

范鸣玉　张　莹　编著

★

清华大学出版社出版
北京　清华园
清华大学印刷厂胶印
新华书店北京发行所发行 • 各地新华书店经售

★

开本：787×1092　1/16　印张：20 1/4　字数：466（千字）
1982 年 10 月第一版　1982 年 12 月第一次印刷
印数 1～40000

统一书号：15235•62　定价：2.30 元

最 优 化 技 术 基 础

目 录

引　言

（一）什么是最优化问题

我们在做一切工作时，总希望我们所选用的方案是一切可能方案中最优的方案，这就是最优化问题。

下面举一些例子进一步说明之。

（1）安排生产计划方面　如何在现有人力、物力条件下，合理安排产品生产，使总产值为最高。

（2）确定生产工艺过程方面　例如化工系统，如何在保证产品质量的前提下，选择合理的操作方式，使操作费用最省。

（3）产品设计方面　例如设计一个机械零件时，如何在保证强度的前提下使重量最轻，或加工工时最短。又如电磁系统（如变压器）的设计，如何在满足性能要求的前提下，使铁心尺寸最小。

（4）配料方面　如何合理配料，在保证质量要求的前提下使成本最低。

（5）自动控制系统中参数的设定　例如轧钢自动控制系统中连轧机各架轧机压下量的设定：当坯料厚度 H_0 和成品厚度 H 一定时，在保证设备强度能力、电机容量、板型条件等限制条件都能满足的情况下，如何合理分配各架轧机的压下量，使达到最优工作状态。

又如在 PID 自动调节系统中，如何合理选择 PID 调节器的参数，使自动调节系统的品质指标为最好。

（6）工厂布局、物资调配方面　例如工厂如何合理布局，物资如何合理调配，使运输费用为最省。

（7）交通运输方面　例如火车由甲站开往乙站，如何在保证安全行驶的条件下，使时间最省。又如汽车运输问题，如何选择合理的路线，使运输费用最省。

（8）农业方面　例如利用温室生产蔬菜，应如何合理调节室内的温度、湿度，使蔬菜生产周期最短或产量最高。

（9）林业方面　例如应如何建造防护林带，使既能阻挡风沙，而又最经济。又如应如何合理砍伐森林，使成材的木料最多。

（10）商业方面　例如应如何合理组织货源，既能满足顾客的需求，而又使资金周转最快。又如应如何薄利多销，使总的利润为最高。

（11）国防方面　例如多级火箭的发射问题：如何在规定时间内，烧完规定的燃料，使达到的速度最大；或在规定时间内，达到某一定速度，而使燃料最省。又如潜艇的最速沉降问题：作用于潜艇上的垂直力应如何随时间变化，使潜艇在满足某些限制下沉降到达给定深度所经历的时间为最短。

从以上这些例子中可以看出：在各个生产、科研领域中普遍地存在着最优化问题。

（二）最优化技术的发展

最优化技术就是研究和解决最优化问题的一门学科。它研究和解决：如何在一切可能的方案中寻求最优的方案。换言之，最优化技术研究和解决两大类问题：（1）如何将最优化问题表示成数学模型；（2）如何根据数学模型，尽快地求出其最优解。

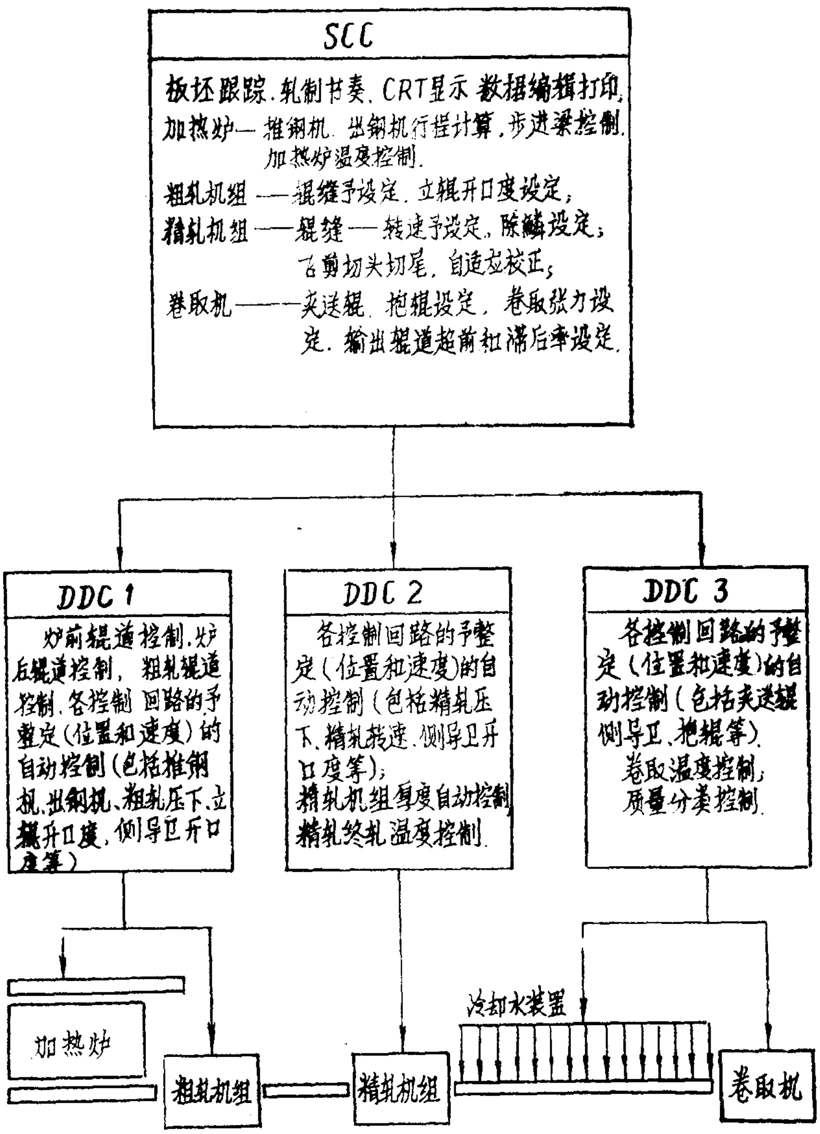

图 0—1　带钢热连轧机的计算机控制系统

第二次世界大战以前，处理最优化问题的数学方法主要是古典的微分法和变分法。二次大战中，由于军事上的需要产生了运筹学，提出了大量不能用上述古典方法解决的最优化问题。从而产生了如线性规划，非线性规划，动态规划，图论等新的方法。此后，最优化的理论和方法逐渐得到丰富和发展。特别从六十年代以来，最优化技术发展迅速，成为一门新兴的学科，而且得到了广泛的应用。

促进最优化技术迅速发展的主要因素是：

(1) 近代科技与生产发展的需要　随着工程与技术的复杂化、大型化与精密化；经济计划与管理的科学化与综合化，使得一个决策的好坏，对经济效果有重大影响。因此，要求寻找最优的决策，以便获得最好的经济效果。这就促使最优化技术迅速发展。

(2) 电子计算机的飞速发展　电子计算机的飞速发展，为最优化技术提供了有力的计算工具。由于最优化技术是要在一切可能的方案中寻求最优的方案，往往需要进行大量的计算。若没有电子计算机而用人工进行计算，则不仅工作量很大，且有时是难以实现的。而有了电子计算机这一有力的计算工具，就使最优化技术得以迅速发展。

而且随着计算机多级控制系统的发展，大量应用最优化技术，也促使最优化技术得到迅速发展及广泛应用。例如，在带钢热连轧机整个生产线的计算机两级控制系统中，如图 0—1 所示，在生产过程控制计算机（又称为监控计算机——SCC）中需进行粗轧机组的辊缝予设定，立辊开口度予设定；精轧机组的辊缝——转速予设定，除鳞设定；卷取机的夹送辊、抱辊设定，卷取张力设定，输出辊道超前和滞后率设定等，这些予设定都将根据将要进入机组的带钢的实际参数利用最优化技术进行计算确定之。

又如某钢厂的计算机四级管理控制系统，如图 0—2 所示。其中，无论是总协调级

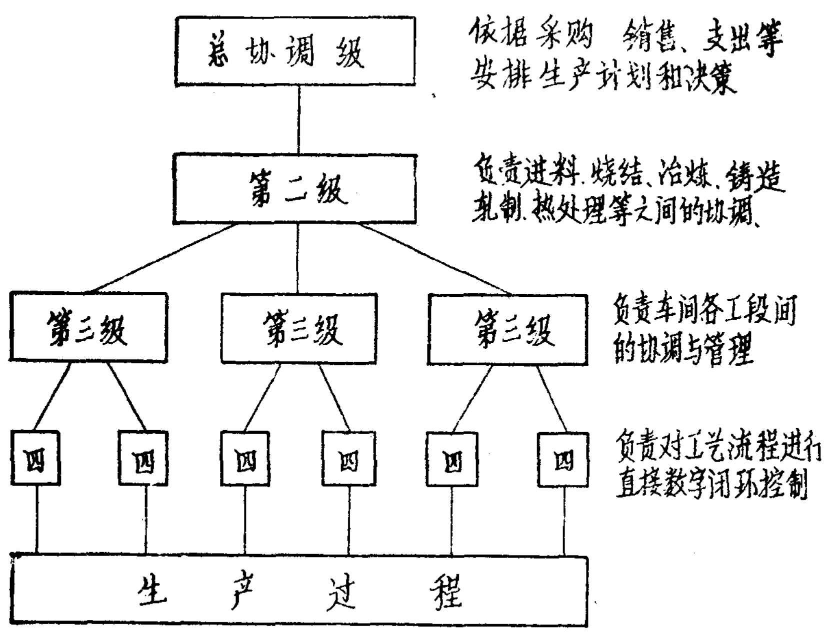

图 0—2　某钢厂计算机四级管理控制系统

计算机依据采购、销售、支出等安排生产计划；还是第二级计算机负责进行各车间之间的协调；或者是第三级计算机负责进行各工段间的协调与管理，都需要应用最优化技术。

目前，最优化技术的应用，几乎已深入到各个生产科研领域，成为促进国民经济多快好省地发展的有效方法。

最优化技术包括的内容很多，本教材主要介绍最优化技术中的线性规划、非线性规划及动态规划。

第一篇　线 性 规 划

第一章　线性规划的基本概念及基本原理

§ 1-1　问题的提出及图解法

先举几个简单的例子说明什么是线性规划，并利用图解法说明线性规划的一些基本概念及基本原理。

例 1—1：生产规划的最优化问题。设某车间生产 A 和 B 两种产品，每种产品各有两道工序，分别由两台机器完成这两道工序， 其工时列于表 1—1 中。若每台机器每周至多工作 40 小时。而产品 A 的单价为 200 元,产品 B 的单价为 500 元。问每周 A、B 产品应各生产多少件，可使总产值为最高。

表 1—1

工时　工序 产品	第　一　道	第　二　道
A	1.5 小时	2 小时
B	5 小时	4 小时

设该车间每周应生产产品 A、B 分别为 x_1、x_2 件。则有约束条件为：

$$\begin{cases} 1.5x_1+5x_2\leqslant 40 & (1-1)\\ 2x_1+4x_2\leqslant 40 & (1-2)\end{cases}$$

而且

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \tag{1—3}$$

而要求该车间每周的总产值为最大就是目标函数，即：

$$S=200x_1+500x_2=\max \tag{1—4}$$

这个生产规划最优化问题就是要求出 x_1、x_2 的最优解，既能满足约束条件而又使目标函数为最大。这就是一个线性规划问题。因其目标函数和约束条件均为线性函数，故称为线性规划。

该线性规划问题可利用图解法求解。

根据约束条件可找出其可行域，如图 1—1 中所示。其可行域为一凸多边形 K，也即满足约束条件的一切点 X （即可行解）组成一个凸集 K。

这里顺便说明一下什么是集合、什么是凸集。所谓集合就是指作为整体看的一堆东西。如这里的 K 集就是可行解的集合。所谓凸集，即在形体中任意取两点连结一根直线段，则线段上所有的点都在这个形体中。这里 K 集符合凸集的定义，所以 K 集为一凸集。

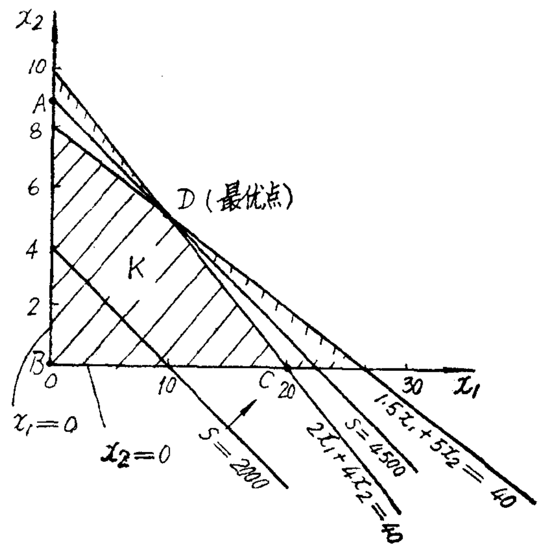

图 1—1

现满足约束条件的可行解均在 K 集中，而 K 集的顶点为基础可行解。

该线性规划问题的解，即既能满足约束条件而又使目标函数获得最大值的解，即最优解一定可以由凸集 K 的某一个顶点（或称极点）来达到。（其数学证明请参阅文献 [10]）。

图 1—1 中凸集 K 共有 A、B、C、D 四个顶点，那么究竟哪个顶点为最优解呢？这可根据目标函数 S 的变化趋势来判断。

今目标函数 $S=200x_1+500x_2$ 为线性的，因此设目标函数 S 为某值时，也是一条直线，即为目标函数的等高线。而当目标函数的值不同时，则等高线为一系列斜率相同的平行线。

例如，设 $S=200x_1+500x_2=2000$，则可画出 $S=2000$ 时的一条直线，如图 1—1 中所示。而当 S 的值增加时，则这条直线平行地向右移动，当移动至将离开凸集 K 而与之相切的那个顶点（D 点）即为所求的最优点。因该最优点既满足约束条件而又使目标函数获得最大值。

从图 1—1 中可看出，最优点 D 点即为 $1.5x_1+5x_2=40$ 及 $2x_1+4x_2=40$ 这两条直线的交点。所以解下列联立方程：

$$\begin{cases} 1.5x_1+5x_2=40 & (1—5) \\ 2x_1+4x_2=40 & (1—6) \end{cases}$$

可求得最优点为：

$$\begin{cases} x_1=10 \\ x_2=5 \end{cases}$$

故目标函数的最大值为：

$$S=200x_1+500x_2=200\times10+500\times5=4500=\max$$

即该车间每周应生产 10 件产品 A 及 5 件产品 B，这样可使每周获得最大产值为 4500 元

此例的特点为：变量数（2 个，即 x_1，x_2）等于约束条件数（主要约束条件为 2 个）。

例 1—2：混料系统设定的最优化问题。

表 1—2

原　料	成　份			成本（元/公斤）
	N_1	N_2	N_3	
1	0.06	0.02	0.09	15
2	0.03	0.04	0.05	12
3	0.04	0.01	0.03	8

由表 1—2 中所列的三种原料混合，混料后成份应满足下列要求：

$$N_1 \geqslant 0.04,\ N_2 \geqslant 0.02,\ N_3 \geqslant 0.07$$

问上述三种原料各应占多少，则既能满足成份要求而又使成本最低。

设原料 1 应占 x_1 份，原料 2 应占 x_2 份，原料 3 应占 x_3 份。则：

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \tag{1—7}$$

其约束条件为：

$$\begin{cases} N_1 = 0.06x_1 + 0.03x_2 + 0.04(1 - x_1 - x_2) \geqslant 0.04 & (1—8) \\ N_2 = 0.02x_1 + 0.04x_2 + 0.01(1 - x_1 - x_2) \geqslant 0.02 & (1—9) \\ N_3 = 0.09x_1 + 0.05x_2 + 0.03(1 - x_1 - x_2) \geqslant 0.07 & (1—10) \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ 1 - x_1 - x_2 \geqslant 0 \tag{1—11}$$

式（1—8）、（1—9）及（1—10）可分别进行化简为式（1—12）、（1—13）及（1—14），因此，约束条件即为：

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant 0 & (1—12) \\ x_1 + 3x_2 \geqslant 1 & (1—13) \\ 3x_1 + x_2 \geqslant 2 & (1—14) \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ 1 - x_1 - x_2 \geqslant 0 \tag{1—15}$$

而成本最低为其目标函数，即：

$$\begin{aligned} S &= 15x_1 + 12x_2 + 8(1 - x_1 - x_2) \\ &= 7x_1 + 4x_2 + 8 = \min \end{aligned} \tag{1—16}$$

利用图解法求解。如图 1—2 所示。根据约束条件找到其可行域为凸集 K，它具有三个顶点，即为 A、B、C 点。然后画出目标函数的等高线，例如 $S=10$ 那条等高线，如图 1—2 中所示。而当目标函数 S 的值增加时，则这条直线平行地向右移动。现在要求的是目标函数的最小值，所以当等高线向右平行移动至刚接触凸集K而与

之相切的那个顶点（B 点）即为所求的最优点。因该最优点既满足约束条件而又使目标函数获得最小值。

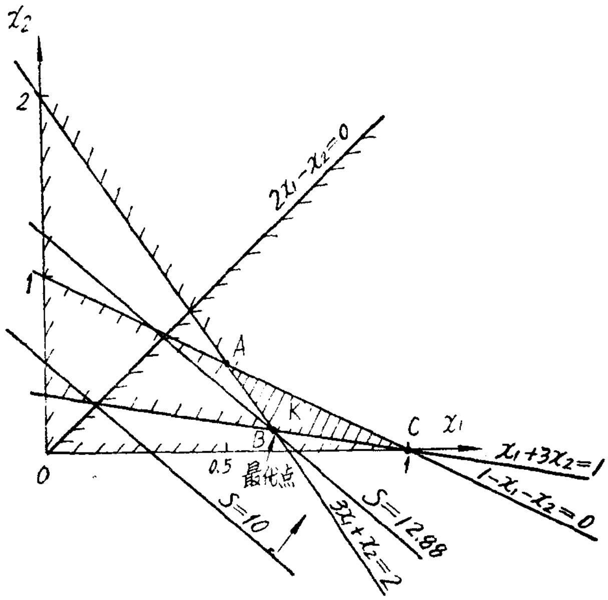

图 1—2

从图 1—2 中可看出：最优点（B 点）为 $x_1+3x_2=1$ 及 $3x_1+x_2=2$ 这两条直线的交点。所以解下列联立方程：

$$\begin{cases} x_1+3x_2=1 \\ 3x_1+x_2=2 \end{cases} \qquad (1\text{—}17)$$

求得最优点为：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{5}{8} \\ x_2=\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

于是

$$x_3=1-x_1-x_2=\frac{2}{8}$$

故目标函数的最小值为：

$$S=7x_1+4x_2+8=7\times\frac{5}{8}+4\times\frac{1}{8}+8=12.88=\min$$

即 1、2、3 三种原料应按 $\frac{5}{8}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{2}{8}$的比例混合，则混料后既能满足成份要求而又使成本最低，为 12.88 元/公斤。

此例的特点是：约束条件数（主要约束条件有 3 个）多于变量数（2 个）。

例 1—3：产品分配、运输的最优化问题。

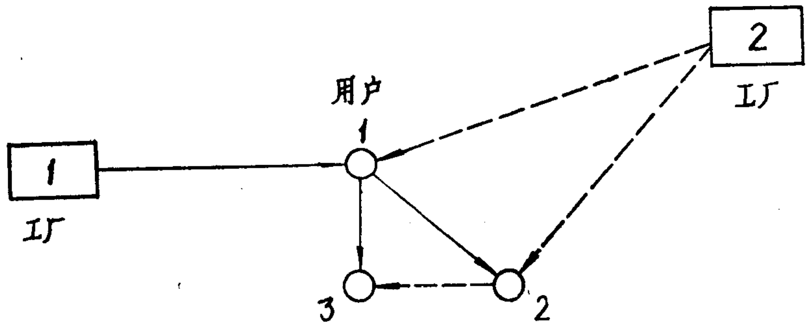

图 1—3

如图 1—3 所示，有 1、2 两个工厂生产同一种产品，其月产量分别为 a_1，a_2。这些产品要分配、运输给 1、2、3 三个用户，这三个用户的月需求量分别为 b_1、b_2、b_3。问应如何分配产品，能使运输费最省。

如表 1—3 所示，设 x_{11} 为工厂 1 送到用户 1 的量；x_{21} 为工厂 2 送到用户 1 的量；余类推。

表 1—3

用户 / 工厂	1 b_1	2 b_2	3 b_3
1　a_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2　a_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}

则约束条件为：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=a_1 & (1\text{—}18) \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=a_2 & (1\text{—}19) \\ x_{11}+x_{21}=b_1 & (1\text{—}20) \\ x_{12}+x_{22}=b_2 & (1\text{—}21) \\ x_{13}+x_{23}=b_3 & (1\text{—}22) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x_{11}\geqslant 0, & x_{12}\geqslant 0, & x_{13}\geqslant 0 \\ x_{21}\geqslant 0, & x_{22}\geqslant 0, & x_{23}\geqslant 0 \end{matrix} \qquad (1\text{—}23)$$

由于

$$a_1+a_2=b_1+b_2+b_3 \qquad (1\text{—}24)$$

所以，主要的约束条件实际不是 5 个，而是 4 个。今待定变量为 6 个，即变量数多于约束条件数，在这种情况下，约束条件可以是等式。

其目标函数为：

$$S=d_{11}x_{11}+d_{12}x_{12}+d_{13}x_{13}+d_{21}x_{21}+d_{22}x_{22}+d_{23}x_{23}=\min \tag{1—25}$$

式中 d_{11}——为工厂1到用户1单件产品的运输费；

d_{12}——为工厂1到用户2单件产品的运输费；余类推。

若已知数据为：

$$a_1=30,\quad a_2=20,$$

$$b_1=10,\quad b_2=15,\quad b_3=25,$$

$$d_{11}=100\text{元},\quad d_{12}=140\text{元},\quad d_{13}=110\text{元},$$

$$d_{21}=160\text{元},\quad d_{22}=150\text{元},\quad d_{23}=190\text{元},$$

今变量数（6个）多于约束条件数（4个），因此可任选其中两个变量作为可控变量，则其它4个变量可根据等式约束条件求解。

选 $x_{21}=u_1$，$x_{23}=u_2$ 为可控变量

则由式（1—20）及（1—23），可得 $x_{11}=10-u_1\geqslant 0$ （1—26）

由式（1—22）及（1—23），可得 $x_{13}=25-u_2\geqslant 0$ （1—27）

由式（1—19）及（1—23），可得 $x_{22}=20-u_1-u_2\geqslant 0$ （1—28）

由式（1—21）及（1—28），可得 $x_{12}=u_1+u_2-5\geqslant 0$ （1—29）

而目标函数可改写为：

$$\begin{aligned}S&=d_{11}x_{11}+d_{12}x_{12}+d_{13}x_{13}+d_{21}x_{21}+d_{22}x_{22}+d_{23}x_{23}\\&=100(10-u_1)+140(u_1+u_2-5)+110(25-u_2)+160u_1\\&\quad+150(20-u_1-u_2)+190u_2=6050+50u_1+70u_2\end{aligned}$$

即 $$S=6050+50u_1+70u_2=\min \tag{1—30}$$

利用图解法求解。如图1—4所示，可行域为凸集K，它具有A、B、C、D、E五个顶点。然后画出目标函数的等高线，例如$S=6800$那条等高线，如图1—4中所示。而当目标函数S的值减小时，则这条直线平行地向左移动。现在要求的是目标函数的最小值，所以当等高线向左平行移动至刚要离开凸集K而与之相切的那个顶点（C点）即为所求的最优点，因该点既满足约束条件而又使目标函数获得最小值。

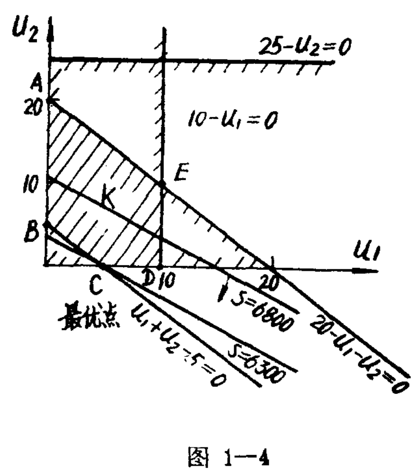

图 1—4