面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

数学物理方法

管平 计国君 黄骏 编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 21 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

数学物理方法

管 平 计国君 黄 骏 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材．本书内容包括复变函数、Fourier分析、小波变换及应用、偏微分方程定解问题、变分法、数学物理中的近似解法．本书本着加强应用、侧重方法的原则，着重介绍常用的应用数学方法及其在实际中的应用．同时适当增加了一些近代应用数学方法，为学生进一步学习近代数学内容展示了窗口和延伸发展的接口．

本书可作为高等学校工科各专业的教科书，也可供工科研究生和社会读者阅读．

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/管平，计国君，黄骏编．—北京：高等教育出版社，2001

ISBN 7-04-009445-2

Ⅰ．数…　Ⅱ．①管…②计…③黄…　Ⅲ．数学物理方法　Ⅳ．O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第01141号

责任编辑　杨芝馨　李　陶　**封面设计**　张　楠　**责任绘图**　尹　莉
版式设计　马静如　**责任校对**　朱惠芳　**责任印制**　陈伟光

数学物理方法
管平　计国君　黄骏　编

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市东城区沙滩后街55号　　邮政编码　100009
电　　话　010-64054588　　传　　真　010-64014048
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
排　　版　高等教育出版社照排中心
印　　刷　北京外文印刷厂

开　　本　787×960　1/16　　版　　次　2001年7月第1版
印　　张　15.25　　印　　次　2001年9月第2次印刷
字　　数　280 000　　定　　价　13.30元

前　言

随着科学技术和社会经济的飞速发展，现代数学方法在工程技术、社会经济以及人文科学等各领域得到越来越广泛的应用.因此，对应用数学方法类的课程有必要在内容和体系上进行改革与更新.鉴于此，教育部立项支持了“面向二十一世纪工科数学教学内容与课程体系改革的研究与实践”的项目，本教材是这个项目的子课题的成果之一，主要涉及连续变量的应用数学方法，包括复变函数、Fourier分析和小波分析、数理方程、变分法等内容，其中有些是在工程技术中应用越来越广泛的现代数学物理方法.根据课题组关于本教材应“以方法为主，不追求理论的系统性和完整性，方法要注意实用性和先进性，结构要模块化，便于教学”的要求，针对工科学生的特点，在本书的编写中，我们力求做到以下几点：

1. 本着加强应用、侧重方法的原则，着重介绍常用的应用数学方法及其在实际中的应用(有些模型和应用是作者目前正研究的课题)，而对其数学理论基础不作过多铺垫.例如，在介绍变分法时，只给出了泛函的简单定义，而对其相关理论和性质并未涉及.又如，在介绍数学物理中的数值方法时，介绍了积分方程的近似解法，而对积分方程的一般理论不作讨论.

2. 问题的引入和范例体现应用特点，涉及工程技术中许多领域，许多例子来自于实际，再用它去解释实际问题，以提高学生的学习兴趣和便于学生理解、接受，以便将来的应用.

3. 在对传统的数学物理方法基本内容进行适当的调整外，增加了一些现代的数学方法，如在L^2空间引进 Fourier 分析和积分变换概念，简单介绍了广义函数概念和非线性偏微分方程.特别是从窗口 Fourier 变换出发，引入了小波变换，简单介绍了小波级数及其应用.这些内容的引入，一方面是由于它们在当代工程技术中应用已越来越广泛；另一方面也为学生进一步学习现代应用数学方法开了一个窗口.

4. 考虑到工科学生的数学基础，新内容的引入尽量做到通俗易懂，使工科学生易于接受，而不过多强调数学理论的严密性，如在讨论L^1，L^2空间的 Fourier 变换时，只突出其思想和方法，不作太多的理论推证.小波分析着重讲清从 Fourier 变换到小波变换的演变发展的基本思想、离散小波分解及其算法，并简单介绍了一些应用.

5. 根据项目计划要求，教材体系模块化，各大块内容既有联系又相对独立，

便于不同专业根据需要选用.

本书内容可在70学时内学完,若只选前四章约需52学时.对于学时较少的专业,也可只选学第一章、第二章、第四章的内容.

本书由上海交通大学乐经良教授和四川大学马继刚教授主审、教育部工科数学课程教学指导委员会组织评审,最后还经天津大学齐植兰教授仔细审阅.作者对诸位专家严谨而辛勤的工作表示感谢,特别感谢两位主审对本书的编写和修改提出许多宝贵的意见和有益的帮助,感谢课委会主任、西安交通大学马知恩教授以及课委会其它专家的鼓励和支持,感谢齐植兰教授在定稿前的最后审定.我们还要感谢东南大学教务处和应用数学系的领导和老师们,他们在本书的编写过程中始终给予了热情的关注与支持,同时还要感谢高等教育出版社文小西、杨芝馨两位编辑,正是由于他们细致而认真的工作,才使本书得以顺利出版.

由于编者水平所限,不妥与错误之处在所难免,我们殷切希望专家、同行和广大读者批评指正.

编 者

2000.8

目　　录

第一章　复 变 函 数

在许多工程技术领域(如电磁学、流体力学、热学等)经常遇到复变量的函数.复变函数理论研究复变量之间的对应关系,它是实变函数理论在复数域中的推广,因此两者之间有许多相近之处,这有助于我们学习比较,但在学习中更要注意它们之间的不同之处.本章主要讨论一类重要的复变函数——解析函数的积分及级数展开、留数,并简略介绍保角变换.

第一节　复变函数与解析函数

1.1　复变函数

在引入复变函数的定义之前,简要回顾区域及与区域有关的概念.通常把 x 和 y 分别当作平面上点的横坐标和纵坐标,这样复数 $z=x+iy$ 就跟平面上的点 (x,y) 一一对应起来,这个平面称为**复平面**,两个坐标轴分别叫作**实轴**和**虚轴**(如图 1.1－1).复数 z 还可用三角式或指数式表示,即

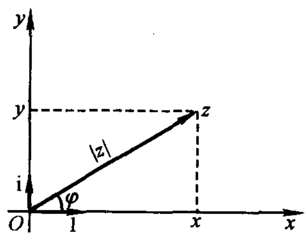

图 1.1－1

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\mathrm{Arg}\,z}$$

其中 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 表示该复数的**模**,$\varphi=\mathrm{Arg}\,z=\arctan\dfrac{y}{x}+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 称为该复数的**辐角**.复数的辐角有无穷多个,通常用 $\arg z$ 表示其中的一个特定值,称为辐角的**主值**,它的变化范围为

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

于是有

$$\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

注　原点 $z=0$ 的模为 0,辐角无定义.

前面只是把模为有限的复数与复平面上的有限点一一对应起来,特别需要指出:通常把复平面上的无限远点看作一点,并称之为**无穷远点**.关于无穷远点,可作如下理解:将一个球放置在复平面上,球的南极 S 与复平面相切于原点(如图 1.1－2),在复平面上任取一点 A,它与球的北极 N 的联线与球面相交于 A',这样,复数平面上的有限远点与球面上除 N 以外的点建立了 1－1 对应的关系,

这种对应关系称为**测地投影**,这个球称为**复数球**.设想点 A 沿着一根通过原点的直线向无穷远处移动,对应点 A'就沿着一根子午线(经线)向北极 N 逼近.如果点 A 沿着另一根通过原点的直线向无穷远处移动,对应 A'沿着另一根子午线向北极 N 逼近.其实,不管 A 沿着什么样的曲线向无穷远移动,对应的 A'总是相应地沿着某种曲线逼近于 N.因此,可以把平面上的无穷远看作一点,即通过测地投影而与复数球上北极 N 相应的那一点.我们把无穷远点记作∞,它的模为 $+\infty$,它的辐角没有定义.

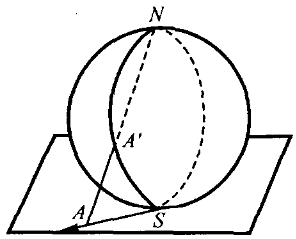

图 1.1-2

平面上以 z_0 为中心,δ(任意的正数)为半径的圆:$|z-z_0|<\delta$ 称为点 z_0 的**邻域**.设 G 为一平面点集,z_0 为 G 中的一点,如果存在 z_0 的一个邻域,使得该邻域内的所有点都属于 G,则称 z_0 为 G 的**内点**.如果点集 G 内的每个点都是它的内点,则称 G 是**开集**.如果集 G 内的任何两点都可以用完全属于 G 的一条折线连结起来,则称 G 是**连通集**.如果集 D 既是开集又是连通的,则称 D 为**区域**.

下面给出复变函数的定义.

定义 1.1 设 D 为一区域,若按某一规律,使 D 内每一个复数 z 都有惟一的复数 w 与之对应,则称在 D 上确定了一个**单值函数** $w=f(z)$;若对于复数 z,对应着两个或两个以上的复数 w,则称在 D 上确定了一个多值函数 $w=f(z)$,D 称为函数的**定义域**,w 值的全体所成的集 M 称为函数 $w=f(z)$的**值域**.

例如

$$w=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n,\ n \text{ 为正整数}, a_0,a_1,\cdots,a_n \text{ 为复常数}$$

$$w=|z|,\quad w=\bar{z},\quad w=\frac{z+1}{z-1}(z\neq 1)$$

均为复变函数.

再看几个初等函数的定义式:

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y) \tag{1.1}$$

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}),\quad \cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) \tag{1.2}$$

$$\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z}),\quad \operatorname{ch} z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}) \tag{1.3}$$

$$\operatorname{Ln} z=\operatorname{Ln}(|z|e^{i\operatorname{Arg} z})=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi) \tag{1.4}$$

$$z^s=e^{s\operatorname{Ln} z}=|z|^se^{is\arg z+i2ks\pi}(s\text{为实数}) \tag{1.5}$$

由式(1.2)可看出,$\sin z$ 和 $\cos z$ 具有实周期 2π,即

$$\sin(z+2\pi)=\sin z,\quad \cos(z+2\pi)=\cos z$$

在实数域中,我们已知$|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$,把定义式(1.2)按(1.1)展开为实部和虚部,可求得模为

$$|\sin z|=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\sin^2 x-\cos^2 x)}$$

$$|\cos z|=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\cos^2 x-\sin^2 x)}$$

这样,$|\sin z|$和$|\cos z|$完全可以大于 1.

由定义式(1.1)、(1.3)可看出 e^z,$\mathrm{sh}\, z$ 和 $\mathrm{ch}\, z$ 具有纯虚数周期 $2\pi i$,即

$$e^{z+i2\pi}=e^z,\quad \mathrm{sh}(z+i2\pi)=\mathrm{sh}z,\quad \mathrm{ch}(z+i2\pi)=\mathrm{ch}z$$

由定义式(1.2)、(1.3)还可看出 $\sin z$,$\mathrm{sh}\, z$ 是奇函数,$\cos z$,$\mathrm{ch}\, z$ 是偶函数.

设函数 $w=f(z)$定义于区域 D 上,若令

$$z=x+iy,\quad w=u+iv$$

则 u,v 都随 x,y 而确定,因此复变函数 $w=f(z)$按实部 u 和虚部 v 可记作

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

其中 $u(x,y)$,$v(x,y)$是一对二元实变函数.这就是说,复变函数可归结为一对二元实变函数.因此,关于实变函数的许多定义、公式、定理可直接移植到复变函数中.

例如,在复平面上的极限过程 $z\to z_0$ 等价于实平面上的$(x,y)\to(x_0,y_0)$,复变函数 $f(z)$在点 $z_0=x_0+iy_0$ 的极限为 $w_0=u_0+iv_0$,即 $\lim\limits_{z\to x_0}f(z)=w_0$ 可归结为一对二元实变函数 $u(x,y)$,$v(x,y)$在点(x_0,y_0)处分别取极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=u_0,\qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=v_0$$

同样,复变函数 $f(z)$在点 z_0 连续的定义是

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$$

这一定义等价于一对二元实变函数 $u(x,y)$,$v(x,y)$在点(x_0,y_0)连续,即

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=u(x_0,y_0),\qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=v(x_0,y_0)$$

与实变函数相比,复变函数带有自身的某些特殊性.某些在实变函数论中的单值函数,在复变函数论中就可能成为多值函数.如由定义式(1.4)知,对数函数

$$\mathrm{Ln}\, z=\ln|z|+i\arg z+i2k\pi,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

就是一个对某个固定的变量 z,可随 k 的不同取无限多个值的多值函数.经常称 $k=0$ 时的那支为 $\mathrm{Ln}\, z$ 的**主值**,记为 $\ln z=\ln|z|+i\arg z$.在实数域中,负数的对数没有意义,但按定义式(1.4),当 z 为负实数时,复变函数 $\mathrm{Ln}\, z$ 仍有意义

$$\mathrm{Ln}\, z=\ln|z|+i(2k+1)\pi$$

再由定义式(1.5)考察幂函数 $w=z^s$,当 s 为整数 n 时

$$z^n = |z|^n e^{in\arg z + i2kn\pi} = |z|^n e^{in\arg z}$$

这是一个单值函数.若 $s=\dfrac{1}{n}$(n 为整数)时

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{1}{n}\arg z + i\frac{2k\pi}{n}}$$

对任一固定的 $z\neq 0$,对于 $k=0,1,\cdots,n-1$,$\sqrt[n]{z}$ 可以取 n 个不同的值,因此 $w=z^{\frac{1}{n}}$ 是一个多值函数.同样,当 s 为非整数的有理数时,对任一确定的 $z\neq 0$,$w=z^s$ 是一个取有限多个值的多值函数.类似的分析可知,当 s 不为有理数时,对每一个确定的 $z\neq 0$,$w=z^s$ 是一个取无限多个值的多值函数.

例 1 计算 $\sin(1+2i)$ 和 i^i 的值.

解 由定义式(1.2),得

$$\sin(1+2i) = \frac{e^{i-2}-e^{2-i}}{2i} = \frac{e^{-2}(\cos 1 + i\sin 1) - e^2(\cos 1 - i\sin 1)}{2i}$$

$$= \frac{e^2+e^{-2}}{2}\sin 1 + i\,\frac{e^2-e^{-2}}{2}\cos 1$$

$$i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

1.2 解析函数

解析函数是复变函数理论研究的主要对象,在理论和实际问题中有着广泛的应用.

定义 1.2 设函数 $w=f(z)$ 定义于区域 D 上,$z_0\in D$,$z_0+\Delta z\in D$($\Delta z=\Delta x+i\Delta y$),如果当 Δz 按任意方式趋于零时存在极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

则称 $f(z)$ 在点 z_0 可导(或可微),并称这个极限值为 $f(z)$ 在点 z_0 的导数,记为

$$f'(z_0) = \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

复变函数导数与微分的定义在形式上与高等数学中一元函数导数与微分的定义一致,因而实变函数理论中关于导数的运算规则和公式往往可应用于复变函数.

必须指出,复变函数和一元实变函数的导数定义,虽然形式上相似,但在实质上却有很大的不同.这是因为实变数 Δx 只能沿着实轴由左(当 $\Delta x<0$)及右(当 $\Delta x>0$)两个方向趋于零,而复变数 Δz 却可以沿着复平面内任一条曲线趋于零.因此,与一元实变函数可导相比,复变函数可导是一种更严格的要求.

现在比较 Δz 沿实轴趋于零和沿虚轴趋于零两种情况.当 Δz 沿实轴趋于零

时，$\Delta y\equiv 0,\Delta z=\Delta x\to 0$，于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+\mathrm{i}v(x+\Delta x,y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\mathrm{i}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right\}$$
$$=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.6}$$

当 Δz 沿着虚轴趋于零时，$\Delta x\equiv 0,\Delta z=\mathrm{i}\Delta y\to 0$，于是

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+\mathrm{i}v(x,y+\Delta y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y}$$
$$=\lim_{\Delta y\to 0}\left\{\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}-\mathrm{i}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}\right\}$$
$$=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.7}$$

如果函数 $f(z)$在点 z 可导，极限(1.6)、(1.7)都必须存在且相等，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

这个等式两边的实部和虚部应当分别对应相等，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$

这是一组关于 u,v 的偏微分方程，称为 Cauchy-Riemann 方程或 Cauchy-Riemann条件(简记为 C-R 条件).

总结以上讨论，可得：

定理 1.1(可导的必要条件)　设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在区域 D 内定义，且在 D 内的一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可微，则二元函数 $u(x,y),v(x,y)$在此点(x,y)有偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$(简记为 u_x,u_y,v_x,v_y)，且满足 C－R 条件.

由函数在一点可导的定义立即得知：若函数 $f(z)$在点 z_0 处可导，则 $f(z)$在该点必连续.反之则不然.

例 2　函数 $f(z)=\mathrm{Re}\, z=x$ 在复平面上处处不可导.

证明　$f(z)=\mathrm{Re}\, z$ 的实部和虚部分别是$u(x,y)=x,v(x,y)=0$，于是偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

在任一点都存在，但在任一点都不满足 C-R 条件，因此处处连续的函数 $w=\mathrm{Re}$

z 是处处不可导的.事实上,当 $\Delta z=\Delta x\to 0$ 时,$\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1\to 1$,而当 $\Delta z=\mathrm{i}\Delta y\to 0$ 时,$\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\dfrac{0}{\mathrm{i}\Delta y}=0\to 0$,这两个极限并不相等.

C-R 条件仅保证 Δz 沿实轴趋于零和沿虚轴趋于零时,$\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$趋于同一极限,并不保证当 Δz 沿任意一条曲线趋于零时,$\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$总是趋于同一极限,因此,定理 1.1 中的条件还不是复变函数可导的充分条件.

例 3 证明:函数 $f(z)=\sqrt{|\mathrm{Re}\, z\cdot \mathrm{Im}\, z|}$ 在 $z=0$ 满足定理 1.1 的条件,但在 $z=0$ 处不可导.

证明 函数 $f(z)$的实部和虚部分别是 $u(x,y)=\sqrt{|xy|}$, $v(x,y)\equiv 0$,在点(0,0)处

$$u_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=0=v_y(0,0)$$

$$u_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=0=-v_x(0,0)$$

但是

$$\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

当 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$ 沿射线 $\Delta y=k\Delta x(\Delta x>0)$趋于零时,上式的极限是一个与 k 有关的值$\dfrac{\sqrt{|k|}}{1+k\mathrm{i}}$,这表明当 $\Delta z\to 0$ 时,$\dfrac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}$不存在极限,因此,函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 虽在(0,0)点满足 C-R 条件,但却不可导.

我们不加证明地给出函数可导的充要条件.

定理 1.2(可导的充分必要条件) 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在区域 D 内定义,则 $f(z)$在点 $z=x+\mathrm{i}y\in D$ 可导的充分必要条件是:

(1) 二元实函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$在点(x,y)可微;

(2) $u(x,y)$, $v(x,y)$在点(x,y)处满足 C-R 条件.

当上述条件满足时,$f(z)$在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 的导数可以表为下列形式之一

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由定理 1.2 得知,若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$的实部和虚部的偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x}$和$\dfrac{\partial v}{\partial y}$都在点$(x,y)$连续,且满足 C-R 条件,则 $f(z)$在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 处可导.

定义 1.3 若函数 $w=f(z)$在区域 D 内处处可导,则称 $f(z)$为区域 D 内

的**解析函数**,或称 $f(z)$ 于区域 D 内解析.

解析函数这一重要概念是与相伴区域密切联系的.我们说函数 $f(z)$ 在某点 z_0 解析,其意义是指 $f(z)$ 在点 z_0 的某一邻域内解析.

由复变函数的导数运算法则知,区域 D 内的解析函数的和、差、积、商(分母不为零)仍是 D 内的解析函数,两个或多个解析函数的复合函数仍是解析函数.

例如,多项式 $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0(a_n\neq0,a_n,a_{n-1},\cdots,a_0$ 是复常数)在整个复平面上解析.有理分式函数

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_0}$$

在复平面上除使分母 $Q(z)=0$ 的点外解析.

例 4　试证:$f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 在复平面上解析,且 $f'(z)=f(z)$.

证明　因为 $u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y,v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$,而

$$u_x=\mathrm{e}^x\cos y,\quad u_y=-\mathrm{e}^x\sin y$$

$$v_x=\mathrm{e}^x\sin y,\quad v_y=\mathrm{e}^x\cos y$$

在 z 平面上处处连续,且满足 C-R 条件,所以 $f(z)$ 在 z 平面上解析,并且

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y=f(z)$$

例 5　讨论 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

解　因为 $u(x,y)=x^2+y^2,v(x,y)\equiv0$,故

$$u_x=2x,\quad u_y=2y,\quad v_x=v_y=0$$

这四个偏导数在 z 平面上处处连续,但只在 $z=0$ 处满足 C-R 条件,所以 $f(z)$ 只在 $z=0$ 处可导,从而函数无处解析.

例 6　已知 $u(x,y)=x^2-y^2+xy$,求解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$,并满足 $f(0)=0$.

解　由题设,有 $u_x=2x+y,u_y=x-2y$,由 C−R 条件得

$$v_y=u_x=2x+y$$

所以 $v=2xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi(x)$,从而 $v_x=2y+\varphi'(x)$,但由 C−R 条件,有

$$v_x=-u_y=2y-x$$

故 $\varphi'(x)=-x$.由此得

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}x^2+C$$

从而

$$f(z)=u+\mathrm{i}v=x^2-y^2+xy+\frac{1}{2}y^2\mathrm{i}+2xy\mathrm{i}-\frac{1}{2}x^2\mathrm{i}+C\mathrm{i}$$

由 $f(0)=0$ 得 $C=0$,最后得

$$f(z) = (x + \mathrm{i}y)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{i}(x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}) = \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)z^2$$

1.3 复变函数导数的几何意义

设函数 $w = f(z)$在区域 D 内连续,在点 $z_0 \in D$ 处有导数$f'(z_0) \neq 0$.通过 z_0 任意引一条有向连续曲线 C:

$$z = z(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \quad z_0 = z(t_0)$$

如果 $z'(t_0)$存在且不等于零,则曲线 C 在点z_0 有切线,$z'(t_0)$就是切向量,其倾角为 $\psi = \mathrm{Arg}\, z'(t_0)$.经过变换 $w = f(z)$,C 的象曲线$\Gamma = f(C)$的参数方程应为:

$$w = f[z(t)] \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \quad w(t_0) = w_0$$

由于 $w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) \neq 0$,因此 Γ 在 $w_0 = f(z_0)$处也有切线,$w'(t_0)$就是切向量,其倾角为

$$\theta = \mathrm{Arg} w'(t_0) = \mathrm{Arg} f'(z_0) + \mathrm{Arg} z'(t_0)$$

即

$$\theta - \psi = \mathrm{Arg} f'(z_0)$$

假设$|f'(z_0)| = R$,$\mathrm{Arg} f'(z_0) = \alpha$,于是

$$\theta - \psi = \alpha, \quad \lim_{\Delta z \to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = R \neq 0$$

上面两式表明:象曲线 Γ 在点 $w_0 = f(z_0)$的切线方向,可由原象曲线 C 在点 z_0 的切线方向旋转一个角度 $\mathrm{Arg} f'(z_0)$得出.$\mathrm{Arg} f'(z_0)$称为变换 $w = f(z)$在点 z_0 的旋转角,这就是导数辐角的几何意义.同时象点间的无穷小距离与原象点间的无穷小距离之比的极限是 $R = |f'(z_0)|$,它仅与 z_0 有关,而与过 z_0 的曲线 C 的方向无关.R 称为变换 $w = f(z)$在点 z_0 的伸缩率.这也就是导数模的几何意义.

这里提到的旋转角与 C 的选择无关的性质,称为**旋转角不变性**,伸缩率与 C 的方向无关的性质称为**伸缩率不变性**.

1.4 初等函数及其简单性质

在本节的最后,我们简略介绍基本初等函数的一些性质.

(一) 指数函数

由例 4 已知 $f(z) = \mathrm{e}^z$ 在复平面内处处解析,且有$(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$,在上一小节中已知,指数函数 e^z 有纯虚数周期 $2\pi\mathrm{i}$.很容易验证,e^z 满足加法定理,即

$$\mathrm{e}^{z_1 + z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$$

在变换 $w = \mathrm{e}^z$ 中,令

$$w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad z = x + \mathrm{i}y$$

则由 $\rho e^{i\theta}=e^x e^{iy}$ 知

$$x=\ln\rho,\quad y=\theta+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

从而可知，变换 $w=e^z(w\neq0,+\infty)$ 把直线 $y=y_0$ 变成从原点出发的射线 $\theta=y_0$，把线段 $\{x=x_0,-\pi\leqslant y\leqslant\pi\}$ 变成圆周 $\rho=e^{x_0}$.

当 z 平面上的动直线从直线 $y=0$ 扫动到直线 $y=y_0$ 时，在变换 $w=e^z$ 下的象，就在 w 平面上从射线 $\theta=0$ 扫动到射线 $\theta=y_0$，从而 z 平面上的带形区域 $0<y<y_0$ 就变换成为 w 平面上的角形区域 $0<\theta<y_0$（如图 1.1－3）. 特别地，变换 $w=e^z$ 将 z 平面上的带形区域 $-\pi<y<\pi$ 变成 w 平面上除去负实轴的区域.

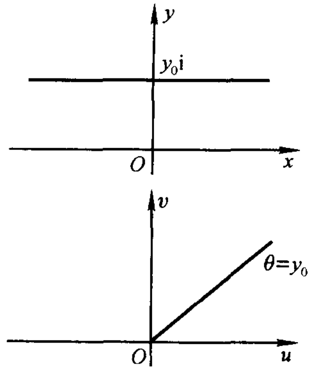

图 1.1－3

（二）对数函数

我们已知对数函数

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z$$

是一个多值函数，每两个值相差 $2\pi i$ 的整数倍. 若规定上式中的 $\mathrm{Arg}\,z$ 取主值 $\arg z$，那末 $\mathrm{Ln}\,z$ 为一单值函数，即为 $\mathrm{Ln}\,z$ 的主值

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z$$

其它各支可由

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln z+i2k\pi\qquad(k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

表达. 对于每一个固定的 k，上式就成为一单值函数，称为 $\mathrm{Ln}\,z$ 的一个分支.

就主值 $\ln z$ 而言，其中 $\ln|z|$ 除原点外在其它点都是连续的，而 $\arg z$ 在原点与负实轴上都不连续，因为若设 $z=x+iy$，当 $x<0$ 时

$$\lim_{y\to0^-}\arg z=-\pi,\qquad \lim_{y\to0^+}\arg z=\pi$$

所以，除去原点与负实轴，$\ln z$ 在复平面内其它点处处连续. 由于 $z=e^w$ 在区域 $-\pi<\theta=\arg z<\pi$ 内的反函数 $w=\ln z$ 是单值的，由反函数求导法则得

$$\frac{d\ln z}{dz}=\frac{1}{\dfrac{de^w}{dw}}=\frac{1}{z}$$

所以，$\ln z$ 在除去原点及负实轴的平面内解析，由 $\mathrm{Ln}\,z$ 的定义知，$\mathrm{Ln}\,z$ 的各个分支在除去原点及负实轴的平面内也解析，且有相同的导数值.

今后在应用对数函数 $\mathrm{Ln}\,z$ 时，都是指它在除去原点及负实轴的平面内的某一单值分支.

若令 $z=re^{i\varphi}$，$w=u+iv$，由对数函数 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 的某一单值分支（不妨取

主值)可得

$$u = \ln r, v = \varphi(-\pi < \varphi < \pi)$$

与指数函数变换性质的讨论相仿,我们得知,对数函数 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 的某一单值分支把 z 平面上的角形区域 $0<\varphi<v_0$ 变成 w 平面上的带形区域 $0<v<v_0$,特别地,将 z 平面上除去负实轴的区域 $-\pi<\varphi<\pi$ 映成 w 平面上的带形区域 $-\pi<v<\pi$.

(三) 幂函数

当 n 为自然数时,幂函数 $w=z^n$ 是复平面内的单值解析函数,其导数 $(z^n)'=nz^{n-1}$. 已知幂函数 $z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$ 是一个多值函数,具有 n 个分支. 由于对数函数 $\mathrm{Ln}\,z$ 的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内解析,因而 $\sqrt[n]{z}$ 的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内也解析,且

$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}$$

在变换 $w=z^n$(n 是不小于 2 的自然数)中,令 $z=re^{i\theta}$,$w=\rho e^{i\varphi}$,则

$$\rho = r^n,\ \varphi = n\theta$$

由此可见,在变换 $w=z^n$ 下,z 平面上的圆周 $|z|=r$ 变换成 w 平面上的圆周 $|w|=r^n$,特别是将 z 平面上的单位圆周变成 w 平面上的单位圆周,将 z 平面上的射线 $\theta=\theta_0$ 变换成 w 平面上的射线 $\varphi=n\theta_0$,将 z 平面上的正实轴映射成 w 平面上的正实轴,将 z 平面上的角形域 $0<\theta<\theta_0\left(<\frac{2\pi}{n}\right)$ 变换成 w 平面上的角形域 $0<\varphi<n\theta_0$.

三角函数 $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是复平面上的解析函数. 反三角函数 $\mathrm{Arcsin}\,z=\frac{1}{i}\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$,$\mathrm{Arccos}z=\frac{1}{i}\mathrm{Ln}(z+i\sqrt{1-z^2})$ 都是多值函数,它们的单值分支都在适当割破平面后的区域内解析,详细讨论略去.

习题 1.1

1. 计算下列数值

(1) $\sqrt[3]{i}$ (2) $\sqrt[i]{i}$ (3) $\cos i$

(4) $\mathrm{Ln}(-i)$ (5) $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\cdots+\sin n\varphi$($\varphi$ 为实常数)

2. 验证下列表达式:

(1) $\sin(z+2\pi)=\sin z$ (2) $e^{z+2\pi i}=e^z$

(3) $\cos(-z)=\cos z$ (4) $\mathrm{sh}(-z)=-\mathrm{sh}\,z$