普通高等教育"九五"教育部重点教材

实变函数论

周民强　编著

北京大学出版社
·北　　京·

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论/周民强编著. —北京：北京大学出版社，2001.7

ISBN 7-301-04579-4

Ⅰ. 实…　Ⅱ. 周…　Ⅲ. 实变函数-高等学校-教材
Ⅳ. O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 12418 号

书　　名：实变函数论
著作责任者：周民强　编著
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 7-301-04579-4/O·467
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　　话：出版部 62752015　发行部 62559712　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　印　者：中国科学院印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168　32 开本　12.5 印张　320 千字
2001 年 7 月第 1 版　2001 年 7 月第 1 次印刷
印　　　数：0001—5000 册
定　　　价：16.00 元

前　言

“实变函数”的核心内容是测度和积分的理论，它是近代分析数学领域的基础知识，现已成为各大专院校数学系高年级学生的必修或选修课程.

“数学分析”主要考察的对象是定义在区间(或区域)上的连续函数，“复变函数”是论述定义在区域上解析函数的性质的，而“实变函数”则把研究对象扩大到定义在可测集上的可测函数，并运用集合论的观点对函数及其定义域作更加细致的剖析. 这就使得实分析处理问题的思想方法更加活跃，可使微积分在较宽松的环境中加以运用，其结果也就更加深入和具有多样性.

本书以 n 维欧氏空间为基地，重点介绍 Lebesgue(勒贝格)测度和积分，并在论述中力图使其与抽象理论磨合.

“实变函数”课程一直是学生学习难度较大的课程之一. 为使教与学的过程能较顺利些，作者在本书中加强了导引性论述，使读者了解所研究课题的概貌，更加明确目的性，甚至插入了若干段数学史评注和数学家传记，以提高学习兴趣. 书中列入的丰富例题，可当作理论应用的某种示范并开阔思路；为了协助读者养成“会学”的习惯，书中点缀了若干由正文直接派生的思考题. 在每章末尾所写的注记，目的是对正文所阐述的理论有一个进一步的交待或更实质性的议论，可为有兴趣的读者参考以开启创新之门. 书中还编入了相当数量的练习，并力图与正文紧密配合. 当然，在使用本书时，应根据实际情况作取舍或补充.(书中标有“*”号的内容可以先不读，众多练习也不必全都做)

本书第一次出版是在1985年，后经修改在1995年出第二版，1997年在同行们鼓励下，又开始修订．由于北京大学出版社的大力支持，又有了现在这个版本．虽经多次修订，体系仍无大变动，欢迎广大读者指教．最后，赠诗一首：

道虽远，不行不至

事虽难，不为不成

与读者共勉．

编　者

2000年12月

第一章　集合与点集

集合论自 19 世纪 80 年代由 Cantor①创立以来，现已发展成为一个独立的数学分支，其基本概念与方法已渗入到 20 世纪的各个数学领域，成为近代数学的一个特征. 集合论是探讨集合的各种性质的，它的初期工作与数学分析的深入研究密切相关，并为发展实变函数理论奠定了基础. 本章仅对一般集合与 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点集知识作一必要的介绍.

在中学学习阶段，大家已接触到一些关于集合的初步知识，例如：自然数全体形成一个集合，常记为 $\boldsymbol{N}$；有理数全体形成一个集合，常记为 $\boldsymbol{Q}$；实数全体形成一个集合，常记为 $\boldsymbol{R}^1$ 等等. 那么，集合究竟是什么？集合是数学中最原始的观念，一般是不能再加以精确定义的. 遵循 Cantor 最初给出的说法（可以称为概括性），集合(set)是指把具有某种特征或满足一定性质的所有对象或事物视为一个整体时，这一整体就称为集合，而这些事物或对象就称为属于该集合的元素. 因此，所谓给定一个集合或说存在一个集合，是指已经确定了某种约束，由它可以判别任何事物或对象是否属于该集合.（也就是说，一个事物或对象与给定集合的关系，只有属于或不属于的关系，别无其他.）这种描述性的界定，就我们的实际应用范围来说是已足够的.（如果越出一定的范畴，就会在数学中出现许多悖论，见本章末附注.）

为什么要引入集合这样一种概念？一是为了考察某种事物的整体特征和结构，研究舍去事物个性后的抽象共性，划分势力范围，二是集合论的语言非常简明，且能更加细致地区分研究对象的

① 康托尔(1845～1918)，德国数学家.

各种内涵，考察它们各种组合的可能性时还有很强的概括性. 这种观点和方法早在 18 世纪的数学工作中就已出现，例如研讨曲面上过一点的所有曲线，某力学系统中所有可能出现的运动等等. 不过，真正促进对集合论作系统研究的动力，是来自分析的严密化所引发的对实数集合结构的探求. 例如，Cantor 就探讨过函数的不连续点的分类问题.

§1.1 集合与子集合

一般地说，集合的符号用大写字母 $A,B,C,\cdots,X,Y,Z$ 等来表示，集合的元素用小写字母 $a,b,c,\cdots,x,y,z$ 等来表示. 设 A 是一个集合，若 a 是 A 的元素，则记为 $a\in A$（叫做 a 属于 A）；$a\overline{\in} A$（叫做 a 不属于 A）表示 a 不是 A 的元素. 例如 $2/3\in \boldsymbol{Q}$，$\sqrt{2}\overline{\in}\boldsymbol{Q}$ 等等.

通常采用的集合表示法有两种：其一是列举，例如由数 1，2，3，4，5 构成的集合记为 A 时，就用符号

$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

来表示. 也就是说，在花括号{ }内将其元素一一列举出来；其二是用元素所满足的一定条件来描述它，如上述之 A 也可写成

$$A=\{x:x<6,\ x\in \boldsymbol{N}\}.$$

在这里，{ }号内分为两部分来写，且用符号"："隔开，前一部分是集合中元素的代表符号，后一部分表示元素所满足的条件或属于自然数集合 $\boldsymbol{N}$ 的元素所特有的规定性质. 有时也把 A 写成 $\{x\in \boldsymbol{N}:x<6\}$.

例 1 集合 $\{x\in \boldsymbol{R}^1:0<\sin x\leqslant 1/2\}$ 表示由满足 $0<\sin x\leqslant 1/2$ 的实数 x 所构成. 有时也简写成 $\{x:0<\sin x\leqslant 1/2\}$.

例 2 集合 $\{x\in \boldsymbol{R}^1:|x-x_0|<\delta,x_0\in \boldsymbol{R}^1\}$ 就是数轴上的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

定义 1.1 对于两个集合 A 与 B，若 $x\in A$ 必有 $x\in B$，则称 A

是 B 的**子集合**，简称 A 是 B 的**子集**，记为

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A.$$

$A \subset B$ 也称为 A 含于 B 或 B 包含 A. 显然，$A \subset A$. 若 $A \subset B$ 且存在 B 中元素不属于 A，则称 A 是 B 的**真子集**.

例 3 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，则集合 $\{1\}$，$\{1,3\}$，$\{1,3,5\}$，$\{1,2,3\}$ 均是 A 的真子集，$\{1,2,3,4,5\}$ 不是 A 的真子集.

注意，上例中 $\{1\}$ 表示由单个元素"1"所构成的集合，它是 A 的子集而不是 A 的元素. 从而可知 $\{1,\{2,3\}\}$ 不是 A 的子集.

为了论述与运算的方便，我们还指定一种所谓**空集**，它是不包含任何元素的集合，记为 $\varnothing$. 空集 $\varnothing$ 是任一集合的子集.

定义 1.2 设 A,B 是两个集合. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称集合 A 与 B **相等**或**相同**，记为 $A=B$. A 与 B 相等就是 A 与 B 的元素完全相同，即 A 与 B 是同一个集合.

例 4 $\{x \in \boldsymbol{R}^1 : x^2 > 1\} = \{x \in \boldsymbol{R}^1 : |x| > 1\}$.

集合 $\{x : p(x)\}$ 与集合 $\{x : q(x)\}$ 是否相等，就是看条件 $p(x)$ 与 $q(x)$ 是否等价.

定义 1.3 设 I 是给定的一个集合，对于每一个 $\alpha \in I$，我们指定一个集合 A_α. 这样我们就得到许多集合，它们的总体称为集合族，记为 $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ 或 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$. 这里的 I 常称为指标集. 当 $I=\boldsymbol{N}$ 时，集合族也称为集合列，简记为 $\{A_i\}$ 或 $\{A_k\}$ 等等.

例 5 设 r,s,t 是三个互不相同的数，且 $A=\{r,s,t\}$，$B=\{r^2,s^2,t^2\}$，$C=\{rs,st,rt\}$. 若 $A=B=C$，则 $\{r,s,t\}=\{1,w,w^2\}$，其中

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}, \quad \mathrm{i} \text{ 是虚数单位}.$$

证明 因为集合相等就是其元素相同，所以将每个集合中的全部元素作数值和，所得到的三个数应该相等，若令其和为 K，则有

$$r+s+t=r^2+s^2+t^2=rs+st+rt=K.$$

从而得到

$$K^2 = (r+s+t)^2 = (r^2+s^2+t^2) + 2(rs+st+rt)$$
$$= 3K,$$

即 $K=3$ 或 0. 又从数值的乘积看,同理有

$$rst = r^2s^2t^2,$$

故知 $rst=1$. 于是在 $K=3$ 时,可知 r,s,t 为方程

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

的根,亦即$(x-1)^3=0$ 之根. 但此时有 $r=s=t=1$,不合题意. 这说明 $K=0$,此时 r,s,t 为方程

$$x^3 - 1 = 0$$

的根,即 $x=1$ 以及 $x=(-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i})/2$.

§1.2 集合的运算

集合的分解与合成是探讨各集合之间相互关系以及组成新集合的一种有效手段,从而使集合论方法在实变函数论中获得重要的应用. 这种分解与合成可以通过各种集合间的运算来表达,现将其概念与主要性质作一简单介绍.

(一) 并与交

定义 1.4 设 A,B 是两个集合,称集合$\{x: x\in A$ 或 $x\in B\}$为 A 与 B 的**并集**,记为 $A\cup B$,即由 A 与 B 的全部元素构成的集合.

为直观起见,现用图形来示意集合运算构成的新集合,称为 Venn 图. $A\cup B$ 见图 1.1.

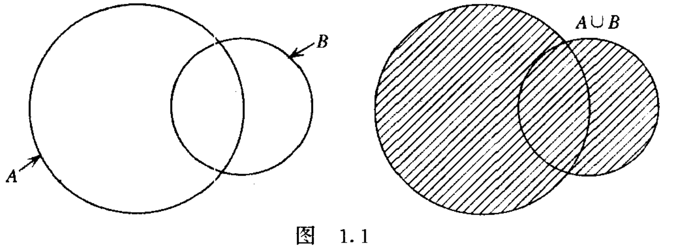

图 1.1

定义 1.5 设 A,B 是两个集合，称集合 $\{x:x\in A,x\in B\}$ 为 A 与 B 的**交集**，记为 $A\cap B$，即由 A 与 B 的公共元素构成的集合(见图 1.2). 若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B **互不相交**.

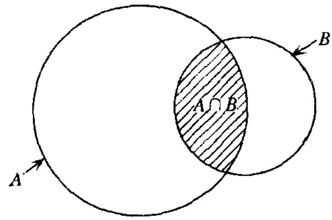

图 1.2

例 1 若 $f(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 上的实值函数，则

$$\{x:\ l\leqslant f(x)\leqslant k\}=\{x:\ f(x)\geqslant l\}\cap\{x:\ f(x)\leqslant k\}.$$

关于作交与并及其联合运算，有下述重要规律.

定理 1.1 设有集合 A,B 与 C，我们有

(i) 交换律：

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A;\tag{1.1}$$

(ii) 结合律：

$$\begin{aligned}&A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\\&A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;\end{aligned}\tag{1.2}$$

(iii) 分配律：

$$\begin{aligned}&A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\\&A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).\end{aligned}\tag{1.3}$$

类似地，可以定义多个集合的并集与交集. 设有集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$，我们定义其并集与交集如下：

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\ 存在\ \alpha\in I,x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\ 对一切\ \alpha\in I,x\in A_\alpha\}.$$

此外，前述之交换律与结合律仍适用于任意多个集合的情形. 这一事实说明，当一个集合族被分解(以任何方式)为许多子集合

族时，那末先作子集合族中各集合的并集，然后再作各并集的并集，仍然得到原集合族的并，而且作并集时与原有的顺序无关. 当然，对于交的运算也是如此. 至于分配律，则可以写为：

(i) $A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$；

(ii) $A\cup\left(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$.

例 2 若 $f(x)$是$[a,b]$上的实值函数，则可作点集分解如下：

$$[a,b]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in[a,b]:|f(x)|<n\},$$

$$\{x\in[a,b]:|f(x)|>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\in[a,b]:|f(x)|>\frac{1}{n}\right\}.$$

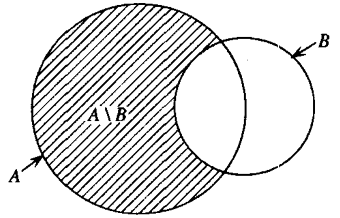

图 1.3

（二）差与补

定义 1.6 设 A,B 是两个集合，称$\{x:x\in A,x\overline{\in}B\}$为 A与 B 的**差集**，记为 $A\backslash B$(读作 A 减 B)，即由在 A 集合中而不在 B 集合中的一切元素构成的集合(见图 1.3).

在上述定义中，当 B 是 A 的子集时，称 $A\backslash B$ 为集合 B 相对于 A 的**补集**或**余集**. 通常，在我们讨论问题的范围内，所涉及的集合总是某个给定的“大”集合 X 的子集，我们称 X 为**全集**. 此时，集合 B 相对于全集 X 的补集就简称为 B 的补集或余集，并记为 B^c 或 $\mathscr{C}B$. 即

$$B^c=X\backslash B.$$

今后，凡没有明显标出全集 X 时，都表示取补集运算的全集 X 预先已知，而所讨论的一切集合皆为其子集. 于是 B^c 也简记为

$$B^c=\{x:x\overline{\in}B\}.$$

显然，我们有下列简单事实：

(i) $A\cup A^c=X$, $A\cap A^c=\varnothing$, $(A^c)^c=A$, $X^c=\varnothing$, $\varnothing^c=X$；

(ii) $A\backslash B=A\cap B^c$;

(iii) 若 $A\supset B$,则 $A^c\subset B^c$;若 $A\cap B=\varnothing$,则 $A\subset B^c$.

特别地,我们有下述两个重要法则:

定理 1.2(De. Morgan 法则)

(i) $$\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c; \tag{1.4}$$

(ii) $$\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c. \tag{1.5}$$

证明 以(i)为例. 若 $x\in\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c$,则 $x\overline{\in}\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$,即对一切 $\alpha\in I$,有 $x\overline{\in}A_\alpha$. 这就是说,对一切 $\alpha\in I$,有 $x\in A_\alpha^c$. 故得 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^c$. 反之,若 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^c$,则对一切 $\alpha\in I$,有 $x\in A_\alpha^c$,即对一切 $\alpha\in I$,有 $x\overline{\in}A_\alpha$. 这就是说,

$$x\overline{\in}\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha,\quad x\in\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c.$$

有了补集的概念,全集就一分为二,从而使 A 与 A^c 互相补充. 我们常常可以通过 A^c 来研究 A. 此外,还可以利用补集运算的性质来简化集合关系的证明与表示.

定义 1.7 设 A,B 为两个集合,称集合 $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ 为 A 与 B 的**对称差集**,记为 $A\triangle B$. 这是由既属于 A,B 之一但又不同时属于两者的一切元素构成的集合(见图 1.4).

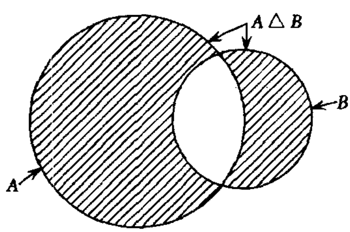

图 1.4

由定义立即可知 $A\cup B=(A\cap B)\cup(A\triangle B)$. 因此,对称差集

是表示并集中除公共元素以外的部分. 显然,我们有下列简单事实:

(i) $A\triangle\varnothing=A, A\triangle A=\varnothing, A\triangle A^c=X, A\triangle X=A^c$;

(ii) 交换律: $A\triangle B=B\triangle A$;

(iii) 结合律: $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$;

(iv) 交与对称差满足分配律: $A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$;

(v) $A^c\triangle B^c=A\triangle B$;

(vi) 对任意的集合 A 与 B,存在惟一的集合 E,使得 $E\triangle A=B$,实际上 $E=B\triangle A$.

例 3 设有 A,B,C 三个集合,则

(i) $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$表示属于 A,B 与 C 中至少两个集合的元素全体形成的集合.

(ii) $(A\cup B\cup C)\setminus(A\triangle B\triangle C)$表示属于 A,B 与 C 中至少两个集合但不属于三个集合的元素全体形成的集合.

(iii) $(A\triangle B\triangle C)\setminus(A\cap B\cap C)$表示属于 A,B 与 C 中的一个集合但不属于另外两个集合的元素全体形成的集合.

例 4 设 A,B 是全集 X 中的两个子集,若对任意的 $E\subset X$,均有 $E\cap A=E\cup B$,则 $A=X, B=\varnothing$.

证明 取 $E=X$,则由题设知 $A=X$;又取 $E=A^c$,则由题设知 $\varnothing=A^c\cap A=A^c\cup B=\varnothing\cup B$,即 $B=\varnothing$.

思考题 试证明下列命题:

1. 设 A,B,E 是全集 X 中的子集,则

$$B=(E\cap A)^c\cap(E^c\cup A)\Longleftrightarrow B^c=E.$$

2. 设 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots, B_1\subset B_2\subset\cdots\subset B_n\subset\cdots$,则

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n).$$

3. 设有集合 A,B,E 和 F.

(i) 若 $A\cup B=E\cup F, A\cap F=\varnothing$ 以及 $B\cap E=\varnothing$,则

$$A = E \text{ 且 } B = F;$$

(ii) 若 $A\cup B=E\cup F$，令 $A_1=A\cap E, A_2=A\cap F$，则

$$A_1 \cup A_2 = A.$$

（三）集合列的极限（集）

类似于数列的极限这一进行无限运算的工具，现在也把它移植于集合论中，我们将会看到这一运算在集合表示法中的重要作用。大家知道，单调数列的极限总是可以定义的，这就启发我们先来考虑单调集合列的无限运算。

定义 1.8 设 $\{A_k\}$ 是一个集合列。若

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots,$$

则称此集合列为**递减集合列**。此时我们称其交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为集合列 $\{A_k\}$ 的极限集，记为 $\lim_{k\to\infty} A_k$；若 $\{A_k\}$ 满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots,$$

则称 $\{A_k\}$ 为**递增集合列**，此时我们称其并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_k\}$ 的极限集，记为 $\lim_{k\to\infty} A_k$。

例 5 若 $A_n=[n,\infty)(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim_{n\to\infty} A_n=\varnothing$。

例 6 设在 $\boldsymbol{R}^1$ 上有渐升的实值函数列：

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant \cdots,$$

且 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$。现在对于给定的实数 t，作集合列

$$E_n = \{x : f_n(x) > t\}, \quad (n = 1,2,\cdots).$$

显然有 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$，而且得到

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > t\} = \{x : f(x) > t\},$$

也即

$$\lim_{n\to\infty} \{x : f_n(x) > t\} = \{x : f(x) > t\}.$$

对于一般的集合列，也可类似于数列上、下极限的作法来给出

上、下限集的概念.

定义 1.9 设$\{A_k\}$是一集合列,令

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k, \quad (j = 1,2,\cdots),$$

显然有 $B_j \supset B_{j+1}(j=1,2,\cdots)$,我们称

$$\lim_{k\to\infty} B_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$$

为集合列$\{A_k\}$的**上极限集**,简称为**上限集**,记为

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k.$$

类似地,称集合 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$ 为集合列$\{A_k\}$的**下极限集**,记为

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k,$$

简称为**下限集**. 若上、下限集相等,则说$\{A_k\}$的极限集存在并等于上限集或下限集,记为 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

例 7 设 E,F 是两个集合,作集合列

$$A_k = \begin{cases} E, & k\text{ 为奇数}, \\ F, & k\text{ 为偶数}, \end{cases} \quad (k = 1,2,\cdots)$$

从而我们有

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = E \cup F, \quad \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = E \cap F.$$

对于上、下限集的运算,易知下述事实成立:

(i) $E\setminus\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}}(E\setminus A_k)$;

(ii) $E\setminus\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}(E\setminus A_k)$.

定理 1.3 若$\{A_k\}$为一集合列,则

(i) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \{x$: 对任一自然数 j,存在 $k(k\geqslant j)$,$x\in A_k\}$;

(ii) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \{x$: 存在自然数 j_0,当 $k\geqslant j_0$ 时,$x\in A_k\}$.

这就是说,$\{A_k\}$的上限集是由属于$\{A_k\}$中无穷多个集合的元素所

形成的;$\{A_k\}$的下限集是由只不属于$\{A_k\}$中有限多个集合的元素所形成的. 从而立即可知

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k \supset \underline{\lim_{k\to\infty}} A_k.$$

证明 以(ii)为例,若 $x\in\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$,则存在自然数 j_0,使得

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k.$$

从而当 $k\geqslant j_0$ 时,有 $x\in A_k$. 反之,若存在自然数 j_0,当 $k\geqslant j_0$ 时,有 $x\in A_k$,则得到

$$x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_k,$$

由此可知 $x\in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=j}^{\infty} A_k=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$.

例 8 设$\{f_n(x)\}$以及 $f(x)$是定义在 $\boldsymbol{R}^1$ 上的实值函数,则使 $f_n(x)$不收敛于 $f(x)$的一切点 x 所形成的集合 D 可表示为

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right\}.$$

这个集合表示式初看起来有点"不知从何说起",因而我们来谈谈它的构思,详细证明留给读者,大家知道,若 $f_n(x)$在点 x_0 不收敛到 $f(x_0)$,则存在 $\varepsilon_0>0$,对任给自然数 k,必有 $n\geqslant k$,使得

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0.$$

也就是说,若令

$$E_n(\varepsilon_0)=\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0\},$$

则点 x_0 是属于$\{E_n(\varepsilon_0)\}$中之无穷多个集合的,即是 x_0 含于$\{E_n(\varepsilon_0)\}$的上限集内. 反之,对任意给定的 $\varepsilon>0$,$\{E_n(\varepsilon)\}$的上限集中的点都是不收敛点. 总之,这些上限集在对 ε 求并集后可构成全体不收敛点. 最后,上述之 ε 又可由一列$\{\varepsilon_k\}$:$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots>\varepsilon_k>\cdots\to 0$ 来代替. 特别取 $\varepsilon_k=1/k$ 时,就得到 D 的表示式.

思考题 试证明下列命题:

1. 设$\{f_n(x)\}$以及 $f(x)$都是定义在 $\boldsymbol{R}^1$ 上的实值函数,且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in \boldsymbol{R}^1,$$

则对 $t\in\boldsymbol{R}^1$，有

$$\{x \in \boldsymbol{R}^1 : f(x) \leqslant t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x \in \boldsymbol{R}^1 : f_n(x) < t + \frac{1}{k}\right\}.$$

2. 设 $a_n \to a(n\to\infty)$，则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left(a_n - \frac{1}{k}, a_n + \frac{1}{k}\right) = \{a\}.$$

3. 设 $\{A_n\}$，$\{B_n\}$ 是递增集合列，则

$$\lim_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cap \lim_{n\to\infty} B_n.$$

（四）集合的直积

定义 1.10 设 X,Y 是两个集合，称一切有序“元素对”(x,y)（其中 $x\in X, y\in Y$）形成的集合为 X 与 Y 的**直积集**，记为 $X\times Y$，即

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\},$$

其中 $(x,y)=(x',y')$ 是指 $x=x'$，$y=y'$，$X\times X$ 也记为 X^2.

例 9 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5\}$，则 A 与 B 之直积 $A\times B$ 中的全部元素为：

$$(1,4),\ (1,5),\ (2,4),\ (2,5),\ (3,4),\ (3,5).$$

例 10 $[0,1]\times[0,1]$ 为平面上单位闭正方形.

例 11 $\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^2$ 是平面上的有理点集.

§1.3 映射与基数

（一）映射

在微积分中大家知道，定义在 $[a,b]$ 上的一个实值函数就是从集合 $[a,b]$ 到 $\boldsymbol{R}^1$ 中的一种对应关系. 现在，我们要把这一概念推广到一般的集合上，建立不同集合之间的联系.

定义 1.11 设 X,Y 为两个非空集合. 若对每个 $x\in X$，均存

在惟一的 $y\in Y$ 与之对应，则称这个对应为**映射**(**变换**或**函数**). 若用 f 表示这种对应，则记为

$$f: X\to Y,$$

并称 f 是从 X 到 Y 的一个映射. 此时，$x\in X$ 在 Y 中的对应元 y 称为 x 在映射 f 下的(映)**像**，x 称为 y 的一个**原像**，我们记为 $y=f(x)$；若对每一个 $y\in Y$，均有 $x\in X$，使得 $y=f(x)$，则称此 f 为从 X 到 Y 的**满映射**，或称 f 为从 X 到 Y **上**的映射.

对于 $f: X\to Y$ 以及 $A\subset X$，我们记

$$f(A)=\{y\in Y: x\in A, y=f(x)\},$$

并称 $f(A)$ 为集合 A 在映射 f 下的(映)**像集**($f(\varnothing)=\varnothing$). 显然，我们有下列简单事实：

(i) $f\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$；

(ii) $f\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$.

对于 $f: X\to Y$ 以及 $B\subset Y$，我们记

$$f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\},$$

并称 $f^{-1}(B)$ 为 B 关于 f 的**原像集**. 显然，我们有下列简单事实：

(i) 若 $B\subset A$，则 $f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A)$　$(A\subset Y)$；

(ii) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$　$(B_\alpha\subset Y, \alpha\in I)$；

(iii) $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$　$(B_\alpha\subset Y, \alpha\in I)$；

(iv) $f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c$　$(B\subset Y)$.

定义 1.12　设 $f: X\to Y$. 若当 $x_1, x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$ 时，有

$$f(x_1)\neq f(x_2),$$

即 X 中不同元有不同的像时，则称 f 是从 X 到 Y 的一个**单射**. 若 f 既是单射又是满映射，则称 f 为 X 到 Y **上的一一映射**. 在 f 是 X 到 Y 上的一一映射的情况下，对 Y 中的每一个元 y，就有 X 中的惟一元 x，使得 $y=f(x)$. 从而我们又可作 Y 到 X 上的映射