921189

数学模型与计算机模拟

江裕钊　辛培清　编著

电子科技大学出版社

高等学校教学用书

数学模型与计算机模拟

江裕钊　辛培清　编著

电子科技大学出版社
·1989·

内 容 提 要

本书分为两部分，第一部分(一至六章)讨论模型建立和构造的一般方法，并讨论了工程技术、生物系统、经济系统和社会系统等领域的若干数学模型。第二部分(七至十二章)讨论系统模拟的基本原理和方法，主要包括模拟的概率与统计原理，随机序列的产生以及模拟试验与结果分析、模型确认等内容。

本书着重于分析问题、构造模型的方法与思路，以及对随机离散系统进行模拟。书中还编入了大量习题，以提高读者解决实际问题的能力。

本书可作为高等院校各类理工专业的本科生、研究生教材或教学参考书，也可作为工程技术领域的科技人员和高等学校教师的参考书。

高等学校教学用书

数学模型与计算机模拟

江裕钊　辛培清　编著

*

电子科技大学出版社出版

(中国成都市建设北路二段四号)

电子科技大学出版社印刷厂印刷

四川省新华书店经销

*

开本　787×1092　1/16　　印张　17.625　　字数　430千字

版次　1989年12月第一版　　印次　1989年12月第一次印刷

印数　1－3300册

中国标准书号　ISBN 7-81016-209-8/TP·15

(15452·92)　　　定价：5.70元

前　言

构模方法与计算机模拟技术是现代系统方法的重要内容，七十年代以来得到迅速的发展。计算机模拟技术作为一门独立的学科，虽然时间还不长，但由于其突出的优点，现已形成一门应用范围很广、综合性很强、横跨广大学科领域的新学科。可以说，凡一切应用计算机的领域，都不同程度地用到模拟的方法与技术。构模(Modelling)方法，则与模拟技术紧密相关，它是对系统进行分析、研究、评价、设计和预测的必要前提，也是对系统进行模拟试验的关键环节。实际上，一切科学研究都是首先与模型打交道，然后才在实际系统上实现的。

作者在这些年的本科生与研究生教学以及科研工作中，感到理工科院校的学生，在四年的本科学习中，专业知识已具有一定基础，但长期的专业课程学习，可能产生知识囿于较小的专业范围的弊病。因此，需要设立一些新的课程，使已学的知识扩展和伸延到广大的领域，从而开阔视野，增强能力，为研究新的学科领域打下初步基础。编写本书，就是这方面的一个尝试，即以横向的观点，通过模型(特别是数学模型)，把自然科学、工程技术、生物科学和社会科学等广大领域联系起来。

首先，本书的第一个重点是强调分析问题和构造模型的方法和思路。在构造模型中，不仅关心所用的数学方法，还关心数学方程(模型)的物理背景。即最根本的是要懂得如何来往于现实世界和数学世界之间。本书的第二个重点是强调实践性，附在每章后面的若干习题都是现实系统中经常遇到的和需要解决的问题，这些习题是本书的重要组成部分和正文内容的补充。建议读者阅读这些习题，并最好从分析、构模、编程、上计算机运行到结果分析，完成几个系统模拟的全过程。这样，对了解和掌握本书的内容是有帮助的。

本书共12章，其中第7章、第9章和第11章由辛培清同志编写，其余各章和全书的联接核对由江裕钊同志负责编写。由于本书题材涉及范围较宽，更由于作者的知识和水平的限制，疏漏错误之处恐怕不少，恳请广大读者批评指正。

本书的完成，得到陈尚勤教授和向敬成教授的关心和帮助，他们审阅了本书全稿，提出了许多宝贵意见，使作者获益非浅，陈天麒教授也给予了热情的支持，作者在此向他们表示衷心的谢意。

编著者

1988年10月于电子科技大学

E.S 68114

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 数学模型的建立

§1-1 系统、构模和模拟

我们今天所面临的一切对象，无论是自然界的基本粒子和宇宙星系，还是社会的生产活动，都是一些复杂的系统。从基本粒子到天体，从单细胞生物到人类，从社会生产活动到思维等等，一切都是自成系统的。几乎在一切社会领域中，都使用“系统”这个词，我们把描述系统及其行为的方法学叫做“系统方法”。在这一点上，系统方法有别于一般的科学方法。系统方法的迅速发展起因于现代技术的发展和社会消费的极大增长。我们过去所熟悉的工作机器，如蒸汽机车、汽车和电机等，都是限于某一特定范围的工程知识。但谈到现代的宇宙飞船、大型客机和巨型海轮时，这些设备中所包含的机械的、热力的、液压的、电气的和其它各个子系统的相互影响，使得这些复杂的现代化设备在很大程度上由各个子系统的相互关系所确定，

随着科学技术的迅速发展，现代的系统规模愈来愈大，结构也愈来愈复杂。例如，国家范围的现代通信系统、计算机网络系统、生态系统、管理系统、教育系统、能源与电力系统、运输系统、粮食生产与分配系统等等。

那么，什么是系统呢？由于系统的含意极广，许多系统科学的研究者从不同的角度作了解释和定义，可参看文献[1]。系统可定义为以相互影响或相互独立的某些规则联系起来的若干事物的集合体。例如，考虑一个现代航空运输系统，它包括这条航线上可能的乘客数量、投入的飞机架数、货物行李数量、地面维修、安全保卫、气象条件以及售票服务等各个子系统，所有这些事物都是以安全、舒适地运送旅客为目的而相互联系和相互影响的集合体，这是一个复杂的系统。

为了描述大规模的、复杂的、相互联系的系统，在进行设计和分析时，系统方法往往用“构模”(Modelling)的方法，用系统模型来代替系统本身，在模型上进行分析、研究和预测系统的性能，从而作出决策，设计出经济的、合理的、高效的系统。

模拟技术则是在模型上对客观世界的各种系统进行实验研究的一种新的应用技术，同时也是建立在计算机技术基础上的一门综合的技术学科。构模方法和计算机模拟技术是系统方法的重要内容之一，近年来在各学科领域中得到迅速的发展，目前广泛应用于自然科学、工程技术和社会科学中。

§1-2 模型及其分类

讨论模型，首先要解释两个有关概念：我们把一切客观存在的事物及其运动形态统称为实体；把描述实体特征的信息称为属性，属性是对实体进行模拟的基本单位。而模型则是对实体(系统)的特征和变化规律的一种定量的抽象①。

① 实体与系统的关系是：系统由为数众多的子系统构成，而实体也有若干层次，一个实体可以由许多低层次的实体组成，而它又可作为高层次实体的一部分。因而，实体与系统在这里两者的含义是相通的。

换句话说，模型是现实的一种代表，是客观世界(实体)的一个抽象。在科学研究中，模型是人们用以认识事物的一种手段和工具。人们用模型来反映客观事物及其相互联系，进行实验设计，从而形成新的科学概念，建立新的理论体系。自然科学中诸如经典力学、量子力学、有机化学及近代物理学中的重大发现，都得益于模型的帮助。例如，哥白尼的太阳系模型，多普勒的天体运行模型成为后来牛顿创立经典力学的基础。1913年，物理学家玻尔在卢瑟福提出的原子行星模型的基础上创立了量子理论。1865年，化学家凯库勒(Kekule)提出了苯分子的环状结构模型，从而带来了有机化学的重大突破等等。

在有关著作中对模型的分类方法有详细的讨论[1]。本书采用一般的分类方法和文献[3]的分类层次，并结合近年来的发展情况予以补充。我们把系统模型分为三类，即物理模型、数学模型和描述模型，如图 1-1 所示。其中数学模型是本书要着重讨论的；由于计算机科学和技术的进一步发展，对描述模型也给予了较大重视，物理模型不是本书要讨论的内容，只作简要的说明。

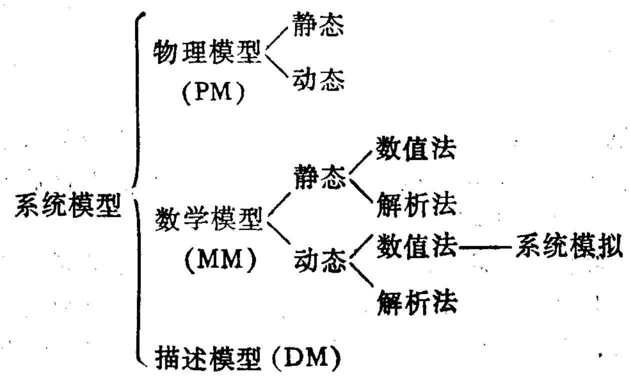


图1-1　系统模型的分类

一、物理模型 (Physical Model)

物理模型是简化的、类似于实际系统的某些突出特征而设想的一种物理系统，它较之于真实系统更易于进行分析研究，物理模型按其性质的不同又可分为两类。

1. 静态模型

最常见的静态模型是比例模型，比例模型是真实系统尺寸的放大或缩小，模型与原型的差别仅在于物理量及比例大小的不同，而现象的物理本质不变。在现实世界中，比例模型的例子很多，例如：

- 地球仪是地球(原型)缩小若干倍的比例模型；
- 沙盘作战模型则是战场情况的比例模型；
- 雕塑的人像是以某一模特为原型的比例(或称肖像)模型等等。

这里所举例的模型，以及前节所列举的近代科学得益于模型的例子，多属于这一类物理模型。这类模型的突出特征是模型的属性值与时间无关，模型反映的是系统处于静止状态时的情况，因而又叫静态物理模型。

2. 动态模型

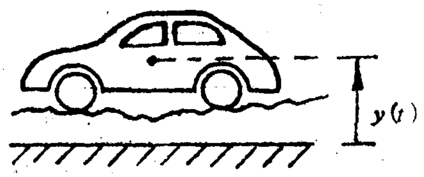
动态物理模型又叫类比(Analog)模型。在研究一些物理本质不同，而变量关系类似的物理系统时，往往要用到类比模型。比如电路系统与机械系统，电路系统与流体系统之间，这

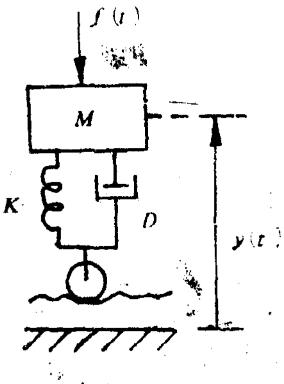
些系统的物理性质各不相同，但支配系统行为的因素有着本质类似的特征，基于这一点，类比模型可帮助我们把比较了解和熟悉的系统，推广到还不甚了解和生疏的系统中去，对两种系统进行类比分析往往是很有益处的，在本章后面，我们还要进一步讨论。

考虑图1-2和图1-3的类比模型的简单情况。图1-2是一个汽车系统，我们对汽车在道路上行驶时的垂直位移$y(t)$的规律感兴趣。为简化问题，假定整个车体的质量集中在理想的质量M上，并用一个理想的弹簧K和减震器D分别表示汽车的弹性和冲击阻尼，这样一个质量-弹簧-减震器(M-K-D)系统如图1-2(b)所示。开始时，还假定机械系统的三种元件都是线性的，图1-2(b)表示了汽车悬挂系统，按照力学第二定律，描述此系统的数学方程是一个二阶微分方程：

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+D\frac{dy(t)}{dt}+Ky(t)=f(t) \tag{1-1}$$

式中，$y(t)$——汽车在道路上的垂直位移；M——汽车的质量；K——弹簧刚性；D——减震器阻尼系数。





(a) 汽车悬挂系统 (b)力学类比模型

图1-2 汽车系统的物理模型

图1-3是汽车悬挂系统的电路类比模型。对于图1-3(a)，输入电压源$e(t)$加于RLC串联电路，按克希霍夫电压定律(KVL)有

$$u_R+u_L+u_C=e(t)$$

又 $i(t)=dq/dt$， $u_R=Rdq/dt$

$u_L=Ldi/dt=Ld^2q/dt^2$， $u_C=q/C$

代入上式得

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=e(t) \tag{1-2}$$

其次，对于图1-3(b)，输入电流源$i(t)$加于并联RLC电路，按照克希霍夫节点电流定律(KCL)有

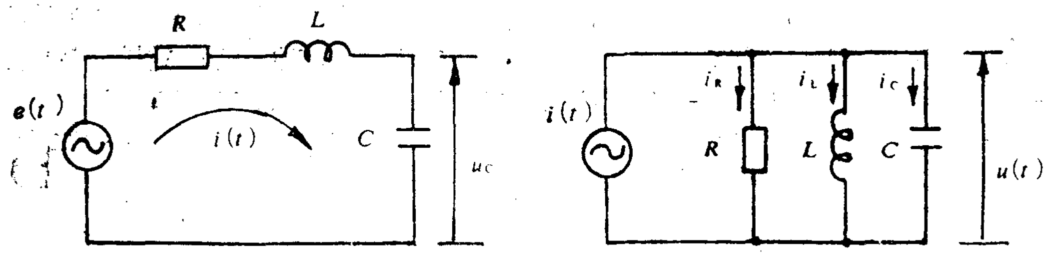
$$i_R+i_L+i_C=i(t)$$

又 $\Phi=Li_L$， $u(t)=L\frac{di_L}{dt}=d\Phi/dt$

$i_R=u/R=\frac{1}{R}d\Phi/dt$， $i_C=C\frac{du}{dt}=Cd^2\Phi/dt^2$

得

$$C\frac{d^2\Phi}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}+\frac{1}{L}\Phi=i(t) \tag{1-3}$$



(a)串联 RLC电路

(b)并联 RLC电路

图1-3 汽车悬挂系统的电路类比模型

比较图1-2的机械系统及图1-3的电路类比模型及它们的数学方程，不难得到如表1-1所示的类比关系。

表1-1 机械系统的电路类比

机械系统	作用力f(t)	速度v(dy/dt)	位移y	质量M	阻尼D	弹簧刚性K
串联电路	电压源e(t)	电流i(dq/dt)	电荷q	电感L	电阻R	倒电容1/C
并联电路	电流源i(t)	电压u(dΦ/dt)	磁通Φ	电容C	电导1/R	倒电感1/L

从方程(1-1)，(1-2)和(1-3)的结构及各项参数的一一对应关系可得到以下结论：若两个系统可以用同样的微分(差分)方程描述，则此两个系统可互相类比。在这个例子中，如果我们想了解汽车悬挂系统运动的稳定性，则可以方便地采用电路类比模型，改变电路中元件的数值来预测汽车的性能，从而为汽车的设计提供依据。

类比模型是基于两个系统间动态性质上的相似，而不是外形上的类似。因此，类比模型实际上是真实系统的动态物理模型。

二、数学模型 (Mathematical Model)

数学模型是用数学语言描述的某个现实世界的模型。在许多著作中，对数学模型的定义各有差异，这里所下的定义比较笼统，但它从外形上概括了数学模型的特征，所指的“数学语言”，就是数学中所用的符号、数字、字母及数学方程式和数学结构(如某种表格关系等)。在数学模型中，用变量表示被描述实体的属性，而对实体的变化则用变量间的数学函数关系式来表达。

在这一节开始，对模型的定义主要是指数学模型。数学模型可以定量地描述事物的内在联系和变化规律，因此，建立某个系统的数学模型，是人们对该事物认识的一个质的飞跃。

从图1-1的模型分类可知，数学模型又可分为静态的和动态的两类。

静态数学模型是当一个实体(系统)处于平衡状态时的取值，因此静态数学模型中不含时间因素，其数学式通常是一个或一组代数方程，在生产和工艺流程中，若过程的变化缓慢或相对稳定，则往往可用一组代数方程来描述，达到实现控制的目的。例如，常用的线性统计模型

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$Y = AX + E \tag{1-4}$$

就是一个典型的例子，式中$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}^T$是自变量，$Y=\{y_1, y_2\cdots, y_m\}^T$是因变量，$E\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}^T$是误差项，括弧右上角的$T$是向量$X$，$Y$，$E$的转置符号。而式中的$A$是线性系数矩阵，其形式为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

动态数学模型描述由于实体活动所引起的系统状态在时间轴上的变化，其数学式通常是一组微分或差分方程。比如对某一过程，我们用n个状态变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$所组成的状态向量$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}^T$表示，并用$m$个分量表示输入控制向量$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}^T$，则可列出描述过程动态行为的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2m}u_m \\ \cdots\cdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nm}u_m \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22}\cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

若以A——$n\times n$维状态矩阵，B——$n\times m$维控制矩阵，X——n维状态列向量，U——m维控制列向量表示，则上式可简记为

$$\dot{X} = AX + BU \tag{1-5}$$

方程(1-5)是研究控制过程、滤波技术和电路理论所采用的标准形式。这一动态模型可以是线性的或非线性的，也可以是时变的或非时变的。若对过程的测量是等时间间隔的抽样序列，则得到的是离散状态差分方程：

$$X_{k+1} = A_kX_k + B_kU_k \tag{1-6}$$

方程(1-5)是连续状态方程，而方程(1-6)则是离散的。实质上，静态模型是动态模型的一种特例，是动态模型在某一时刻或某一时间段内的取值。

数学模型的第二层次则是按对数学方程的求解方法来划分的。不论是静态的或动态的，一般都是用解析方法或者数值方法求解。

解析方法是直接应用现有的数学理论和定律去推导和演绎数学方程(模型)的解。例如，前面讨论过的二阶线性常微分方程就可用解析法求得通解。但解析法只能用于有限的范围，对许多用以描述复杂系统的高阶、非线性、时变的微分和差分方程，就很难用解析法求解。

数值方法是用计算机程序求解数学模型。数值方法又叫数值分析，它是用递推的方法，把方程中的变量(系统中的属性值)，以表格的形式推导为数字量，从而得到随时间(或空间)变化的一系列数字解，应用数值方法求解的动态数学模型，就是本书所讨论的计算机模拟

模型，在本书后面有关模拟内容中再作详细讨论。

应当指出，模型分类方法很多，还可按变量变化的特点分为离散模型与连续模型，用离散模型描述的系统称为离散系统，离散系统往往带有随机性质，而与之相应的则是连续系统。对模拟而言，分为离散和连续是很必要的，因为两者的模拟方法差别极大。此外，还可按变量的性质分为确定型模型和概率型模型，前者仅仅注意变量的平均取值，而后者则考虑变量的波动。由于我们感兴趣的领域如社会科学、经济管理，工程技术，生物群体等大量过程都带有随机性质，因而，我们对概率型模型十分关心。

三、描述模型(Descriptive Model)

描述模型是近年来对社会科学、心理学、哲学及人工智能的研究中发展起来的一类重要模型。由于计算机科学技术的迅速发展，对描述模型的研究也随之取得重大发展。

描述模型是一个抽象的(没有物理实体)、不能(至少目前很难)用数学方程表达、只能用语言(自然语言、程序语言)描述的系统模型。简言之，描述模型就是尚未数学化或有待于数学化的模型。

描述模型源于计算机科学的分支——人工智能。在处理复杂系统时，这种能在计算机上用程序语言实现的“描述性”模型，是目前唯一可行的途径。

描述模型的特点是对所涉及的现象知之不多，认识不连贯，经常出现一些随机数据，并且需要用大量数据来描述所关心的领域。

描述模型与数学模型的主要差别是，数学模型的解是计算出来的，而描述模型的解是“探索”出来的，在探索过程中不断地完善和发展，这样的解更接近人类的思维过程。

当前，人工智能中发展最快的一个领域是所谓“专家系统”。专家系统的主要问题就是建立具有专家知识和经验的“知识模型”，即描述模型。

可以认为，描述模型是系统模型向定量化、数学化目标发展的一个中间过程，建立系统的数学模型是我们力求达到的目的。可以相信，随着我们对系统行为的深入了解和数学的发展，有许多描述模型最终将可以用精确的数学模型来描述。

§1-3 系统的构模

对多数研究而言，不需要考虑系统的所有细节，而是按研究目的，只考虑系统的主要特征和有关数据。换句话说，我们并不追求“完整”的模型，而是希望构造一个“有效”或者“有用”的模型。这样的模型，可以为解决我们的问题提供可靠的依据。

建立系统模型时，可以把系统事物分为三类：(1)对系统影响不大的事物；(2)对系统有影响，但不是模型要研究的事物；(3)模型要研究的事物。仔细划分这三类事物极为重要。对第一类事物，模型不予考虑，从而使模型简化。对第二类事物，一般用常量和函数表达，称之为局外变量或者又叫输入变量，如前面讨论的机械系统的作用力$f(t)$、弹簧K和减震器D等。对第三类事物，称为局内变量，例如，我们想了解火箭在推力$f(t)$作用下的运动轨道和速度，局内变量又叫输出变量，

建立模型应考虑两方面的工作，其一是确定模型的结构，建立系统的约束条件，鉴别系统的实体、属性与活动；其二则是提供模型所要求的数据。模型化的一个极为重要的任务

是把系统行为表示为相互作用的输入/输出间的函数关系，如经济系统中的生产-消费关系式、投入-产出关系式、力学系统中的作用力-速度关系式等等。这里所说的系统活动，是指系统内部发生任何变化的过程。

现在考虑图1-4的自动跟踪系统，图中θ_i和φ_i分别为目标的高低角和方位角；$\triangle\theta$和$\triangle\varphi$为角度校正信号。这一系统可用于对自动生产线上的工作和机场飞机的监视以及军事上的用途等。

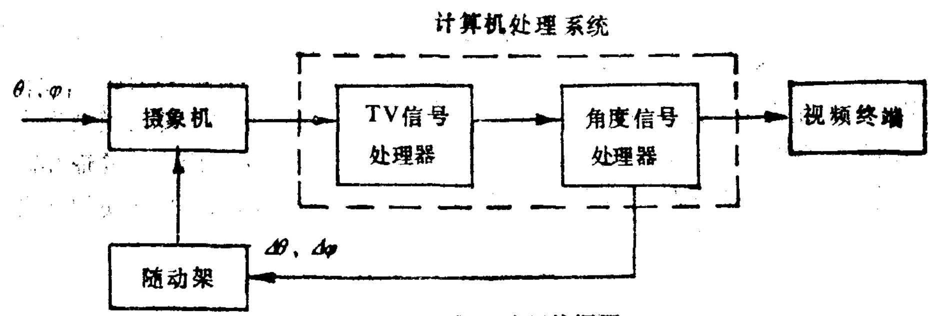


图1-4　电视跟踪系统框图

跟踪系统原理简述如下：系统中的摄象机安装在高低角和方向角可控的随动架上，产生于摄象机靶面上的目标被变换成电信号后，送至计算机进行处理，计算机检测出目标在视场内的角度信息，并送出角度校正信号控制随动架的转动，使得目标成象移至画面中心，从而实现对目标的自动跟踪，这样一个系统的实体就是摄象机、计算机和随动架；系统的属性是高低角和方位角；而系统的活动则是摄象机的运动过程。这里所说的系统活动是指系统内部发生任何变化的过程，而系统状态则是指某一特定时间内，存在于系统内部的实体、属性与活动所构成的整体。

表1-2列出了某些系统及其所含实体、属性和活动的例子。

表1-2　系统模型构成举例

系　　统	实　　体	属　　性	活　　动
电话系统	外线、转接线 电话机、交换台	空　闲 占　线	接　通 挂　断
工厂系统	车间(部门) 订货、材料、零件、成品	机器数量、产量、成品类型等	各车间(部门)的生产、装配过程
雷达系统	接收机、天线 发射机	发射功率、接收灵敏度、天线增益、波束宽度	搜索空间目标 提取回波信息
电视跟踪系统	摄象机 计算机处理系统 随动架	高低角θ 方位角φ	随动架的运动
商　　场	顾　　客 营业员	购货项目 忙或空闲	到达、购物 排队结帐 离去

表1-2所列举的系统模型包含的实体、属性与活动，并非只有表中列出的那几项，而只是我们研究该系统时感兴趣的某些项目，这就是说，同一系统，由于我们研究的目的和注意的方面不同，可以有若干不同的模型，每个模型可能对描述系统的某些方面有贡献。

到此为止，我们得到的是简化的、概念化了的系统模型，即系统的描述模型。

下一步，也是更有创造性的一步，是在概念化模型的基础上，把真实系统各有关因素的相互关系尽可能的量化，并用符号和数学运算描述和取代实际的数据和过程，从而得到系统的数学模型。

数学模型的建立还不是工作的结束，还必须把模型预测的结果与真实系统进行比较，验证模型的可信度。在实践中，经常会发生模型的结论与真实系统的某些方面不一致的情况，此时，应再次研究模型化过程的每一步骤，反复修改，直至得到可接受的模型为止。这时，我们构造数学模型的努力才告一段落。模型化的最后阶段往往更为困难，验证和确认模型往往要花费很大的精力和时间，对所得结果应仔细分析和处理，确认模型的使用范围和精度，避免盲目使用模型和作出错误的结论。

§1-4　建立模型的一般过程

上一节讨论了系统构模的主要环节，这里，我们对建立系统模型的一般过程进行概括并作简要说明。

观察是我们认识事物的起点和基础，构造模型亦不例外，首先由观察开始，进而认识事物和提出问题，然后提出假设，假设是对系统特性或行为可能性的描述。而模型的建立，特别是数学模型的建立，则是对假设的扩充和具体化。在对所建立的模型试验求解后，再进一步对模型进行评价和验证，以检查其真实性和可靠性。只有经过试验而确认其正确性的模型，才可以认为我们对某个问题有了真正的了解，这一过程往往要经多次反复才能达到，图 1-5 以框图表示了模型建立的一般过程，对每一步的具体内容在框图右边作作了注释。下面说明两点：

1．什么是系统边界？前面我们已陈述了由关系和实体构成的系统，观察周围世界，可以发现任何事物都是自成系统的，因为每件事物都是以某种方式相互联系的。只要给定一组实体和相互联系的规则，就可构成一个系统及描述该系统的模型。

对任何不属于讨论中的系统以外的事物则称之为环境。我们对系统外的总体环境不感兴趣，而只关心与系统有关的环境，这些环境的实体不属于系统，但它们影响系统或者受系统影响，这是有关环境和系统间相互作用的问题，故我们设想在系统及其环境间有一个“系统边界”，划定边境有助于模型的建立。

2．系统的定性抽象得到的是描述模型，而我们的目标是建立定量抽象的数学模型。但是现代许多复杂的大系统，很难用数学模型表达，只能用描述模型，如人工能智中的专家系统，在这种情况下，就不经过图1-5中的第五步，而直接把描述模型转化为计算机模拟模型，再运行求解和验证模型，这一情况在图1-5中未明确表示。

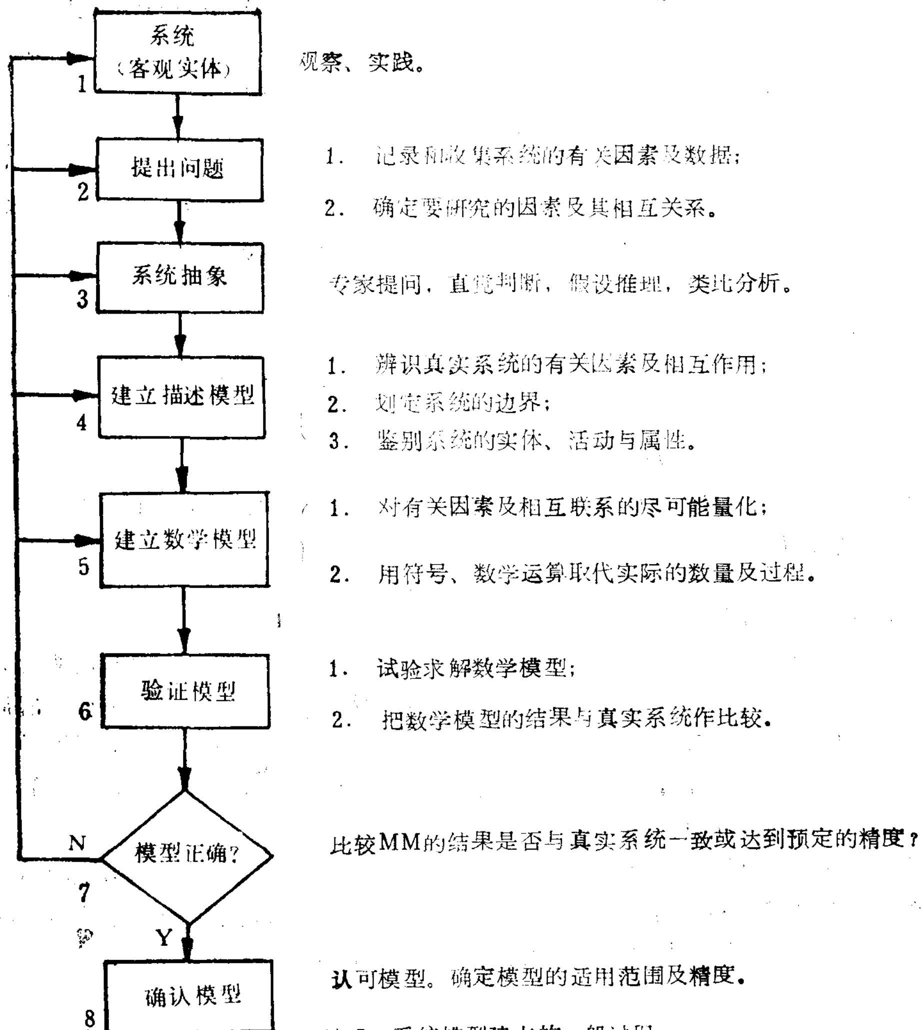


图1-5 系统模型建立的一般过程

§1-5 数学构模举例

考虑一个现实世界中普遍存在的简单热力学系统：水箱加热系统(见图1-6)。

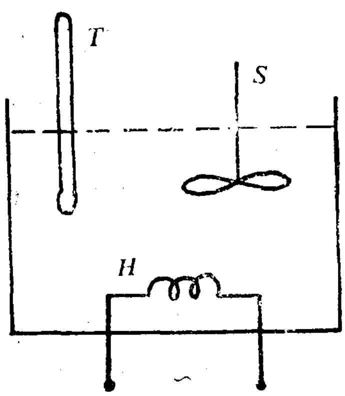


图1-6 水箱加热系统

水箱中有一定数量的水，加热器 H 产生热能，搅拌器 S 则把冷热水层均匀混合，T 为温度计。为建立加热系统的数学模型，假定：①加热器热量变化和水箱中的水温变化是缓慢平稳的；②环境温度保持不变。这样加热器H 供给水一个小的热量$\triangle q(t)$，则水温的相应变化为$\triangle T$，系统的热平衡方程为

$$C_T\frac{d(\triangle T)}{dt}+\frac{\triangle T}{R_T}=\triangle q(t) \qquad (1\text{-}6)$$

式中，C_T——水箱的热容量；R_T——从水箱向周围环境散发热量的阻力系数。方程(1-6)左

边第一项表示了使水箱温度上升的热量，左边第二项表示热量的散失。这一方程表明供给水箱的热量$\triangle q(t)$，一部分用以升高水温，另一部分则散失掉。

用符号$u(t)$替换$\triangle q(t)$，用$y(t)$替换$\triangle T$，方程(1-6)可写为一般的形式：

$$\dot{y}(t)+ay(t)=bu(t) \tag{1-7}$$

式中 $a=1/R_{\mathrm{T}}C_{\mathrm{T}}$， $b=1/C_{\mathrm{T}}$

方程式(1-7)是一阶线性定常微分方程，式中a、b为常数，$bu(t)$是系统的有效输入(控制变量)，而$y(t)$是状态变量。这就是水箱系统的动态数学模型，只要输入热量变化，则水温亦随之改变，使系统达到动态平衡。

现在考虑这样的情况，若输入热量在短时间内大幅度变化，使得水箱温度急速上升，此时假设①不再满足，参数C_{T}和R_{T}取决于水箱温度而不再是常数，则方程(1-7)变为一阶非线性微分方程：

$$\dot{y}(t)+a[y(t)]y(t)=b[y(t)]u(t) \tag{1-8}$$

式中系数a，b是$y(t)$的函数。若假设①满足但环境温度变化大，此时，热容量C_{T}和阻力系数R_{T}随时间变化，则方程(1－7)变为

$$\dot{y}(t)+a(t)y(t)=b(t)u(t) \tag{1-9}$$

这是一阶线性非定常微分方程。

在方程(1－7)到(1－9)中，方程(1－7)是理想条件下的最简单模型；在短时间内输入热量快速变化的系统模型是方程(1-8)；而方程(1-9)则是环境温度变化较大时的模型。实际的水箱系统很可能是两种变化都有，因此描述水箱加热系统的更精细模型是一阶非线性时变微分方程。但我们在分析实际系统时，却宁愿用方程(1－7)的粗糙一些的模型，这样容易得到方程的解析解和便于预测系统的行为。

现在，我们从另一方面考虑水箱加热系统的模型。方程(1-7)到(1-9)，状态度量$y(t)$是连续的时间函数。在对实际系统的监测中，感兴趣的是$y(t)$在离散时刻t_k的抽样值$y(t_k)$，$k=0,1,2,\cdots$，为简单起见，假定每隔时间$\triangle t$进行一次抽样，即在时刻t_0，t_1，$t_2\cdots$各时间点抽样一次水温，即

$$t_k=t_0+k(\Delta t)$$

并假定$\triangle t$很小，则$y(t)$在$t=t_k$时的导数

$$\dot{y}(t_k)\approx\frac{y(t_{k+1})-y(t_k)}{\triangle t} \tag{1-10}$$

令$t_k=k$和$t_{k+1}=k+1$，由式(1－7)和式(1-10)可得到以下关系式：

$$y(k+1)+\alpha y(k)=\beta u(k) \tag{1-11}$$

式中，用$y(k)$和$u(k)$分别替换$y(t_k)$和$u(t_k)$，而$\alpha=a(\triangle t)-1$，$\beta=b(\triangle t)$，由于$\triangle t$是常数，故α，β亦是常数，方程(1-11)是一阶常系数线性差分方程。显然，与方程(1-8)和(1-9)相对应也有一阶非线性差分方程和线性时变差分方程。

从上面讨论的情况可知，对同一系统，可以构造许多不同的模型，这主要取决于我们研究系统的目的。就水箱系统而言，供给热量和水温都是连续变化的，故本质上它是一个连续系统，因而描述连续变化行为的应该是微分方程模型。但因为我们对系统在离散的时间点上的状态度量(温度)的取值感兴趣，所以用抽样的方法把连续系统变为离散系统，从而得到描述离散状态的差分方程。所以，构造什么样的模型，完全取决于我们要解决什么样的问题、以及处理问题是否方便而定。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com